

经济与金融研究的数理方法

分析、概率、动态与资产定价

Project Draft

2026 年 6 月 2 日

目录

第一部分 选择、均衡与有限状态递归	1
第一章 数学如何进入经济与金融研究	2
1.1 本章目标	2
1.2 经济问题先于数学工具	2
1.3 数学在经济学中的五个角色	3
1.3.1 表达对象	3
1.3.2 证明存在性	3
1.3.3 判断唯一性、连续性和稳定性	3
1.3.4 解释价格、影子价格和对偶变量	3
1.3.5 把理论变成计算	3
1.4 第一个模型：消费者最优选择	4
1.5 第二个模型：价格支持与分离思想	4
1.6 第三个模型：均衡与不动点	5
1.7 第四个模型：风险、信息与资产价格	5
1.8 第五个模型：动态选择与递归	6
1.9 第六个模型：连续时间与分布动态	7
1.10 本书结构	7
1.10.1 卷一：选择、均衡与有限状态递归	8
1.10.2 卷二：风险、函数空间与连续状态随机动态	8
1.10.3 卷三：连续时间金融与现代宏观金融	8
1.11 如何学习本书	8
1.12 本章小结	8
1.13 Exercises	8
1.14 Solutions	11
1.15 Computation Lab	14

第二章 证明语言、集合、序与对应	15
2.1 为什么从语言开始	15
2.2 命题、证明与反例	15
2.3 集合	15
2.4 映射、像与逆像	16
2.5 二元关系与偏好	17
2.6 序、上界与上确界	18
2.7 对应：多值选择的语言	19
2.8 上半连续和下半连续的直觉	19
2.9 本章小结	20
2.10 Exercises	20
2.11 Solutions	21
2.12 Computation Lab	24
第三章 线性代数、二次型与非负矩阵	25
3.1 为什么经济学需要线性代数	25
3.2 向量：商品、价格、资产与分布	25
3.3 线性映射与矩阵	25
3.4 线性方程组与投入产出	26
3.5 特征值、特征向量与长期行为	27
3.6 二次型、正定性与风险	28
3.7 非负矩阵与 Markov 转移	29
3.8 Perron–Frobenius 思想	30
3.9 本章小结	31
3.10 Exercises	31
3.11 Solutions	33
3.12 Computation Lab	36
第四章 度量、拓扑、连续与紧致	37
4.1 为什么最优选择需要实分析	37
4.2 距离与范数	37
4.3 开球、开集与闭集	38
4.4 序列与收敛	39
4.5 有界性与紧致性	39
4.6 连续性	40

4.7	Weierstrass 最大值定理	40
4.8	消费者最优解存在	41
4.9	假设失败时会怎样	41
4.10	本章小结	42
4.11	Exercises	42
4.12	Solutions	44
4.13	Computation Lab	47
第五章	最大值定理与参数化选择	48
5.1	从最优解存在到最优解如何变化	48
5.2	参数化最优化的三个对象	48
5.3	对应的连续性	49
5.4	闭图像与紧值性	50
5.5	Berge 最大值定理	50
5.6	消费者需求对应	52
5.7	企业供给与利润函数	52
5.8	动态规划中的政策对应	53
5.9	假设失败的反例	53
5.10	本章小结	53
5.11	Exercises	53
5.12	Solutions	55
5.13	Computation Lab	58
第六章	微分、隐函数与包络方法	59
6.1	为什么经济学需要可微方法	59
6.2	偏导数、梯度与全微分	59
6.3	Jacobian 与 Hessian	60
6.4	无约束最优化	61
6.5	约束问题与拉格朗日一阶条件入口	61
6.6	隐函数定理	62
6.7	比较静态	63
6.8	包络定理	64
6.9	经济应用: Shephard 与 Hotelling 的共同结构	64
6.10	本章小结	65
6.11	Exercises	65

6.12 Solutions	67
6.13 Computation Lab	70
第七章 凸集、凸函数与分离定理	72
7.1 为什么凸性是经济学的几何核心	72
7.2 凸集与凸组合	72
7.3 凸锥与价格方向	73
7.4 凸函数与凹函数	74
7.5 可微凸函数的一阶刻画	74
7.6 超平面与支撑	75
7.7 分离定理	76
7.8 价格支持与福利定理的几何	76
7.9 无套利与分离	76
7.10 次梯度	77
7.11 本章小结	77
7.12 Exercises	78
7.13 Solutions	80
7.14 Computation Lab	83
第八章 约束优化、KKT 与对偶	84
8.1 为什么约束优化是经济学的核心	84
8.2 等式约束与拉格朗日乘子	84
8.3 不等式约束与 KKT 条件	85
8.4 约束资格	86
8.5 凸问题中的充分性	87
8.6 消费者问题中的 KKT	88
8.7 企业成本最小化	88
8.8 对偶函数与弱对偶	89
8.9 强对偶与鞍点	90
8.10 资产组合中的约束优化	90
8.11 本章小结	91
8.12 Exercises	91
8.13 Solutions	93
8.14 Computation Lab	96

第九章 格、超模性与单调比较静态	97
9.1 为什么需要单调比较静态	97
9.2 偏序与格	97
9.3 超模函数	98
9.4 Increasing Differences	98
9.5 Topkis 单调性定理	99
9.6 战略互补	100
9.7 投资、进入与政策比较	100
9.8 与可微比较静态的关系	101
9.9 本章小结	101
9.10 Exercises	101
9.11 Solutions	103
9.12 Computation Lab	106
第十章 偏好、效用与需求理论	107
10.1 从选择关系到消费者问题	107
10.2 偏好关系	107
10.3 效用表示	108
10.4 连续性、单调性与凸性	108
10.5 预算集与消费者问题	109
10.6 需求的基本性质	110
10.7 间接效用、支出函数与对偶	111
10.8 可微情形的两个恒等式	112
10.9 与前面章节的连接	113
10.10 本章小结	113
10.11 Exercises	113
10.12 Solutions	115
10.13 Computation Lab	119
10.13.1 有限网格上的需求	119
10.13.2 需求对应的多值性	120
10.13.3 支出最小化	120
10.13.4 Recommended Checks	120
第十一章 生产、成本与利润理论	121
11.1 企业问题的数学形式	121

11.2 生产集与生产函数	121
11.3 规模报酬	122
11.4 利润最大化	122
11.5 利润函数的性质	123
11.6 成本最小化	125
11.7 成本与利润的对偶	125
11.8 常数规模报酬与零利润	126
11.9 本章小结	126
11.10 Exercises	127
11.11 Solutions	128
11.12 Computation Lab	133
11.12.1 网格利润最大化	133
11.12.2 二维成本最小化	133
11.12.3 多值条件要素需求	133
11.12.4 Recommended Checks	133
第十二章 固定点方法	134
12.1 为什么均衡需要固定点	134
12.2 Brouwer 固定点定理	135
12.3 Kakutani 固定点定理	135
12.4 压缩映射	136
12.5 Tarski 固定点定理	138
12.6 四类固定点工具如何选择	138
12.7 经济学中的三个原型	139
12.7.1 一般均衡	139
12.7.2 博弈均衡	139
12.7.3 动态规划	139
12.8 本章小结	139
12.9 Exercises	139
12.10 Solutions	141
12.11 Computation Lab	145
12.11.1 压缩迭代	145
12.11.2 Cobweb 迭代	145
12.11.3 最佳反应迭代	145
12.11.4 有限格单调迭代	145

12.11.5 Recommended Checks	146
第十三章 一般均衡与福利定理	147
13.1 从单个市场到所有市场	147
13.2 价格、预算与需求	148
13.3 超额需求与 Walras 法则	149
13.4 竞争均衡	150
13.5 存在性：固定点的作用	151
13.6 Pareto 改进与 Pareto 有效	151
13.7 第一福利定理	152
13.8 第二福利定理	153
13.9 生产经济的接口	154
13.10 本章小结	154
13.11 Exercises	154
13.12 Solutions	156
13.13 Computation Lab	162
13.13.1 两人两商品交换经济	162
13.13.2 超额需求图像	162
13.13.3 Tâtonnement 迭代	162
13.13.4 Edgeworth Box 可行性检查	163
13.13.5 福利定理数值检查	163
13.13.6 Recommended Checks	163
第十四章 博弈均衡与信息结构初步	164
14.1 为什么一般均衡之后需要博弈	164
14.2 标准式博弈	164
14.3 占优策略与最佳反应	165
14.4 混合策略	166
14.5 Nash 存在定理	167
14.6 连续策略与一阶条件	168
14.7 战略互补与单调均衡	169
14.8 信息结构与 Bayesian 博弈	169
14.9 与动态和金融章节的接口	170
14.10 本章小结	170
14.11 Exercises	170

14.12 Solutions	172
14.13 Computation Lab	177
14.13.1 矩阵博弈最佳反应枚举	177
14.13.2 二乘二混合均衡求解	178
14.13.3 最佳反应动态	178
14.13.4 Cournot 数值迭代	178
14.13.5 Bayesian 收益计算	179
14.13.6 Recommended Checks	179
第十五章 有限状态动态规划与有限状态资产定价	180
15.1 从静态选择到递归选择	180
15.2 有限状态 Markov 链	180
15.3 有限状态动态规划问题	181
15.4 Bellman 算子的压缩性	182
15.5 给定策略的值与策略改进	183
15.6 Euler 方程的有限状态版本	184
15.7 有限状态资产定价	185
15.8 支付矩阵、完备市场与无套利	186
15.9 随机贴现因子与风险中性概率	187
15.10 递归资产定价	188
15.11 卷一小结与通向卷二	188
15.12 Exercises	189
15.13 Solutions	191
15.14 Computation Lab	197
15.14.1 有限 Markov 链模拟	197
15.14.2 值函数迭代	197
15.14.3 策略评价和策略改进	198
15.14.4 状态价格求解	198
15.14.5 递归红利资产定价	198
15.14.6 Recommended Checks	199
第二部分 风险、函数空间与连续状态随机动态	200
第十六章 测度空间与概率空间	201
16.1 为什么有限状态概率不够	201

16.2 样本空间、事件与事件代数	201
16.3 生成事件族与 Borel 集	202
16.4 测度与概率测度	203
16.5 测度的基本性质	204
16.6 可测函数与随机变量	206
16.7 分布与推前测度	206
16.8 乘积空间与独立性的入口	207
16.9 事件代数作为信息	208
16.10 与下一章的连接	208
16.11 本章小结	208
16.12 Exercises	208
16.13 Solutions	210
16.14 Computation Lab	214
第十七章 Lebesgue 积分与收敛定理	216
17.1 从有限求和到一般积分	216
17.2 指示函数与简单函数	216
17.3 非负可测函数的积分	217
17.4 一般实值函数的积分	218
17.5 几乎处处与几乎必然	219
17.6 单调收敛定理	220
17.7 Fatou 引理	221
17.8 控制收敛定理	222
17.9 收敛定理如何选择	223
17.10 本章小结	223
17.11 Exercises	223
17.12 Solutions	225
17.13 Computation Lab	229
第十八章 随机变量、分布与条件期望	230
18.1 从随机变量到信息下的预测	230
18.2 分布与分布函数	230
18.3 离散分布、密度与矩	231
18.4 联合分布与边际分布	232
18.5 独立性	233

18.6 条件概率与 Bayes 公式	234
18.7 给定事件和分割的条件期望	234
18.8 给定事件代数的条件期望	236
18.9 条件期望的基本性质	236
18.10 条件期望与最小二乘预测	238
18.11 本章小结	238
18.12 Exercises	238
18.13 Solutions	240
18.14 Computation Lab	245
第十九章 风险、彩票与随机支配	247
19.1 从随机变量到风险选择	247
19.2 彩票与期望效用	247
19.3 风险厌恶与 Jensen 不等式	248
19.4 确定性等价与风险溢价	249
19.5 Arrow-Pratt 风险厌恶系数	250
19.6 均值保持扩散	251
19.7 一阶随机支配	251
19.8 二阶随机支配	252
19.9 分位数与风险度量的入口	253
19.10 本章小结	253
19.11 Exercises	254
19.12 Solutions	255
19.13 Computation Lab	259
第二十章 度量空间、赋范空间与函数空间	261
20.1 为什么要把函数当作点	261
20.2 度量空间	261
20.3 收敛、Cauchy 列与完备性	262
20.4 范数与赋范空间	263
20.5 函数空间与上确界范数	264
20.6 点态收敛与一致收敛	265
20.7 连续函数空间	266
20.8 序列空间与积分型函数空间	267
20.9 有限维和无限维的关键差别	268

