经济学原理课程笔记：一般均衡与帕累托最优

金禾经济研究中心

January 5, 2026

Abstract

本节笔记整理自课堂板书，系统推导了 $2 \times 2 \times 2$ 一般均衡模型。内容涵盖：厂商成本最小化与要素需求、生产可能性边界（PPF）的斜率与凸性证明、以及生产与交换的帕累托最优条件（$MRS = MRT$）。这是福利经济学第一定理的数学核心。

Contents

1　生产部门：成本最小化与要素需求

注释 (T.A. Note)

对应笔记 P.1 上半部分。老师首先从单个厂商的优化行为出发，推导了要素市场的均衡条件。

1.1　模型设定

假设经济中有两个厂商分别生产商品 X 和 Y，使用两种要素 a（劳动）和 b（资本）。

- 生产函数：$x = f(a_x, b_x)$, $y = g(a_y, b_y)$
- 要素价格：P_a (工资 w), P_b (租金 r)
- 商品价格：P_x, P_y

1.2　厂商 X 的优化问题

厂商 X 追求在给定产出 x 下的成本最小化：

$$\min_{a_x, b_x} \quad C_x = P_a a_x + P_b b_x \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad f(a_x, b_x) = x \tag{2}$$

拉格朗日函数：$\mathcal{L} = P_a a_x + P_b b_x + \lambda[x - f(a_x, b_x)]$。一阶条件 (FOCs)：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_x} = P_a - \lambda f_a = 0 \implies \lambda = \frac{P_a}{f_a} \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_x} = P_b - \lambda f_b = 0 \implies \lambda = \frac{P_b}{f_b} \tag{4}$$

此处拉格朗日乘子 λ 的经济含义是**边际成本 (MC)**。因此有：

$$MC_x = \frac{P_a}{f_a} = \frac{P_b}{f_b} = P_x \quad (\text{完全竞争下} P = MC) \tag{5}$$

1.3　厂商 Y 的优化问题

同理，对于厂商 Y：

$$MC_y = \frac{P_a}{g_a} = \frac{P_b}{g_b} = P_y \tag{6}$$

1.4　生产效率条件 (MRTS 相等)

联立上述两组 FOC，我们可以得到要素相对价格比：

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{f_a}{f_b} = \frac{g_a}{g_b} \tag{7}$$

这即是著名的生产契约曲线条件：

$$\mathbf{MRTS}_{ab}^X = \mathbf{MRTS}_{ab}^Y \tag{8}$$

直觉： 两个厂商的等产量曲线切线斜率必须相等。

同时，商品相对价格等于边际成本之比：

$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{MC_x}{MC_y} = \frac{P_a/f_a}{P_a/g_a} = \frac{g_a}{f_a} \tag{9}$$

2 一般均衡系统 (General Equilibrium System)

注释 (T.A. Note)

对应笔记 P.1 下半部分。这里引入了消费者和市场出清条件，构建了完整的 Walrasian System。

2.1 要素禀赋与收入

假设经济中有两个消费者 1 和 2。

- 初始禀赋：消费者 1 拥有 (a_1, b_1)，消费者 2 拥有 (a_2, b_2)。
- 总禀赋：$\bar{a} = a_1 + a_2$, $\bar{b} = b_1 + b_2$。

消费者的收入 I 来自出售要素：

$$I_1 = P_a a_1 + P_b b_1, \quad I_2 = P_a a_2 + P_b b_2 \tag{10}$$

2.2 消费者效用最大化

消费者 i 求解：

$$\max_{x_i, y_i} \quad U_i(x_i, y_i) \tag{11}$$

$$\text{s.t.} \quad P_x x_i + P_y y_i = I_i \tag{12}$$

一阶条件导出消费者均衡：

$$\mathbf{MRS}^i_{xy} = \frac{U_x}{U_y} = \frac{P_x}{P_y} \tag{13}$$

2.3 市场出清 (Market Clearing)

笔记底部潦草的公式是在写市场出清条件。

1. **要素市场出清：**

$$a^x(P_a, P_b, X) + a^y(P_a, P_b, Y) = \bar{a} \tag{14}$$

$$b^x(P_a, P_b, X) + b^y(P_a, P_b, Y) = \bar{b} \tag{15}$$

   其中 $a^x(\cdot)$ 是条件要素需求函数 (Conditional Factor Demand)。

2. **商品市场出清：**

$$x_1(P_x, P_y, I_1) + x_2(P_x, P_y, I_2) = X^0 \tag{16}$$

$$y_1(P_x, P_y, I_1) + y_2(P_x, P_y, I_2) = Y^0 \tag{17}$$

   其中 $x_i(\cdot)$ 是马歇尔需求函数。

3 生产可能性边界 (PPF) 的推导

注释 (T.A. Note)