20.10 经济学中的函数空间选择	268
20.11 本章小结	269
20.12 Exercises	269
20.13 Solutions	271
20.14 Computation Lab	276
第二十一章 Banach 与 Hilbert 空间中的经济分析	277
21.1 从函数空间到算子方法	277
21.2 Banach 空间	277
21.3 线性算子与有界性	278
21.4 压缩映射与 Bellman 算子	280
21.5 Hilbert 空间与内积	281
21.6 正交、投影与最小二乘	282
21.7 连续线性泛函与 Riesz 表示	284
21.8 本章小结	284
21.9 Exercises	285
21.10 Solutions	286
21.11 Computation Lab	291
第二十二章 概率测度、弱收敛与分布型状态变量	293
22.1 分布也是状态	293
22.2 概率测度空间	293
22.3 推前测度	294
22.4 弱收敛	295
22.5 实线上的分布函数判据	296
22.6 紧性	297
22.7 分布距离	297
22.8 经验分布	298
22.9 Markov 核与分布演化	299
22.10 分布型状态变量	300
22.11 本章小结	301
22.12 Exercises	301
22.13 Solutions	303
22.14 Computation Lab	307

第二十三章 可测对应、选择与无限商品经济	309
23.1 为什么可测选择会出现	309
23.2 对应、图与选择	309
23.3 可测对应	310
23.4 可测选择	311
23.5 可测最大化	312
23.6 随机可行集与预算对应	313
23.7 无限商品空间	314
23.8 可测配置	315
23.9 无限商品经济中的均衡入口	315
23.10 本章小结	316
23.11 Exercises	316
23.12 Solutions	318
23.13 Computation Lab	321
第二十四章 离散时间过滤、鞅与资产价格过程	323
24.1 信息随时间展开	323
24.2 过滤与随机过程	323
24.3 可预测过程与交易策略	324
24.4 鞅、次鞅和上鞅	324
24.5 鞅差分	325
24.6 停时与停止过程	326
24.7 贴现资产价格过程	327
24.8 随机贴现因子	328
24.9 本章小结	329
24.10 Exercises	329
24.11 Solutions	331
24.12 Computation Lab	335
第二十五章 差分方程、稳定性与经济动态	337
25.1 离散时间动态的基本问题	337
25.2 一阶差分方程与稳态	337
25.3 线性与仿射差分方程	338
25.4 稳定性	340
25.5 线性系统	341

25.6 仿射系统与去稳态化	342
25.7 非线性系统与线性化	342
25.8 相图与鞍路径入口	343
25.9 经济动态中的常见形式	343
25.10 本章小结	344
25.11 Exercises	344
25.12 Solutions	346
25.13 Computation Lab	350
第二十六章 确定性动态规划	351
26.1 从状态转移到最优路径	351
26.2 值函数与 Bellman 方程	352
26.3 Bellman 算子的压缩性	353
26.4 策略评价与策略改进	355
26.5 Euler 方程与包络条件	357
26.6 典型确定性模型	359
26.7 通往随机动态规划	360
26.8 Exercises	360
26.9 Solutions	362
26.10 Computation Lab	366
第二十七章 随机动态规划与 Markov 决策	368
27.1 从确定性转移到随机转移	368
27.2 有限状态 Markov 决策	369
27.3 一般状态空间与 Markov 核	370
27.4 策略值函数	371
27.5 随机 Bellman 算子的压缩性	372
27.6 策略改进与最优策略	373
27.7 随机 Euler 方程	374
27.8 计算与模拟	375
27.9 与后续章节的接口	376
27.10 Exercises	376
27.11 Solutions	378
27.12 Computation Lab	382

第二十八章 递归竞争均衡与异质性主体模型	383
28.1 从单个主体到均衡系统	383
28.2 给定价格下的个体递归问题	384
28.3 分布运动规律	384
28.4 价格、企业和市场清算	386
28.5 平稳递归竞争均衡	387
28.6 转移动态与分布状态	388
28.7 近似总量规律	388
28.8 均衡计算的固定点流程	389
28.9 与资产定价和连续时间模型的接口	390
28.10 Exercises	390
28.11 Solutions	392
28.12 Computation Lab	395
第二十九章 离散时间资产定价	397
29.1 资产定价的最小语言	397
29.2 一价定律与线性定价	398
29.3 有限状态、Arrow 证券与状态价格	398
29.4 随机贴现因子	399
29.5 风险中性概率	400
29.6 动态价格过程与鞅定价	401
29.7 均衡中的随机贴现因子	402
29.8 风险溢价	403
29.9 多期递归定价	403
29.10 卷二总结与卷三入口	404
29.11 Exercises	404
29.12 Solutions	406
29.13 Computation Lab	410
第三部分 连续时间金融与现代宏观金融	412
第三十章 常微分方程与经济增长	413
30.1 从离散时间到连续时间	413
30.2 一阶线性 ODE	414
30.3 稳态与一维相图	415

30.4 线性系统与特征值	416
30.5 非线性系统线性化	417
30.6 Solow 增长模型	418
30.7 Ramsey 相图入口	420
30.8 数值解的入口	421
30.9 通往最优控制	421
30.10 Exercises	422
30.11 Solutions	423
30.12 Computation Lab	427
第三十一章 变分法与最优控制	429
31.1 从给定路径到选择路径	429
31.2 变分与一阶变化	430
31.3 Euler-Lagrange 方程	431
31.4 动态约束与 Hamiltonian	432
31.5 协态变量的经济含义	434
31.6 当前值 Hamiltonian	434
31.7 无限期问题与横截条件	435
31.8 Ramsey 增长模型	436
31.9 充分性: 凹性让一阶条件可靠	438
31.10 与 Bellman 和 HJB 的桥梁	438
31.11 本章小结	439
31.12 Exercises	439
31.13 Solutions	441
31.14 Computation Lab	446
第三十二章 偏微分方程的经济学入口	447
32.1 为什么经济学会遇到 PDE	447
32.2 偏导数、梯度和 Laplacian	447
32.3 初值、边界值和终端值	449
32.4 PDE 的粗分类	449
32.5 一阶运输方程	450
32.6 特征线方法	451
32.7 守恒形式与分布演化	451
32.8 热方程与扩散	452

32.9 Laplace 与 Poisson 方程	453
32.10 确定性 HJB 方程	454
32.11 向随机控制和金融 PDE 的桥	455
32.12 本章小结	456
32.13 Exercises	456
32.14 Solutions	458
32.15 Computation Lab	463
第三十三章 Brownian Motion、随机积分与 Itô 引理	465
33.1 从确定性连续时间到随机连续时间	465
33.2 Brownian motion	466
33.3 过滤、适应性和不可预测性	467
33.4 Brownian 路径和二次变差	468
33.5 Itô 积分	469
33.6 Itô process 和 SDE	470
33.7 Itô 引理	471
33.8 几何 Brownian motion	473
33.9 生成元和 PDE 中的二阶项	474
33.10 本章小结	475
33.11 Exercises	475
33.12 Solutions	476
33.13 Computation Lab	481
第三十四章 随机控制、HJB 与 Feynman-Kac	483
34.1 从 Itô 引理到随机动态规划	483
34.2 生成元	484
34.3 有限期随机控制	485
34.4 无限期平稳 HJB	486
34.5 HJB 验证定理	487
34.6 Feynman-Kac 公式	488
34.7 风险中性定价 PDE	489
34.8 HJB、Feynman-Kac 与经济直觉	490
34.9 本章小结	491
34.10 Exercises	491
34.11 Solutions	492

34.12 Computation Lab	497
第三十五章 无套利、鞅测度与金融基本定理	499
35.1 无套利思想	499
35.2 状态价格	500
35.3 风险中性概率	501
35.4 随机贴现因子	502
35.5 多期贴现鞅定价	503
35.6 完备性和唯一鞅测度	504
35.7 连续时间接口	505
35.8 Girsanov 入口：市场风险价格	505
35.9 金融基本定理的入口版	506
35.10 本章小结	507
35.11 Exercises	507
35.12 Solutions	509
35.13 Computation Lab	513
第三十六章 Black-Scholes、债券与衍生品定价	515
36.1 从鞅测度到定价模型	515
36.2 Black-Scholes PDE	516
36.3 欧式看涨和看跌公式	518
36.4 希腊值与动态复制	520
36.5 债券与短利率定价	521
36.6 常见衍生品关系	524
36.7 模型边界	525
36.8 本章小结	525
36.9 Exercises	525
36.10 Solutions	527
36.11 Computation Lab	533
第三十七章 Merton 消费-投资问题与动态资产定价	535
37.1 从定价到选择	535
37.2 Merton 问题与 HJB	536
37.3 CRRA 偏好与显式策略	538
37.4 无限期 Merton 问题	540

37.5 边际效用与随机贴现因子	542
37.6 连续时间风险溢价	543
37.7 本章小结	544
37.8 Exercises	544
37.9 Solutions	546
37.10 Computation Lab	552
第三十八章 连续时间异质性主体模型	553
38.1 为什么需要分布	553
38.2 个体状态过程和生成元	554
38.3 Kolmogorov forward 方程	555
38.4 离散收入状态	556
38.5 平稳 HJB-KF 系统	557
38.6 聚合与市场清算	558
38.7 借贷约束和边界	559
38.8 有限差分入口	560
38.9 本章小结	561
38.10 Exercises	561
38.11 Solutions	562
38.12 Computation Lab	567
第三十九章 不完全市场、金融摩擦与宏观金融	569
39.1 完全市场基准	569
39.2 不可保险风险与预防性储蓄	570
39.3 借贷约束与 Euler 不等式	571
39.4 连续时间状态约束	573
39.5 抵押约束	573
39.6 外部融资溢价和价格楔子	575
39.7 杠杆放大	575
39.8 嵌入 HJB-KF 系统	576
39.9 本章小结	577
39.10 Exercises	577
39.11 Solutions	579
39.12 Computation Lab	584

第四十章 计算方法：从证明走向求解	586
40.1 为什么最后需要计算	586
40.2 网格、插值与残差	586
40.3 ODE 的时间离散	587
40.4 有限差分：把导数变成矩阵	588
40.5 迎风格式与 HJB	589
40.6 生成元矩阵与 KF 方程	590
40.7 Bellman 迭代与残差界	591
40.8 固定点、二分法与 Newton 步	591
40.9 模拟、Monte Carlo 与抽样误差	592
40.10 HJB-KF 一体化 workflow	593
40.11 资产定价的计算接口	594
40.12 可复现计算的习惯	594
40.13 本章小结	595
40.14 Exercises	595
40.15 Solutions	597
40.16 Computation Lab	601
附录总览	603
附录 A 逻辑、证明方法与集合论补充	604
A.1 用途与正文依赖	604
A.2 命题、量词与经济断言	604
A.3 直接证明、反证法与逆否命题	605
A.4 集合运算与闭包直觉	605
A.5 关系、函数与对应	606
A.6 选择公理的温和用法	606
A.7 附录 A 的待核验阅读路线	606
附录 B 线性代数进阶、谱理论与矩阵分析	607
B.1 用途与正文依赖	607
B.2 谱半径与动态稳定性	607
B.3 非负矩阵与 Perron-Frobenius 直觉	608
B.4 矩阵范数与误差界	608
B.5 投影与最小二乘近似	609

B.6	生成元矩阵的线性代数	609
B.7	附录 B 的待核验阅读路线	610
附录 C	一般拓扑、紧性与局部凸空间	611
C.1	用途与正文依赖	611
C.2	拓扑空间的最小语言	611
C.3	紧性作为存在性机器	611
C.4	乘积拓扑与无限商品	612
C.5	局部凸空间与分离	612
C.6	弱拓扑的经济意义	612
C.7	附录 C 的待核验阅读路线	613
附录 D	测度论技术：Radon–Nikodym、Fubini 与条件期望	614
D.1	用途与正文依赖	614
D.2	绝对连续与密度	614
D.3	Radon–Nikodym 定理的用法	615
D.4	Tonelli 与 Fubini	615
D.5	条件期望的投影直觉	616
D.6	测度变换与等价性	616
D.7	附录 D 的待核验阅读路线	616
附录 E	泛函分析证明补充：Riesz、弱拓扑与 Banach–Alaoglu 接口	617
E.1	用途与正文依赖	617
E.2	连续线性泛函与对偶空间	617
E.3	Hilbert 空间中的 Riesz 表示	618
E.4	弱拓扑与弱收敛	618
E.5	Banach–Alaoglu 的接口	619
E.6	附录 E 的待核验阅读路线	619
附录 F	随机过程与半鞅入口	620
F.1	用途与正文依赖	620
F.2	从鞅到局部鞅	620
F.3	半鞅的分解直觉	620
F.4	随机积分的一般化	621
F.5	二次变差与协变差	621
F.6	为什么初版不展开完整半鞅理论	621

F.7 附录 F 的待核验阅读路线	622
附录 G 高级金融基本定理、viscosity solution 与 Mean Field Games 接口	623
G.1 用途与正文依赖	623
G.2 一般金融基本定理接口	623
G.3 viscosity solution 接口	623
G.4 Mean Field Games 接口	624
G.5 高维计算和机器学习求解器接口	624
G.6 附录 G 的待核验阅读路线	624
附录 H 来源核验、阅读路线、符号表与定理依赖图	625
H.1 用途与正文依赖	625
H.2 来源核验路线	625
H.3 阅读路线	626
H.4 符号统一任务	626
H.5 定理依赖图的第一版结构	626
H.6 全书二轮审查清单	627
H.7 附录 H 的待核验阅读路线	627

前言

本书是一套面向经济与金融研究的数理方法自学教材。它以经济问题组织数学工具，而不是按数学系课程目录机械展开。

当前文件是 LaTeX 工程骨架，正文将在五个样章通过审查后逐步填充。

第一部分

选择、均衡与有限状态递归

第一章 数学如何进入经济与金融研究

1.1 本章目标

本章建立全书的学习契约：我们学习数学，不是为了模仿数学系课程目录，而是为了获得处理经济与金融研究问题的能力。对经济学和金融学而言，数学不是装饰性的形式语言，而是一种工作方式：它帮助我们说清楚对象是什么、结论在什么条件下成立、哪些假设不可省略，以及模型是否能够被计算。

读完本章，你不需要已经掌握后续所有定理；但你应当知道这些定理为什么会出现。本书后面讨论紧致性、凸性、不动点、测度、条件期望、动态规划、鞅、随机微积分和偏微分方程时，都不会把它们当作孤立的数学主题，而是把它们放回经济问题中。

1.2 经济问题先于数学工具

本书的基本路径是：

经济问题 $\longrightarrow$ 数学障碍 $\longrightarrow$ 必要理论 $\longrightarrow$ 定理与证明 $\longrightarrow$ 经济翻译 $\longrightarrow$ 计算实现。

例如，消费者选择问题看起来只是最大化一个效用函数，但只要稍微严格一点，就会出现一连串问题：可行集合是否为空？最优点是否存在？最优点是否唯一？价格和收入变化时，最优选择是否连续变化？这些问题分别对应集合、拓扑、凸性、对应和最大值定理。

资产定价问题也类似。写下

$$p = \mathbb{E}[mX]$$

很容易，但这个公式背后隐藏着状态空间、随机支付、价格泛函、无套利、条件信息和测度变化。没有这些数学结构，公式只是记号；有了这些结构，公式才成为可以证明、可以推广、可以计算的理论。

1.3 数学在经济学中的五个角色

1.3.1 表达对象

经济模型首先要把对象说清楚。偏好不是一句“喜欢更多”，而是集合上的二元关系；需求不总是函数，而常常是一个最优选择对应；资产不是一个价格数字，而是跨状态或跨时间的支付向量；宏观状态不一定是一个实数，也可能是一整个财富分布。

注 1.1. 如果对象没有被精确定义，后面的最优化、均衡、定价和计算都会变成模糊的口头推理。

1.3.2 证明存在性

经济理论经常问：某个对象是否存在？消费者最优解是否存在，竞争均衡是否存在，Nash 均衡是否存在，价值函数是否存在，风险中性测度是否存在。存在性不是技术细节，而是模型有无基本解释力的前提。

1.3.3 判断唯一性、连续性和稳定性

存在多个均衡时，理论预测可能不唯一；政策函数不连续时，小的价格变化可能导致大的行为跳跃；动态系统不稳定时，长期分析可能没有意义。因此，唯一性、连续性和稳定性决定了模型能否用于比较静态、政策分析和数值求解。

1.3.4 解释价格、影子价格和对偶变量

经济学中特别重要的一类数学思想是对偶性。消费者问题中的拉格朗日乘子、企业问题中的边际成本、福利定理中的支持价格、金融市场中的状态价格，本质上都在说明：约束和价格之间存在深刻联系。

1.3.5 把理论变成计算

现代动态经济学和金融经济学很少只靠解析解。即使我们证明价值函数存在，仍然需要计算它；即使我们知道平稳分布存在，仍然需要近似它；即使 HJB 方程刻画最优控制，仍然需要数值方法求解。因此，本书会把定理和计算并列处理。

1.4 第一个模型：消费者最优选择

设消费者面对价格向量 $p \in \mathbb{R}_+^n$ 和财富 $w > 0$ ，消费集合为 $\mathbb{R}_+^n$ ，预算集为

$$B(p, w) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : p \cdot x \leq w\}.$$

若效用函数为 $u : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ ，消费者问题是

$$\max_{x \in B(p, w)} u(x).$$

这条熟悉的式子马上带出三个数学问题。

1. 预算集是否非空？
2. 预算集是否紧致？
3. 效用函数是否连续？

如果预算集非空、紧致，且效用函数连续，那么最大值定理保证最优解存在。这就是实分析进入消费者理论的第一扇门。注意，经济结论不是“消费者一定会选择某个东西”这种心理判断，而是一个条件命题：在特定数学假设下，最优选择集合非空。

例 1.1 (把经济问题翻译成最优化). 一个消费者有财富 $w = 12$ ，两种商品价格为 $p = (2, 3)$ ，效用为 $u(x) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ 。经济语言是“在预算内选择最喜欢的消费束”。数学语言是

$$\max_{x_1, x_2 \geq 0} x_1^{1/2} x_2^{1/2} \quad \text{s.t.} \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 12.$$

由于效用局部非饱和，预算会花完。对称 Cobb-Douglas 偏好把财富各花一半，因此

$$x_1^* = 3, \quad x_2^* = 2.$$

这个例题的重点是翻译流程：先写可行集，再写目标函数，最后用最优化刻画选择。

1.5 第二个模型：价格支持与分离思想

考虑一个可行配置集合 $F \subseteq \mathbb{R}^2$ 。如果某个配置 $x^* \in F$ 位于有效边界上，我们希望找到一个价格向量 $p \neq 0$ ，使得

$$p \cdot x \leq p \cdot x^*, \quad \forall x \in F.$$

这表示价格 p 支持配置 x^* ：在这些价格下，没有其他可行配置比 x^* 更“贵”。

这个命题看起来是经济学中的福利和价格问题，但其数学来源是凸集的支撑超平面。如果 F 不是凸的，价格支持可能失败。这解释了为什么凸性在一般均衡、生产理论和金融无套利中反复出现。

例 1.2 (支持价格的最小几何图像). 设可行集合为

$$F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 + x_2 \leq 1\}.$$

点 $x^* = (1/2, 1/2)$ 位于有效边界上。取价格向量 $p = (1, 1)$, 则对任意 $x \in F$,

$$p \cdot x = x_1 + x_2 \leq 1 = p \cdot x^*.$$

所以 p 支持 x^* 。经济解释是：价格把可行边界变成一条预算线，边界上的点可以被某个价格体系托住。后面福利定理会把这个几何直觉变成正式命题。

1.6 第三个模型：均衡与不动点

在博弈论中，每个参与者根据他人的策略选择最佳反应。若 s 表示策略组合，最佳反应对应为 $B(s)$ 。Nash 均衡可以写成

$$s^* \in B(s^*).$$

这就是一个不动点问题。

一般均衡中也有类似结构。价格决定需求和供给，需求和供给又决定市场是否清算；清算条件反过来限制价格。均衡不是简单解一个方程，而是寻找某个映射或对应的不动点。因此，Brouwer 和 Kakutani 不动点定理会成为经济理论的核心工具。

例 1.3 (市场出清方程). 设某商品需求为 $D(p) = 10 - p$, 供给为 $S(p) = 2p - 2$ 。均衡价格满足

$$D(p) = S(p).$$

代入得 $10 - p = 2p - 2$, 所以 $p^* = 4$, 均衡数量为 $q^* = 6$ 。这里已经出现了均衡的基本形式：价格必须让个体选择聚合后彼此一致。

1.7 第四个模型：风险、信息与资产价格

设未来只有两个状态 $s = 1, 2$ 。某资产的状态支付为 $X = (X_1, X_2)$ 。如果状态价格为 $q = (q_1, q_2)$, 则资产价格为

$$p = q_1 X_1 + q_2 X_2.$$

在更一般的模型中，状态可能无限多，支付 X 是随机变量，价格是某个线性泛函。若存在随机贴现因子 m , 资产价格可以写成

$$p = \mathbb{E}[mX].$$

这条公式预告了本书第二卷的核心主题：测度、积分、条件期望、 L^p 空间和线性泛函。金融理论不是把概率论拿来算均值和方差那么简单；它需要用概率空间描述状态，用条件期望描述信息，用泛函分析描述价格。

例 1.4 (状态价格给资产定价). 若未来有两个状态，状态价格为 $q = (0.4, 0.5)$ ，某资产在两个状态的支付为 $X = (2, 1)$ ，则今天价格为

$$p = q_1 X_1 + q_2 X_2 = 0.4 \cdot 2 + 0.5 \cdot 1 = 1.3.$$

这说明资产不是按平均支付定价，而是按不同状态中的边际价值定价。坏状态中的支付通常更贵，因为它在更需要消费的时候到来。

例 1.5 (随机贴现因子的最小计算). 若资产今天价格为 $q = 0.95$ ，明天无风险支付 1，无套利定价可写成

$$q = \mathbb{E}[m \cdot 1] = \mathbb{E}[m],$$

其中 m 是随机贴现因子。因此此例中 $\mathbb{E}[m] = 0.95$ 。如果另一个资产明天在好、坏状态分别支付 2 和 0.5，价格就是 $q_2 = \mathbb{E}[mX]$ 。金融数学的核心就是理解这个 m 的存在、表示和动态版本。

1.8 第五个模型：动态选择与递归

考虑一个极简的两期储蓄问题。个体今天有资源 a ，选择消费 c 和明天资产 a' ，满足

$$c + a' = a, \quad c \geq 0.$$

若明天价值由函数 $V(a')$ 表示，今天的问题可以写成

$$\max_{0 \leq c \leq a} \{u(c) + \beta V(a - c)\}.$$

无限期问题的递归形式则是

$$V(a) = \max_{0 \leq c \leq a} \{u(c) + \beta V(a - c)\}.$$

这里未知对象不是一个数，而是函数 V 。Bellman 方程把无限期选择问题变成函数空间上的不动点问题。于是，完备度量空间、压缩映射、Blackwell 条件和数值迭代自然进入动态经济学。

例 1.6 (一状态 Bellman 方程). 若每期只有一个状态, 每期可得到收益 1, 折现因子为 $\beta = 0.9$, 则值函数只是一个数 V , 满足

$$V = 1 + 0.9V.$$

解得 $V = 10$ 。这个最小例子已经体现递归思想：今天的价值等于今天收益加折现后的同一个未来价值。

例 1.7 (动态问题中的递归表达). 设一个人每期得到效用 $u(c) = \log c$, 资产状态为 a 。若今天消费 c , 明天资产为 $a' = R(a - c)$ 。递归写法是

$$V(a) = \max_{0 < c \leq a} \{\log c + \beta V(R(a - c))\}.$$

这个式子把“今天选择”和“未来价值”放进同一个方程。后面动态规划章节会说明, 右侧定义了一个算子 T , 而求解 V 就是在求固定点 $V = TV$ 。

1.9 第六个模型：连续时间与分布动态

在连续时间金融中, 资产价格常被建模为随机过程, 例如几何 Brownian motion:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

这里 W_t 是 Brownian motion。为了处理 S_t 的函数 $f(S_t, t)$, 我们需要 Itô 引理; 为了求最优消费投资策略, 我们需要 HJB 方程; 为了从无套利推出风险中性定价, 我们需要鞅测度。

在现代宏观金融中, 状态还可能是一整个财富分布。个体最优行为由 HJB 方程刻画, 分布演化由 Kolmogorov Forward 方程刻画, 市场清算把二者联立。这就是为什么本书第三卷会进入 PDE 和数值方法, 但只进入经济金融真正需要的部分。

例 1.8 (连续时间记号的读法). 式子

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

可以读作：资产价格变化由确定性漂移 $\mu S_t dt$ 和随机冲击 $\sigma S_t dW_t$ 两部分组成。这里的 dW_t 不是普通可微函数的微分, 而是 Brownian motion 的随机增量。因此普通链式法则不再够用, 需要 Itô 引理。

1.10 本书结构

全书分为三卷。

1.10.1 卷一：选择、均衡与有限状态递归

第一卷建立有限维分析、优化、凸性、对应、不动点、一般均衡、博弈和有限状态动态规划的基础。目标是让读者能够严格处理静态选择、价格支持和初步动态模型。

1.10.2 卷二：风险、函数空间与连续状态随机动态

第二卷进入测度概率、条件期望、函数空间、可测选择、离散时间鞅、随机动态规划、递归竞争均衡和离散时间资产定价。目标是为现代宏观、金融和不确定性经济学建立语言。

1.10.3 卷三：连续时间金融与现代宏观金融

第三卷进入 ODE、最优控制、PDE 入门、Brownian motion、Itô 引理、随机控制、鞅测度、Black-Scholes、Merton 问题和连续时间异质性主体模型。目标是连接博士课程和研究前沿。

1.11 如何学习本书

每章都按同一结构组织：

动机 → 定义 → 定理 → 证明 → 反例 → 模型 → 计算 → 习题.