对应笔记 P.2 上半部分。这是本节最难的数学推导，证明了 PPF 的斜率等于边际转换率 (MRT)，且 PPF 是凹向原点的。

3.1 PPF 的优化问题

生产可能性边界描述了在给定资源 $\bar{a}, \bar{b}$ 下，最大化 x 产出时的 y 产出关系。数学表述为：

$$\max_{a_x, b_x} \quad x = f(a_x, b_x) \tag{18}$$

$$\text{s.t.} \quad y = g(\bar{a} - a_x, \bar{b} - b_x) = \bar{y} \quad (\text{固定}y\text{ 产出}) \tag{19}$$

构造拉格朗日函数：

$$\mathcal{L} = f(a_x, b_x) + \lambda[\bar{y} - g(\bar{a} - a_x, \bar{b} - b_x)] \tag{20}$$

3.2 边际转换率 (MRT) 的推导

对 a_x 求导：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_x} = f_a - \lambda g_a(-1) = 0 \implies f_a = \lambda g_a \implies \lambda = \frac{f_a}{g_a} \tag{21}$$

同理对 b_x 求导可得 $\lambda = \frac{f_b}{g_b}$。

我们考察 PPF 的斜率 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。全微分生产函数：

$$\mathrm{d}x = f_a \mathrm{d}a_x + f_b \mathrm{d}b_x \tag{22}$$

$$\mathrm{d}y = g_a \mathrm{d}a_y + g_b \mathrm{d}b_y = g_a(-\mathrm{d}a_x) + g_b(-\mathrm{d}b_x) \tag{23}$$

在最优路径上，要素配置满足 $\frac{f_a}{f_b} = \frac{g_a}{g_b}$。代入整理可得：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{g_a}{f_a} = -\frac{g_b}{f_b} \tag{24}$$

回顾 Section 1 的结论 $\frac{P_x}{P_y} = \frac{g_a}{f_a}$，我们得到：

$$\mathbf{MRT}_{xy} \equiv -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{MC_x}{MC_y} = \frac{P_x}{P_y} \tag{25}$$

3.3 PPF 的凸性 (Concavity)

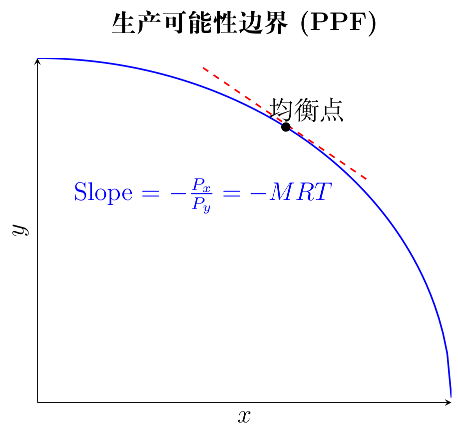
笔记 P.2 中间部分计算了二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{f_1}{g_1}\right) \tag{26}$$

由于边际报酬递减规律 ($f_{11} < 0, g_{11} < 0$)，经过繁琐的运算（笔记中写为 $f_1 \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}y} \ldots$），可以证明：

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} < 0 \tag{27}$$

这证明了 PPF 是**向外凸出（Concave to origin）**的，意味着机会成本递增。



4 帕累托最优的综合条件

注释 (T.A. Note)

对应笔记 P.2 底部。将生产与交换结合。

4.1 交换效率

考虑社会计划者问题：

$$\max_{x_1,y_1} \quad U_1(x_1,y_1) \tag{28}$$

$$\text{s.t.} \quad U_2(x-x_1,y-y_1)=\bar{U}_2 \tag{29}$$

构建拉格朗日函数 $\mathcal{L}=U_1+\lambda(U_2-\bar{U}_2)$，一阶条件导出：

$$\mathbf{MRS}^1_{xy}=\mathbf{MRS}^2_{xy} \tag{30}$$

4.2 总体效率 (Top-Level Condition)

要使生产和消费同时达到最优，必须满足：消费者愿意交换的比率 = 生产者能够转换的比率。

$$\mathbf{MRS}_{xy}=\mathbf{MRT}_{xy}=\frac{P_x}{P_y} \tag{31}$$

注 4.1. 这组方程构成了微观经济学一般均衡的核心：

1. 生产效率：$MRTS_X=MRTS_Y$
2. 交换效率：$MRS_1=MRS_2$
3. 产品组合效率：$MRS=MRT$