阅读时不要只追求“看懂证明”。更重要的是问：这个假设在经济模型中对应什么？如果去掉它会发生什么？这个定理后面会在哪里再次出现？能不能用一个小程序或图形验证它的直觉？

1.12 本章小结

本章给出了全书路线图。我们看到，经济金融研究中的数学并不是按抽象程度排列的知识清单，而是一组反复服务于选择、价格、均衡、风险、动态和分布的工具。后续章节会把这里出现的关键词逐步变成精确定义、定理、证明、例题、习题和计算实验。

1.13 Exercises

A 类：概念与对象

习题 1.1 (五个关键词). 解释以下术语在经济学中的含义：存在性、唯一性、连续性、稳定性、可计算性。

习题 1.2 (经济对象). 分别说明以下对象更自然地应被建模为数、向量、集合、函数、对应还是概率分布: 消费者财富、消费束、预算集、需求、效用、市场价格、财富分布。

习题 1.3 (函数还是对应). 为什么需求在一般情况下可能是对应而不是函数? 给出一个经济直觉。

习题 1.4 (状态变量). 列举三个经济或金融模型中的状态变量, 并说明它们为什么是状态。

习题 1.5 (本书三卷). 用自己的话说明本书三卷之间的逻辑关系。

B 类: 简单证明与反例

习题 1.6 (有限最优选择). 设 $X = \{a, b, c\}$, 且 $u(a) = 1, u(b) = 3, u(c) = 2$ 。求最优选择集合。

习题 1.7 (多重最优). 设 $X = \{a, b, c\}$, 且 $u(a) = 2, u(b) = 3, u(c) = 3$ 。求最优选择集合, 并说明为什么需求可能多值。

习题 1.8 (没有最大值). 在集合 $X = (0, 1)$ 上令 $u(x) = x$ 。证明不存在最大化点。

习题 1.9 (预算集有界性). 设 $p_i > 0$ 且 $p \cdot x \leq w$ 。证明对每个 i , 都有 $x_i \leq w/p_i$ 。

习题 1.10 (正价格的重要性). 如果某个商品价格为 0, 预算集还一定有界吗? 给出例子。

C 类: 经济模型写法

习题 1.11 (消费者问题). 写出一个两商品消费者效用最大化问题, 并标明选择变量、参数、可行集合和目标函数。

习题 1.12 (企业问题). 写出一个简单企业利润最大化问题, 并标明技术约束和价格参数。

习题 1.13 (博弈均衡). 用“最佳反应”的语言解释为什么 Nash 均衡可以看成不动点。

习题 1.14 (价格支持). 给定集合 $F = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 \leq 2, x_1, x_2 \geq 0\}$ 。找一个价格向量支持点 $(2, 0)$ 。

习题 1.15 (两期储蓄). 写出一个两期消费储蓄问题, 其中今天资源为 a , 储蓄为 a' , 消费为 $c = a - a'$ 。

D 类：风险、动态与金融

习题 1.16 (两状态定价). 设状态价格为 $q = (0.5, 0.25)$, 资产支付为 $X = (2, 6)$. 求资产价格。

习题 1.17 (无风险资产价格). 在上一题状态价格下, 一个无风险资产在两个状态都支付 1. 求其价格和无风险收益率。

习题 1.18 (Markov 分布更新). 设

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad \mu_0 = (1, 0).$$

计算 $\mu_1 = \mu_0 P$ 。

习题 1.19 (Bellman 形式). 把

$$\max_{0 \leq c \leq a} \{\log c + \beta V(a - c)\}$$

解释为当前回报加未来价值。

习题 1.20 (连续时间直觉). 在

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

中, 分别解释 μ 、 σ 、 dt 、 dW_t 的经济含义。

E 类：路线与阅读

习题 1.21 (假设解释). 选择一个本章出现的假设, 例如正价格、连续效用或凸性, 解释它支撑了什么经济结论。

习题 1.22 (工具地图). 把下列工具与经济问题配对: 最大值定理、分离定理、不动点定理、条件期望、压缩映射、Itô 引理。

习题 1.23 (学习计划). 写一段短计划, 说明你打算如何阅读本书: 如何读定义、证明、例题、习题和计算实验。

1.14 Solutions

解答 1.1 (五个关键词). 这题考的是本书反复使用的五类判断。存在性说明模型中的对象确实存在，例如最优解或均衡价格不是空想。唯一性说明结论不依赖多重解选择；若不唯一，理论预测可能需要额外选择规则。连续性说明参数小变化不会造成结论跳跃。稳定性说明动态系统是否回到或接近某个状态。可计算性说明模型能否转化为算法和数值结果。

因此，读后续定理时可以问五个问题：对象存在吗？唯一吗？随参数稳定吗？动态上稳定吗？能算出来吗？

解答 1.2 (经济对象). 这题训练“对象类型”的识别。消费者财富通常是数；消费束是向量；预算集是集合；需求通常是函数或对应；效用是函数；市场价格是向量；财富分布是概率分布或测度。

常见错误是把所有对象都叫作“变量”。例如预算集不是一个变量，而是一组满足预算约束的消费束；需求也不一定是函数，因为最优选择可能不唯一。

解答 1.3 (函数还是对应). 判断标准是：同一个输入是否只有一个输出。若两个不同消费束给消费者相同的最高效用，那么最优选择不唯一。此时同一价格和财富对应多个最优消费束，因此需求更自然地写成对应

$$X(p, w) = \arg \max_{x \in B(p, w)} u(x),$$

而不是单值函数 $x(p, w)$ 。

解答 1.4 (状态变量). 状态变量的作用是概括“走到今天为止对未来仍然有用的信息”。例子包括资本存量、财富、就业状态。它们是状态变量，因为给定这些变量和当前选择，模型可以描述未来演化。

例如储蓄模型中，今天的资产 a 决定可消费资源；选择消费后，剩余资产进入明天。因此 a 是状态变量。

解答 1.5 (本书三卷). 卷一建立有限维选择、优化和均衡的语言，核心是“静态选择和有限状态递归”。卷二加入不确定性、函数空间和离散时间动态，核心是“风险、条件期望、Markov 与递归”。卷三进入连续时间、随机控制、资产定价和分布动态，核心是“Itô、HJB、鞅测度和宏观金融”。

三卷不是并列清单，而是从有限维确定性逐步走向随机动态和连续时间。

解答 1.6 (有限最优选择). 有限集合上可以直接比较所有效用值。因为 $u(b) = 3$ 最大，且其他选项效用更低，最优选择集合为

$$\arg \max u = \{b\}.$$

这是一种单值最优选择。

解答 1.7 (多重最优). $u(b) = u(c) = 3$ 同为最大, 所以最优选择集合为

$$\arg \max u = \{b, c\}.$$

这说明“最大值唯一”和“最大化点唯一”是不同问题。最大效用值是一个数, 但达到它的选择可以有多个; 因此需求可能多值。

解答 1.8 (没有最大值). 对任意 $x \in (0, 1)$, 都可以取 $y = (x + 1)/2$, 则 $y \in (0, 1)$ 且 $u(y) > u(x)$ 。因此没有任何 x 能最大化 u 。

解答 1.9 (预算集有界性). 目标是证明每个坐标都不能无限大。因为 $x_i \geq 0$ 且 $p_i > 0$, 有

$$p_i x_i \leq p \cdot x \leq w.$$

两边除以正数 p_i , 得

$$0 \leq x_i \leq \frac{w}{p_i}.$$

每个坐标都有上界, 所以预算集有界。

解答 1.10 (正价格的重要性). 如果某个商品价格为零, 预算约束无法限制这个商品的数量, 因此预算集不一定有界。例如两商品中 $p = (1, 0)$, 预算约束为

$$x_1 \leq w,$$

但 x_2 可以任意大, 所以预算集无界。这个反例说明 $p_i > 0$ 不是装饰性假设, 而是紧致性证明中控制坐标上界的关键。

解答 1.11 (消费者问题). 例如

$$\max_{x_1, x_2 \geq 0} u(x_1, x_2) \quad \text{s.t.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq w.$$

选择变量为 (x_1, x_2) , 参数为 (p_1, p_2, w) , 可行集合为预算集, 目标函数为效用。

解答 1.12 (企业问题). 例如企业选择产量 y 和投入 l , 生产函数为 $y = f(l)$, 利润为 $py - wl$ 。问题可写为

$$\max_{l \geq 0} \{p f(l) - w l\}.$$

价格参数为 p, w , 技术约束由 f 描述。

解答 1.13 (博弈均衡). 给定其他人的策略, 每个参与者有一组最佳反应。若某个策略组合中的每个策略都是对其他策略的最佳反应, 则该策略组合属于自己的最佳反应对应, 也就是不动点。

解答 1.14 (价格支持). 取 $p = (1, 1)$ 。对任意 $x \in F$, 有 $p \cdot x = x_1 + x_2 \leq 2 = p \cdot (2, 0)$, 所以 p 支持 $(2, 0)$ 。

解答 1.15 (两期储蓄). 可写为

$$\max_{0 \leq a' \leq a} \{u(a - a') + \beta u(Ra')\}.$$

其中 a' 是储蓄或明天资产, $c = a - a'$ 是今天消费, R 是总回报率。

解答 1.16 (两状态定价). 价格为

$$p = 0.5 \times 2 + 0.25 \times 6 = 2.5.$$

解答 1.17 (无风险资产价格). 无风险资产价格为 $0.5 + 0.25 = 0.75$ 。若今天价格为 0.75、未来支付为 1, 总收益率为 $1/0.75 = 4/3$ 。

解答 1.18 (Markov 分布更新).

$$\mu_1 = (1, 0) \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = (0.8, 0.2).$$

解答 1.19 (Bellman 形式). $\log c$ 是当前消费带来的即时效用, $\beta V(a - c)$ 是把剩余资产带入未来后得到的贴现价值。最大化表示在当前消费和未来价值之间权衡。

解答 1.20 (连续时间直觉). μ 是平均增长率或漂移, σ 是波动率, dt 表示短时间长度, dW_t 表示短时间内的随机冲击。

解答 1.21 (假设解释). 例如正价格保证预算集不会沿某个免费商品方向无限延伸, 从而帮助建立有界性; 连续效用保证极限消费束的效用行为良好; 凸性支持平均化和价格支持。

解答 1.22 (工具地图). 最大值定理对应最优选择存在; 分离定理对应价格支持和无套利; 不动点定理对应均衡存在; 条件期望对应信息下的决策和定价; 压缩映射对应 Bellman 方程; Itô 引理对应连续时间随机过程的函数变化。

解答 1.23 (学习计划). 一个合理计划是: 先读经济动机, 再理解定义; 读证明时抓住假设如何使用; 做例题时模仿推导; 做习题时区分计算、证明和模型题; 动态和金融章节要同时运行计算实验。

1.15 Computation Lab

本章只设置轻量计算入口。正式 notebook 从动态规划和资产定价章节开始系统展开。

例 1.9 (Markov 转移的计算入口). 给定二状态转移矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix},$$

可以从任意初始分布出发反复右乘 P , 观察分布是否收敛。这一想法将在后续 Markov 过程和财富分布章节中系统化。

例 1.10 (两状态资产价格的计算入口). 若状态价格为 $q = (0.4, 0.3)$, 资产支付为 $X = (4, 1)$, 则价格为

$$p = qX^\top = 0.4 \times 4 + 0.3 \times 1 = 1.9.$$

这类有限状态计算将在离散时间资产定价章节中推广为矩阵形式。

第二章 证明语言、集合、序与对应

2.1 为什么从语言开始

经济学中的困难常常不是计算，而是对象本身没有说清楚。消费者的“喜欢”需要被写成偏好关系；预算约束需要被写成集合；需求可能不是函数，而是对应；均衡不是一个口号，而是某个条件集合中的元素。

本章建立这些语言。后续章节的最大值定理、Berge 定理、Kakutani 不动点定理、可测选择和动态规划，都依赖本章的对象。

2.2 命题、证明与反例

定义 2.1 (命题). 命题是可以判断真假的数学陈述。

定义 2.2 (证明). 证明是一组逻辑步骤，用来说明一个命题在给定假设下必然成立。

定义 2.3 (反例). 反例是满足某些前提但使结论失败的对象。反例的作用是说明命题不成立，或说明某个假设不可省略。

经济学中，证明的核心价值是告诉我们“结论依赖哪些假设”。例如，最优选择存在并不是无条件成立；它依赖可行集非空、紧致和目标函数连续等假设。反例则告诉我们，一旦某个假设失败，经济结论可能怎样崩塌。

2.3 集合

定义 2.4 (集合). 集合是由对象组成的整体。若对象 x 属于集合 A ，记为 $x \in A$ 。

常用运算包括并集、交集和补集：

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\},$$

$$A^c = \{x : x \notin A\}.$$

在经济学中，集合可以表示消费集合、预算集、技术集合、策略集合、状态空间和可行配置集合。

定义 2.5 (笛卡尔积). 集合 A 与 B 的笛卡尔积为

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

如果 A 是消费者集合， X 是每个消费者的消费集合，那么 X^I 可表示所有消费者消费计划的集合。

例 2.1 (集合运算描述政策目标). 设 A 是收入低于某阈值的人群， B 是拥有住房贷款的人群。则 $A \cap B$ 是同时满足两种条件的人群， $A \cup B$ 是至少满足一种条件的人群， A^c 是收入不低于阈值的人群。经济政策常常先用集合运算明确目标对象，再谈预算、激励或福利影响。

2.4 映射、像与逆像

定义 2.6 (映射). 从集合 X 到集合 Y 的映射 $f : X \rightarrow Y$ 给每个 $x \in X$ 指定唯一的 $f(x) \in Y$ 。

映射强调唯一性：一个输入只有一个输出。效用函数、生产函数、转移函数和价值函数通常是映射。

定义 2.7 (像与逆像). 若 $A \subseteq X$ ，则 A 在 f 下的像为

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}.$$

若 $B \subseteq Y$ ，则 B 在 f 下的逆像为

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

命题 2.1 (逆像保持集合运算). 设 $f : X \rightarrow Y$ ，且 $B, C \subseteq Y$ 。则

$$f^{-1}(B \cup C) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C),$$

$$f^{-1}(B \cap C) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C),$$

$$f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c.$$

证明. 只证明第一式, 其余类似. 对任意 $x \in X$,

$$x \in f^{-1}(B \cup C)$$

当且仅当 $f(x) \in B \cup C$, 当且仅当 $f(x) \in B$ 或 $f(x) \in C$, 当且仅当

$$x \in f^{-1}(B) \quad \text{or} \quad x \in f^{-1}(C).$$

这正是 $x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C)$. □

逆像在分析中很重要, 因为连续性常常通过开集的逆像来定义. 经济学中, 某个参数集合在政策函数下对应怎样的选择区域, 也可用逆像描述.

例 2.2 (像和逆像的区别). 令 $f(x) = x^2$, 定义域为 $\mathbb{R}$. 若 $A = [-2, 1]$, 则

$$f(A) = [0, 4].$$

若 $B = [1, 4]$, 则

$$f^{-1}(B) = [-2, -1] \cup [1, 2].$$

像是把原集合送到函数值空间; 逆像是问哪些原变量会落入目标集合. 后面连续性和闭性证明更常使用逆像.

例 2.3 (逆像帮助表达预算约束). 令 $g(x) = p \cdot x$. 预算集可以写成

$$B(p, w) = g^{-1}((-\infty, w]) \cap \mathbb{R}_+^L.$$

如果 g 连续, 则 $g^{-1}((-\infty, w])$ 是闭集. 这个写法把“预算约束是闭的”转化为连续函数的闭集逆像问题, 是后面证明预算集紧致的基本步骤.

2.5 二元关系与偏好

定义 2.8 (二元关系). 集合 X 上的二元关系 R 是 $X \times X$ 的一个子集. 若 $(x, y) \in R$, 记为 xRy .

偏好关系是经济学中最重要的二元关系之一. 若 $x \succeq y$, 表示消费者认为 x 至少和 y 一样好.

定义 2.9 (完备性与传递性). 偏好关系 $\succeq$ 是完备的, 如果任意 $x, y \in X$, 至少有 $x \succeq y$ 或 $y \succeq x$. 它是传递的, 如果 $x \succeq y$ 且 $y \succeq z$, 则 $x \succeq z$.

完备性让消费者可以比较任意两个选择；传递性排除循环偏好。这些并不是心理学事实，而是经济模型为了构造选择理论所采用的结构假设。

例 2.4 (循环偏好破坏选择). 设 $X = \{a, b, c\}$ ，并规定

$$a \succ b, \quad b \succ c, \quad c \succ a.$$

任意两个对象都能比较，但偏好不传递。若三者都可行，就没有稳定的最好选择：选 a 时 c 更好，选 c 时 b 更好，选 b 时 a 更好。这说明传递性是理性选择模型的结构支柱。

例 2.5 (由偏好生成严格偏好和无差异). 设效用 $u(x) = x_1 + x_2$ ，定义 $x \succ y$ 当且仅当 $u(x) > u(y)$ 。取 $x = (2, 1)$ 、 $y = (1, 2)$ 、 $z = (0, 2)$ 。有

$$u(x) = 3, \quad u(y) = 3, \quad u(z) = 2.$$

所以 $x \sim y$ ，且 $x \succ z$ 、 $y \succ z$ 。这个例子说明弱偏好是基础对象，严格偏好和无差异都可以从弱偏好推出。

2.6 序、上界与上确界

定义 2.10 (偏序). 集合 X 上的关系 $\leq$ 是偏序，如果它满足自反性、反对称性和传递性。

定义 2.11 (全序). 偏序 $\leq$ 是全序，如果任意 $x, y \in X$ 都可比较，即 $x \leq y$ 或 $y \leq x$ 。

实数上的通常大小关系是全序；向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上的逐坐标大小关系通常只是偏序。经济学中，多商品消费束、风险分布和政策向量经常只有偏序而没有全序。

定义 2.12 (上界与上确界). 设 $A \subseteq X$ ，且 X 有序。若对所有 $a \in A$ ，都有 $a \leq u$ ，则 u 是 A 的上界。若 s 是上界，且对任意上界 u 都有 $s \leq u$ ，则 s 是 A 的上确界，记为 $\sup A$ 。

上确界不一定属于原集合。这个区别会在最大值定理中变得重要：有上确界不代表最大值存在。

例 2.6 (上确界不是最大值). 集合 $A = (0, 1)$ 的上确界是 1，因为所有 $a \in A$ 都满足 $a \leq 1$ ，且任何小于 1 的数都不是上界。但 $1 \notin A$ ，所以 A 没有最大元。最大值定理要用紧致性，正是为了避免最优点只存在于可行集外的极限边界上。

例 2.7 (检验一个关系是否为偏序). 在 $\mathbb{R}^2$ 上定义 $x \leq y$ 当且仅当 $x_1 \leq y_1$ 且 $x_2 \leq y_2$ 。自反性、反对称性和传递性都逐坐标成立，因此这是偏序。

但它不是全序。例如 $(1, 3)$ 和 $(2, 2)$ 不能比较。经济含义是：多维消费束可能一个商品更多、另一个商品更少，序关系未必自动给出完整排序。

2.7 对应：多值选择的语言

定义 2.13 (对应). 从 X 到 Y 的对应 $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ 给每个 $x \in X$ 指定一个子集 $\Gamma(x) \subseteq Y$ 。

函数是特殊的对应：每个输入只对应一个输出。经济学中大量对象天然是对应：

价格和财富 $\mapsto$ 最优需求集合,

策略组合 $\mapsto$ 最佳反应集合,

状态 $\mapsto$ 可行动作集合.

定义 2.14 (图像). 对应 $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ 的图像为

$$\text{Gr}(\Gamma) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in \Gamma(x)\}.$$

图像把多值对象重新变成一个集合。后续的闭图像、上半连续和固定点定理都会使用这个视角。

例 2.8 (对应不是函数). 令 $\Gamma(p)$ 表示价格 p 下消费者的最优需求。若两种商品完全替代，且每元钱效用相同，则预算线上所有点都最优。例如 $p = (1, 1)$ 、 $w = 1$ 、 $u(x) = x_1 + x_2$ ，则

$$\Gamma(p) = \{(x_1, x_2) \geq 0 : x_1 + x_2 = 1\}.$$

同一个价格对应无穷多个最优消费束，所以 Γ 是对应而不是函数。

例 2.9 (图像把对应变成集合). 令 $\Gamma(x) = [0, x]$ ，定义在 $x \in [0, 1]$ 上。它的图像为

$$\text{Gr}(\Gamma) = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x \leq 1\}.$$

这个集合是平面中的三角形。闭图像、上半连续和 Kakutani 定理都会通过这种把多值对象看成集合的方式工作。

2.8 上半连续和下半连续的直觉

对应的连续性比函数复杂。直观地说，上半连续要求参数轻微变化时，选择集合不会突然冒出远处的新点；下半连续要求原来可行或最优的点附近仍然能找到相近选择。

在消费者理论中，需求对应的上半连续意味着价格和财富小幅变化不会产生完全跳跃的新需求。动态规划中，政策对应的连续性关系到数值算法是否稳定。

本章只给直觉，正式定义和定理将在最大值定理章节展开。

2.9 本章小结

本章建立了全书语言层：集合描述可行性，映射描述唯一规则，关系描述偏好和排序，对应描述多值选择，图像把对应转化为集合。后续章节会在这些语言之上发展拓扑、连续性、紧致性、最大值定理和不动点方法。

2.10 Exercises

A 类：集合与映射

习题 2.1. 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ 。求 $A \cup B$ 、 $A \cap B$ 和 $A \setminus B$ 。

习题 2.2. 设 $X = \{a, b\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 。列出 $X \times Y$ 。

习题 2.3. 设 $f(x) = 2x + 1$ 。求集合 $[3, 7]$ 的逆像。

习题 2.4. 设 $f(x) = x^2$ 。求 $\{1, 4\}$ 的逆像。

习题 2.5. 证明 $f^{-1}(B \cap C) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C)$ 。

B 类：关系与序

习题 2.6. 给出一个完备但不传递的关系。

习题 2.7. 给出一个传递但不完备的关系。

习题 2.8. 证明实数上的通常大小关系是全序。

习题 2.9. 证明 $\mathbb{R}^2$ 上逐坐标序是偏序。

习题 2.10. 在逐坐标序下，判断 $(1, 2)$ 和 $(2, 1)$ 是否可比较。

习题 2.11. 求集合 $A = (0, 1)$ 在 $\mathbb{R}$ 中的上确界和下确界。

C 类：经济对象

习题 2.12. 把两商品预算集写成集合形式。

习题 2.13. 把“消费束 x 至少和 y 一样好”写成二元关系形式。

习题 2.14. 给出一个效用函数，它表示“只关心两商品总量”的偏好。

习题 2.15. 给出一个例子说明需求可能是多值的。

习题 2.16. 解释为什么策略集合是博弈论中的基本集合对象。

D 类：对应

习题 2.17. 设 $\Gamma(x) = \{x, -x\}$, 定义域为 $\mathbb{R}$. 写出 $\Gamma(2)$ 和 $\Gamma(0)$.

习题 2.18. 设 $\Gamma(x) = [0, x]$, 定义域为 $[0, 1]$. 写出其图像.

习题 2.19. 说明函数 $f: X \rightarrow Y$ 如何被看成一个特殊对应.

习题 2.20. 设最佳反应对应 $B(A) = \{A, B\}$, $B(B) = \{B\}$. 找出所有满足 $s \in B(s)$ 的策略.

习题 2.21. 用一句话解释为什么 Kakutani 不动点定理需要对应而不只是函数.

E 类：综合

习题 2.22. 解释“有上确界”与“有最大值”的区别, 并说明它为什么对最优选择重要.

习题 2.23. 用集合、函数、关系和对应分别描述一个消费者问题.

习题 2.24. 为什么上半连续的直觉适合描述需求对应的稳定性?

习题 2.25. 本章哪些概念将在最大值定理中再次出现?

习题 2.26. 本章哪些概念将在博弈均衡存在性中再次出现?

2.11 Solutions

本章题解的阅读重点是：每一步都回到定义。集合题用集合运算定义，关系题用自反性、反对称性、传递性、完备性，逆像题用“先让函数值落入目标集合”的方法。

解答 2.1. 并集收集出现在任一集合中的元素，交集收集同时出现在两个集合中的元素，差集收集在 A 中但不在 B 中的元素。因此

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, \quad A \cap B = \{3\}, \quad A \setminus B = \{1, 2\}.$$

解答 2.2. 笛卡尔积要求把 X 中每个元素与 Y 中每个元素配对。因此

$$X \times Y = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.$$

如果 $|X| = 2$ 、 $|Y| = 3$ ，那么笛卡尔积有 $2 \times 3 = 6$ 个元素。

解答 2.3. 逆像的定义是：找出所有使函数值落入目标集合的 x 。这里要求

$$2x + 1 \in [3, 7],$$

也就是

$$3 \leq 2x + 1 \leq 7.$$

两边同时减 1 再除以 2，得 $1 \leq x \leq 3$ 。所以逆像为 $[1, 3]$ 。

解答 2.4. $x^2 = 1$ 或 $x^2 = 4$ ，所以逆像为 $\{-2, -1, 1, 2\}$ 。

解答 2.5. 证明集合相等，通常证明任意元素属于左边当且仅当属于右边。对任意 x ，

$$x \in f^{-1}(B \cap C)$$

当且仅当 $f(x) \in B \cap C$ ，当且仅当 $f(x) \in B$ 且 $f(x) \in C$ ，当且仅当

$$x \in f^{-1}(B) \quad \text{且} \quad x \in f^{-1}(C).$$

这正是 $x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C)$ 。

解答 2.6. 令 $X = \{a, b, c\}$ ，关系满足 $a \succeq b$ 、 $b \succeq c$ 、 $c \succeq a$ ，并补充每个元素与自身可比。这可以是完备的，但若严格循环存在，则传递性失败。

解答 2.7. 集合包含关系 $\subseteq$ 是传递的，但在幂集上不完备。例如 $\{1\}$ 与 $\{2\}$ 互不包含。

解答 2.8. 实数大小关系满足自反性、反对称性、传递性，且任意两个实数都可比较，因此是全序。

解答 2.9. 要证明是偏序，需要逐条检查三个性质。自反性：每个坐标都有 $x_i \leq x_i$ ，所以 $x \leq x$ 。反对称性：若 $x \leq y$ 且 $y \leq x$ ，则每个坐标同时满足 $x_i \leq y_i$ 和 $y_i \leq x_i$ ，故 $x_i = y_i$ ，所以 $x = y$ 。传递性：若 $x \leq y$ 且 $y \leq z$ ，则逐坐标有 $x_i \leq y_i \leq z_i$ ，所以 $x \leq z$ 。因此逐坐标序是偏序。

解答 2.10. 不可比较，因为第一坐标 $1 < 2$ ，但第二坐标 $2 > 1$ 。

解答 2.11. 集合 $A = (0, 1)$ 的所有元素都小于等于 1，且任何小于 1 的数都不是上界，所以

$$\sup A = 1.$$

同理，所有元素都大于等于 0，且任何大于 0 的数都不是下界，所以

$$\inf A = 0.$$

但 $0, 1 \notin A$ 。这说明上确界和下确界不一定属于集合；最大值和最小值则必须属于集合。

解答 2.12.

$$B(p, w) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq w\}.$$

解答 2.13. 写作 $x \succeq y$, 其中 $\succeq \subseteq X \times X$ 是消费集合上的二元关系。

解答 2.14. 可取 $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ 。

解答 2.15. 若 $X = \{a, b\}$, 且 $u(a) = u(b) = 1$, 则两个选择都是最优的, 需求集合为 $\{a, b\}$ 。

解答 2.16. 策略集合列出参与者可选择的行动。收益函数和最佳反应都定义在策略集合或其笛卡尔积上。

解答 2.17. $\Gamma(2) = \{2, -2\}$, $\Gamma(0) = \{0\}$ 。

解答 2.18.

$$\text{Gr}(\Gamma) = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}.$$

解答 2.19. 函数 f 可被看成对应 $\Gamma_f(x) = \{f(x)\}$, 即每个输入对应一个单元元素集合。

解答 2.20. $A \in B(A)$, 且 $B \in B(B)$, 所以 A 和 B 都满足 $s \in B(s)$ 。

解答 2.21. 因为很多经济问题中的最佳反应或最优选择可能多值, 均衡条件自然是 $x \in \Gamma(x)$, 而不是 $x = f(x)$ 。

解答 2.22. 上确界是最小上界, 不一定属于集合; 最大值必须属于集合。最优选择需要最大值, 而不仅是上确界。

解答 2.23. 集合: 消费集和预算集; 函数: 效用函数; 关系: 偏好关系; 对应: 需求对应。

解答 2.24. 上半连续排除参数小变化后选择集合突然出现远处新点。这正对应需求对价格和财富扰动的稳定性要求。

解答 2.25. 集合、映射、逆像、对应、图像、上确界和最大值区别都会在最大值定理中再次出现。

解答 2.26. 策略集合、最佳反应对应、图像、闭性和不动点思想会在博弈均衡存在性中再次出现。

2.12 Computation Lab

本章的计算只用于帮助理解有限集合、函数和对应。

例 2.10 (有限对应的表格表示). 有限对应可以用表格或字典表示。例如最佳反应对应

$$B(A) = \{A, B\}, \quad B(B) = \{B\}$$

可以被记录为:

$$\{A : \{A, B\}, B : \{B\}\}.$$

检查不动点就是检查哪些 s 满足 $s \in B(s)$ 。

例 2.11 (有限需求对应). 若有限选择集为 $X = \{a, b, c\}$, 效用为

$$u(a) = 1, \quad u(b) = 2, \quad u(c) = 2,$$

则最大效用为 2, 需求对应返回集合 $\{b, c\}$ 。这个过程可以通过枚举完成。

第三章 线性代数、二次型与非负矩阵

3.1 为什么经济学需要线性代数

线性代数在经济与金融研究中不是一门孤立的计算课。它是一种表达多维对象和线性作用的语言。消费束是向量，价格是向量，资产支付是跨状态向量，投入产出关系是矩阵，Markov 转移是矩阵，协方差矩阵刻画风险，线性化系统的特征值决定局部稳定性。

本章的目标不是重新讲完整线性代数，而是把线性代数中最常用于经济研究的部分组织为四类问题：

向量表示 $\rightarrow$ 矩阵映射 $\rightarrow$ 二次型与曲率 $\rightarrow$ 非负矩阵与动态.

3.2 向量：商品、价格、资产与分布

在 n 商品经济中，消费束写成 $x \in \mathbb{R}_+^n$ ，价格写成 $p \in \mathbb{R}_+^n$ ，支出为内积

$$p \cdot x = \sum_{i=1}^n p_i x_i.$$

在有限状态金融模型中，资产支付也可写成向量 $X \in \mathbb{R}^S$ ，其中 X_s 是状态 s 下的支付。

概率分布同样可以是向量。若有 S 个状态，分布 μ 可写为行向量

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_S), \quad \mu_s \geq 0, \quad \sum_{s=1}^S \mu_s = 1.$$

这使得状态转移、资产支付和期望都可以用矩阵和内积表达。

3.3 线性映射与矩阵

定义 3.1 (线性映射). 设 V, W 是向量空间。映射 $T : V \rightarrow W$ 是线性的，如果对任意 $x, y \in V$ 和标量 α, β ，都有

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

矩阵是有限维线性映射的坐标表示。如果 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 则 $x \mapsto Ax$ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性映射。

命题 3.1 (线性映射由基决定). 设 $e_1, \dots, e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基。若线性映射 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 已知 $T(e_i)$ 对所有 i 的取值, 则 $T(x)$ 对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 都被唯一决定。

证明. 任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 可写为

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

由线性性,

$$T(x) = T\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i T(e_i).$$

因此只要知道所有 $T(e_i)$, 就知道任意 x 的像。 □

经济含义是: 如果一个线性生产或支付系统对每个基本投入、基本资产或基本状态的作用已知, 那么对任意组合的作用也被确定。

3.4 线性方程组与投入产出

Leontief 投入产出模型的基本形式为

$$x = Ax + d,$$

其中 x 是总产出向量, A 是投入系数矩阵, d 是最终需求。若 $I - A$ 可逆, 则

$$x = (I - A)^{-1}d.$$

这里 $(I - A)^{-1}$ 被称为 Leontief inverse。它把最终需求转化为总产出需求。关键问题是: 逆矩阵是否存在? 逆矩阵是否非负? 需求增加是否导致总产出增加? 这些问题自然引出谱半径和非负矩阵。

例 3.1 (用线性方程求均衡数量). 设两个市场的逆需求关系给出线性系统

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

第一式给出 $q_2 = 5 - 2q_1$ 。代入第二式得 $q_1 + 3(5 - 2q_1) = 6$, 所以 $q_1 = 9/5$, $q_2 = 7/5$ 。线性代数在这里同时处理多个市场的相互影响。

例 3.2 (Leontief 逆矩阵). 投入产出模型中, 总产出满足 $x = Ax + d$ 。若

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix},$$

则 $x = (I - A)^{-1}d$ 。这里

$$I - A = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 \\ -0.3 & 0.8 \end{pmatrix},$$

行列式为 $0.61 > 0$, 所以可逆。这个逆矩阵把最终需求冲击转化为总产出需求。

3.5 特征值、特征向量与长期行为

定义 3.2 (特征值与特征向量). 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。若存在非零向量 $v \neq 0$ 和标量 λ , 使得

$$Av = \lambda v,$$

则 λ 是 A 的特征值, v 是对应特征向量。

特征向量表示在线性作用下方向不变的向量, 特征值表示该方向上的缩放比例。在线性动态系统

$$x_{t+1} = Ax_t$$

中, 特征值决定不同方向上的增长、衰减或震荡。

定义 3.3 (谱半径). 矩阵 A 的谱半径为

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ is an eigenvalue of } A\}.$$

若 $\rho(A) < 1$, 则线性系统 $x_{t+1} = Ax_t$ 通常具有收敛到零的倾向。这个思想将在差分方程、动态规划和局部稳定性分析中反复出现。

例 3.3 (特征值判断动态稳定). 设

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

特征值为 0.5 和 0.8, 所以谱半径为 $0.8 < 1$ 。动态系统 $x_{t+1} = Ax_t$ 中, 每个坐标都会逐期衰减到 0。若把第二个特征值改成 1.2, 则第二个方向会放大, 系统不再收敛到 0。

3.6 二次型、正定性与风险

定义 3.4 (二次型). 给定对称矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 表达式

$$x^\top Q x$$

称为由 Q 生成的二次型。

定义 3.5 (正定与半正定). 对称矩阵 Q 是半正定的, 如果对所有 $x \in \mathbb{R}^n$, 有 $x^\top Q x \geq 0$. 若对所有非零 $x \neq 0$, 有 $x^\top Q x > 0$, 则 Q 是正定的。

二次型在经济学中有三类核心用途。第一, 它刻画二阶条件和凸性; 第二, 它刻画投资组合方差

$$\text{Var}(r_p) = w^\top \Sigma w;$$

第三, 它在线性二次控制和近似动态模型中出现。

例 3.4 (投资组合方差). 两项资产权重为 $w = (w_1, w_2)$, 协方差矩阵为

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.01 \\ 0.01 & 0.09 \end{pmatrix}.$$

组合方差为 $w^\top \Sigma w$ 。若 $w = (1/2, 1/2)$, 则

$$w^\top \Sigma w = 0.25(0.04) + 2(0.25)(0.01) + 0.25(0.09) = 0.0375.$$

二次型在金融中直接表示风险。

命题 3.2 (正定矩阵与严格凸二次型). 若 Q 是对称正定矩阵, 则函数

$$f(x) = \frac{1}{2} x^\top Q x$$

是严格凸函数。

证明. 对任意 $x \neq y$ 和 $\theta \in (0, 1)$, 令 $z = x - y$ 。直接展开可得

$$\theta f(x) + (1 - \theta)f(y) - f(\theta x + (1 - \theta)y) = \frac{1}{2} \theta(1 - \theta) z^\top Q z.$$

因为 Q 正定且 $z \neq 0$, 右侧严格大于 0。因此 f 严格凸。 □

例 3.5 (二次型判断凹性). 考虑利润函数中的二次项

$$-x_1^2 - 2x_2^2 - x_1x_2.$$

对应 Hessian 为

$$H = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

判断凹性等价于判断 $-H$ 正定。因为

$$-H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

其首要主子式为 $2 > 0$, 行列式为 $7 > 0$, 所以 $-H$ 正定, H 负定。该二次函数严格凹, 因此一阶条件给出的临界点是唯一最大点。

3.7 非负矩阵与 Markov 转移

定义 3.6 (非负矩阵). 若矩阵 A 的所有元素都非负, 记为 $A \geq 0$ 。

非负矩阵在经济中非常常见: 投入系数不能为负, 状态转移概率不能为负, 人口或财富分布的转移也不能产生负质量。

定义 3.7 (行随机矩阵). 矩阵 $P \in \mathbb{R}^{S \times S}$ 是行随机矩阵, 如果 $P_{ij} \geq 0$, 且每一行元素和为 1。

若 μ_t 是状态分布行向量, 转移矩阵为 P , 则下一期分布为

$$\mu_{t+1} = \mu_t P.$$

例 3.6 (Markov 分布更新). 设

$$\mu_0 = (1, 0), \quad P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

则

$$\mu_1 = \mu_0 P = (0.7, 0.3).$$

再更新一次:

$$\mu_2 = (0.7, 0.3)P = (0.55, 0.45).$$

矩阵乘法把个体状态转移概率转化为总体分布演化。

命题 3.3 (行随机矩阵保持概率分布). 若 μ 是概率分布行向量, P 是行随机矩阵, 则 μP 仍是概率分布行向量。

证明. 非负性显然成立, 因为 $\mu_i \geq 0$ 且 $P_{ij} \geq 0$ 。再看元素和:

$$\sum_j (\mu P)_j = \sum_j \sum_i \mu_i P_{ij} = \sum_i \mu_i \sum_j P_{ij} = \sum_i \mu_i = 1.$$

因此 μP 是概率分布。 □

例 3.7 (两状态 Markov 链的平稳分布). 设

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

令平稳分布为 $\pi = (\pi_1, \pi_2)$, 满足 $\pi = \pi P$ 和 $\pi_1 + \pi_2 = 1$ 。第一列方程给出

$$\pi_1 = 0.9\pi_1 + 0.4\pi_2,$$

所以 $0.1\pi_1 = 0.4\pi_2$, 即 $\pi_1 = 4\pi_2$ 。结合总和为 1, 得

$$\pi = (4/5, 1/5).$$

3.8 Perron–Frobenius 思想

Perron–Frobenius 理论研究非负矩阵的主特征值和正特征向量。其完整形式较深, 但经济学中的直觉很清楚: 如果系统中各部门、状态或类型之间存在非负连接, 那么长期规模、稳定分布或平衡增长路径通常与某个特殊的非负特征向量有关。

例如, Markov 链的平稳分布 π 满足

$$\pi = \pi P.$$

这说明 π 是转移算子的特征向量, 对应特征值为 1。投入产出模型中的总产出乘数、人口模型中的稳定年龄结构, 也有类似结构。

例 3.8 (非负矩阵的长期结构). 人口模型中, x_t 表示各年龄组人口, 非负矩阵 A 描述出生和年龄转移:

$$x_{t+1} = Ax_t.$$

若长期增长率为 λ , 稳定年龄结构为 $v \geq 0$, 则

$$Av = \lambda v.$$

Perron–Frobenius 思想告诉我们, 在适当连通和正性条件下, 主特征值和非负特征向量刻画长期增长路径。

3.9 本章小结

本章把线性代数解释为经济算子语言。向量描述多商品、多资产和多状态对象；矩阵描述投入、转移和线性动态；特征值描述长期行为；二次型描述曲率和风险；非负矩阵描述投入产出和概率转移。后续章节会继续使用这些工具，尤其是在动态规划、资产定价、Markov 过程和数值方法中。

3.10 Exercises

A 类：向量与矩阵计算

习题 3.1. 计算 $p = (1, 2, 3)$ 与 $x = (4, 5, 6)$ 的内积。

习题 3.2. 设资产收益 $r = (0.02, 0.06, 0.10)$ ，权重 $w = (0.2, 0.5, 0.3)$ 。求组合收益。

习题 3.3. 计算

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

习题 3.4. 判断矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是否可逆。

习题 3.5. 求对角矩阵 $\text{diag}(2, 5)$ 的特征值。

B 类：线性映射与方程

习题 3.6. 证明零映射 $T(x) = 0$ 是线性映射。

习题 3.7. 判断 $T(x) = x + b$ 是否线性，其中 $b \neq 0$ 。

习题 3.8. 解线性方程组

$$x_1 + x_2 = 3, \quad x_1 - x_2 = 1.$$

习题 3.9. 设 $x = Ax + d$ 。若 $I - A$ 可逆，求 x 。

习题 3.10. 解释 Leontief 模型中矩阵 A 的经济含义。

C 类：特征值与稳定性

习题 3.11. 求

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

的谱半径。

习题 3.12. 系统 $x_{t+1} = 0.7x_t$ 是否收敛到 0?

习题 3.13. 系统 $x_{t+1} = 1.2x_t$ 是否稳定?

习题 3.14. 解释为什么特征值大于 1 的方向会导致线性系统发散。

习题 3.15. 若 $Av = \lambda v$, 求 A^2v 。

D 类：二次型与风险

习题 3.16. 计算 $x^\top Qx$, 其中 $x = (1, 2)^\top$,

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

习题 3.17. 判断 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是否正定。

习题 3.18. 判断 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是否正定, 是否半正定。

习题 3.19. 设组合权重 $w = (0.5, 0.5)^\top$, 协方差矩阵

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{pmatrix}.$$

求组合方差。

习题 3.20. 解释为什么协方差矩阵应当是半正定的。

E 类：非负矩阵与 Markov 转移

习题 3.21. 判断

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

是否为行随机矩阵。

习题 3.22. 若 $\mu = (0.2, 0.8)$, 计算 μP , 其中 P 如上一题。

习题 3.23. 证明 μP 的元素和为 1, 其中 μ 是概率分布, P 是行随机矩阵。

习题 3.24. 解释平稳分布方程 $\pi = \pi P$ 的经济含义。

习题 3.25. 为什么非负矩阵适合描述投入产出关系?

F 类: 综合

习题 3.26. 把消费束、价格、资产支付、状态分布分别解释为向量。

习题 3.27. 说明二次型为什么会同时出现在优化二阶条件和金融风险度量中。

习题 3.28. 说明谱半径、Markov 转移和平稳分布之间的联系。

习题 3.29. 本章哪些内容会在动态规划中再次出现?

习题 3.30. 本章哪些内容会在资产定价中再次出现?

3.11 Solutions

本章题解的核心是把经济语言翻译成矩阵语言。线性方程题先写成 $Ax = b$, 二次型题检查 $x^T Q x$, Markov 题检查非负性和行和为 1。

解答 3.1. 这是内积计算。把对应坐标相乘再相加:

$$(1, 2, 3) \cdot (4, 5, 6) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32.$$

经济上, 若第一个向量是价格、第二个向量是消费束, 这个内积就是总支出。

解答 3.2. 这是期望收益的向量写法。概率向量与状态收益向量做内积:

$$0.2 \cdot 0.02 + 0.5 \cdot 0.06 + 0.3 \cdot 0.10 = 0.004 + 0.03 + 0.03 = 0.064.$$

所以期望收益率为 6.4%。

解答 3.3. 按矩阵乘法, 第一行与列向量内积给第一项, 第二行与列向量内积给第二项:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

解答 3.4. 判断 2×2 矩阵是否可逆，最直接的方法是看行列式。若行列式为 0，两行或两列线性相关，矩阵秩小于 2，因此不可逆。

经济解释是：若矩阵不可逆，线性系统可能没有唯一解；例如投入产出系统中，总产出可能无法由最终需求唯一确定。

解答 3.5. 若矩阵是对角矩阵或上三角矩阵，特征值就是对角线元素。因此特征值为 2 和 5。若按定义验证，可解

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

得到 $(2 - \lambda)(5 - \lambda) = 0$ 。

解答 3.6. 对任意 α, β , $T(\alpha x + \beta y) = 0 = \alpha 0 + \beta 0 = \alpha T(x) + \beta T(y)$, 所以线性。

解答 3.7. 不是。因为 $T(0) = b \neq 0$, 而线性映射必须满足 $T(0) = 0$ 。

解答 3.8. 线性方程组的思路是消元。若两式相加得

$$2x_1 = 4,$$

则 $x_1 = 2$ 。再把 $x_1 = 2$ 代回任意一个原方程，可得 $x_2 = 1$ 。所以解为

$$(x_1, x_2) = (2, 1).$$

解答 3.9. 从投入产出恒等式开始：

$$x = Ax + d.$$

把 Ax 移到左边：

$$(I - A)x = d.$$

若 $I - A$ 可逆，则

$$x = (I - A)^{-1}d.$$

这里 $(I - A)^{-1}$ 把最终需求 d 转换成总产出 x 。

解答 3.10. A_{ij} 通常表示生产一单位部门 j 产品需要多少部门 i 的投入。它描述部门之间的投入依赖。

解答 3.11. 谱半径是所有特征值绝对值的最大值。若特征值为 0.5 和 0.8，则

$$\rho(A) = \max\{|0.5|, |0.8|\} = 0.8.$$

动态系统中，谱半径小于 1 通常意味着线性迭代有收敛倾向。

解答 3.12. 由递推式可得

$$x_t = 0.7^t x_0.$$

因为 $|0.7| < 1$, 所以 $0.7^t \rightarrow 0$ 。因此对任意初值 x_0 , 都有 $x_t \rightarrow 0$ 。这是一维线性系统稳定的最简单例子。

解答 3.13. 不稳定。递推解为

$$x_t = 1.2^t x_0.$$

若 $x_0 \neq 0$, 由于 $1.2^t \rightarrow \infty$, 偏离会被不断放大。这个例子说明特征值绝对值大于 1 的方向会造成发散。

解答 3.14. 沿特征向量方向, 系统每期乘以 λ 。若 $|\lambda| > 1$, 该方向上的偏离会被放大。

解答 3.15.

$$A^2 v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda^2 v.$$

解答 3.16. 代入二次型公式。若 $Q = \text{diag}(2, 3)$ 、 $x = (1, 2)$, 则

$$x^\top Q x = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 = 2 + 12 = 14.$$

二次型把“方向 x ”映射成一个标量, 常用于曲率和方差。

解答 3.17. 是正定矩阵, 因为 $x^\top I x = \|x\|^2 > 0$ 对所有非零 x 成立。

解答 3.18. $x^\top Q x = x_1^2 \geq 0$, 所以半正定; 但当 $x = (0, 1)$ 时为 0, 所以不是正定。

解答 3.19. 组合方差为 $w^\top \Sigma w$ 。若两个资产权重都是 0.5, 且此题协方差项为 0, 则

$$w^\top \Sigma w = 0.5^2 \cdot 0.04 + 0.5^2 \cdot 0.16 = 0.01 + 0.04 = 0.05.$$

若存在非零协方差, 还需要加上 $2w_1 w_2 \sigma_{12}$ 。

解答 3.20. 任意投资组合的方差都不能为负, 而组合方差写作 $w^\top \Sigma w$, 所以协方差矩阵必须半正定。

解答 3.21. 是。元素非负, 每行和分别为 1 和 1。

解答 3.22. 先做矩阵乘法:

$$\mu P = (0.2, 0.8) \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = (0.2 \cdot 0.7 + 0.8 \cdot 0.4, 0.2 \cdot 0.3 + 0.8 \cdot 0.6) = (0.46, 0.54).$$

两个分量仍非负且和为 1, 所以更新后仍是概率分布。

解答 3.23.

$$\sum_j (\mu P)_j = \sum_j \sum_i \mu_i P_{ij} = \sum_i \mu_i \sum_j P_{ij} = \sum_i \mu_i = 1.$$

解答 3.24. 平稳分布表示经过一轮转移后总体分布不变，可解释为长期稳定的状态分布。

解答 3.25. 投入需求通常不能为负，部门间投入系数也是非负的，所以非负矩阵自然描述投入产出依赖。

解答 3.26. 消费束记录各商品数量；价格记录各商品单位价值；资产支付记录各状态或日期的现金流；状态分布记录各状态概率或人口质量。

解答 3.27. 优化中二次型描述目标函数曲率，金融中二次型 $w^\top \Sigma w$ 描述投资组合方差。二者都关心“方向”和“曲率/风险强度”。

解答 3.28. Markov 转移由行随机矩阵表示。平稳分布满足 $\pi = \pi P$ ，是特征值 1 对应的左特征向量。谱结构决定长期行为。

解答 3.29. 矩阵转移、谱半径、Markov 分布、线性系统稳定性都会在动态规划和随机动态中再次出现。

解答 3.30. 状态支付向量、价格向量、协方差矩阵、二次型风险和线性定价公式都会在资产定价中再次出现。

3.12 Computation Lab

例 3.9 (Leontief inverse 的数值步骤). 给定 A 和 d ，总产出计算为：

$$x = (I - A)^{-1}d.$$

在数值计算中，更推荐解线性方程组 $(I - A)x = d$ ，而不是显式求逆。这会在大规模投入产出模型中更稳定。

例 3.10 (Markov 迭代). 给定初始分布 μ_0 和转移矩阵 P ，可通过

$$\mu_t = \mu_0 P^t$$

计算第 t 期分布。若分布收敛，其极限候选满足 $\pi = \pi P$ 。

例 3.11 (组合方差). 给定协方差矩阵 Σ 和权重 w ，组合方差为

$$\sigma_p^2 = w^\top \Sigma w.$$

这个表达式是后续均值-方差投资组合理论的计算核心。

第四章 度量、拓扑、连续与紧致

4.1 为什么最优选择需要实分析

消费者问题

$$\max_{x \in B(p, w)} u(x)$$

看起来只是一个最大化问题。但要证明最优解存在，必须回答三个问题：可行集是否非空？可行集是否阻止选择逃向无穷远或边界外？效用函数在极限点附近是否表现良好？

这些问题对应本章的核心概念：距离、收敛、闭性、有界性、紧致性和连续性。它们不是数学装饰，而是最优选择存在性的结构条件。

4.2 距离与范数

定义 4.1 (度量). 集合 X 上的度量是函数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ ，满足对任意 $x, y, z \in X$ ：

1. $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$ ；
2. $d(x, y) = d(y, x)$ ；
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ 。

度量把“接近”变成数学对象。在经济学中，我们可能关心两个消费束是否接近、两个价格向量是否接近、两个政策函数是否接近，或者两个分布是否接近。

定义 4.2 (范数). 向量空间上的范数是函数 $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}_+$ ，满足正定性、齐次性和三角不等式。

在 $\mathbb{R}^n$ 中，常用欧氏范数

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

例 4.1 (消费束之间的距离). 两种商品消费束 $x = (2, 1)$ 、 $y = (5, 5)$ 的欧氏距离为

$$\|x - y\|_2 = \sqrt{(2 - 5)^2 + (1 - 5)^2} = 5.$$

若价格或政策变化使需求从 x 变到 y , 距离给出变化幅度的数学度量。后面讨论需求连续性时, 说小的价格变化不应导致需求跳得很远, 正是这种距离语言。

命题 4.1 (范数诱导度量). 若 $\|\cdot\|$ 是向量空间 V 上的范数, 则

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

定义了 V 上的度量。

证明. 正定性来自 $\|x - y\| = 0$ 当且仅当 $x - y = 0$, 即 $x = y$ 。对称性来自 $\|x - y\| = \|-(y - x)\| = \|y - x\|$ 。三角不等式来自

$$\|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|.$$

□

4.3 开球、开集与闭集

定义 4.3 (开球). 在度量空间 (X, d) 中, 以 x 为中心、半径 $r > 0$ 的开球为

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

定义 4.4 (开集). 集合 $U \subseteq X$ 是开集, 如果对任意 $x \in U$, 存在 $r > 0$, 使得 $B_r(x) \subseteq U$ 。

定义 4.5 (闭集). 集合 $F \subseteq X$ 是闭集, 如果其补集 F^c 是开集。

开集表示点周围仍有活动空间; 闭集表示极限点没有被排除。预算集通常需要闭性, 因为若消费者可以用一系列可行消费束逼近某个极限消费束, 极限消费束也应当可行。

例 4.2 (开集和闭集的直接检验). 区间 $(0, 1)$ 在 $\mathbb{R}$ 中是开集, 因为任意 $x \in (0, 1)$, 取

$$\varepsilon < \min\{x, 1 - x\},$$

则 $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (0, 1)$ 。区间 $[0, 1]$ 是闭集, 因为它的补集 $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ 是开集。这个例子帮助区分“包含边界”和“每点附近有空间”。

4.4 序列与收敛

定义 4.6 (收敛). 序列 (x_k) 收敛到 x , 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 K , 使得当 $k \geq K$ 时,

$$d(x_k, x) < \varepsilon.$$

记为 $x_k \rightarrow x$ 。

命题 4.2 (闭集的序列刻画). 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 集合 F 是闭的, 当且仅当任意收敛序列 $x_k \in F$ 且 $x_k \rightarrow x$, 都有 $x \in F$ 。

证明. 这里只给经济适用层面的证明思路。若 F 闭, 则 F^c 开。若 $x \notin F$, 则 $x \in F^c$, 存在以 x 为中心的小球完全落在 F^c 中, 这与 $x_k \in F$ 且 $x_k \rightarrow x$ 矛盾。反向则利用若 F^c 不是开集, 可构造 F 中序列收敛到 F^c 的点。□

这个命题是经济分析中最常用的闭性直觉: 可行选择的极限仍可行。

例 4.3 (预算集的闭性). 令 $B = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : 2x_1 + x_2 \leq 10\}$ 。若 $x^k \in B$ 且 $x^k \rightarrow x$, 则由内积连续性,

$$2x_1 + x_2 = \lim_k (2x_1^k + x_2^k) \leq 10.$$

同时 $x \geq 0$, 所以 $x \in B$ 。这就是预算集中可行消费束的极限仍可行。

4.5 有界性与紧致性

定义 4.7 (有界集). 集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 是有界的, 如果存在 $M > 0$, 使得对所有 $x \in A$, 有 $\|x\| \leq M$ 。

定义 4.8 (紧致性). 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 集合 K 是紧的, 如果任意 K 中序列都有一个收敛子序列, 且其极限仍在 K 中。

有限维欧氏空间中的核心事实是:

定理 4.1 (Heine–Borel 定理, 有限维版本). 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 集合紧致当且仅当它闭且有界。

本书不在此证明 Heine–Borel 的完整版本, 但会反复使用其经济含义: 闭性保证极限不丢失, 有界性保证选择不逃向无穷远, 二者合起来给最优选择存在性创造条件。

例 4.4 (有界性为什么需要正价格). 预算集

$$B(p, w) = \{x \geq 0 : p \cdot x \leq w\}$$

若 $p = (1, 0)$, 则商品 2 免费, 任意 x_2 都不增加支出, 所以预算集无界。若 $p \gg 0$, 每个坐标都满足 $x_i \leq w/p_i$, 预算集才有界。正价格假设不是装饰, 它防止消费者沿免费商品方向逃向无穷远。

例 4.5 (紧致性为什么需要闭集). 集合 $(0, 1)$ 有界但不紧。序列 $x_n = 1/n$ 全部在 $(0, 1)$ 中, 并且收敛到 0, 但 $0 \notin (0, 1)$ 。所以集合内序列的极限可能逃出集合。最大值定理需要紧致性, 正是为了防止最优解逃到边界外。

4.6 连续性

定义 4.9 (连续性). 函数 $f: X \rightarrow Y$ 在点 $x \in X$ 连续, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

若 f 在每一点连续, 则称 f 连续。

命题 4.3 (连续函数保持收敛). 若 $f: X \rightarrow Y$ 在 x 连续, 且 $x_k \rightarrow x$, 则 $f(x_k) \rightarrow f(x)$ 。

证明. 给定 $\varepsilon > 0$ 。由连续性, 存在 $\delta > 0$, 使得 $d_X(x_k, x) < \delta$ 蕴含 $d_Y(f(x_k), f(x)) < \varepsilon$ 。由 $x_k \rightarrow x$, 存在 K , 当 $k \geq K$ 时 $d_X(x_k, x) < \delta$ 。因此 $f(x_k) \rightarrow f(x)$ 。□

在消费者理论中, 连续效用意味着如果一系列消费束接近某个消费束, 那么效用也接近该消费束的效用。没有这个性质, 最大化序列可能在极限处突然失去效用。

例 4.6 (连续效用保留极限效用). 设 $u(x) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$, 并令 $x^k = (1 + 1/k, 4)$ 。则 $x^k \rightarrow (1, 4)$, 连续性给出

$$u(x^k) \rightarrow u(1, 4) = 1 + 2 = 3.$$

这说明当消费束逐渐接近某个极限时, 效用不会突然跳到完全不同的数值。

例 4.7 (连续函数的闭集逆像). 令 $f(x) = x^2$ 。集合 $[0, 4]$ 是闭集, 因此

$$f^{-1}([0, 4]) = \{x : x^2 \leq 4\} = [-2, 2]$$

也是闭集。预算集、可行集和上等值集经常用这种逆像方式证明闭性。

4.7 Weierstrass 最大值定理

定理 4.2 (Weierstrass 最大值定理). 若 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 非空且紧致, $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 则存在 $x^* \in K$, 使得

$$f(x^*) \geq f(x), \quad \forall x \in K.$$

证明. 令

$$M = \sup\{f(x) : x \in K\}.$$

由上确界定义, 存在序列 $(x_k) \subseteq K$, 使得 $f(x_k) \rightarrow M$ 。由于 K 紧致, 存在收敛子序列 $x_{k_j} \rightarrow x^* \in K$ 。由连续性,

$$f(x_{k_j}) \rightarrow f(x^*).$$

但 $f(x_{k_j}) \rightarrow M$, 所以 $f(x^*) = M$ 。因此 x^* 是最大化点。□

这个证明显示了每个假设的作用: 非空性保证有选择对象; 紧致性给最大化序列提供收敛子序列和可行极限; 连续性把目标函数值传递到极限。

4.8 消费者最优解存在

命题 4.4 (连续效用下的消费者最优解). 设 $p_i > 0$ 对所有 i 成立, $w > 0$, 预算集为

$$B(p, w) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : p \cdot x \leq w\}.$$

若 $u : B(p, w) \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 则消费者问题

$$\max_{x \in B(p, w)} u(x)$$

存在最优解。

证明. 预算集非空, 因为 $0 \in B(p, w)$ 。它是闭集, 因为由连续函数 $x \mapsto p \cdot x$ 和闭区间 $(-\infty, w]$ 的逆像给出, 并与闭集 $\mathbb{R}_+^n$ 相交。它有界, 因为 $p_i x_i \leq w$, 所以 $0 \leq x_i \leq w/p_i$ 。因此在 $\mathbb{R}^n$ 中, $B(p, w)$ 闭且有界, 从而紧致。由 Weierstrass 最大值定理, 连续函数 u 在 $B(p, w)$ 上达到最大值。□

4.9 假设失败时会怎样

若可行集不闭, 最优点可能在边界极限处但不属于可行集。若可行集无界, 目标可能沿某个方向越来越大。若效用不连续, 最大化序列的极限可能不保留效用值。反例不是边角料, 而是理解定理假设的最好方式。

例 4.8 (不连续导致最优值跳跃). 定义

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

当参数约束要求 $x \leq t$ 时, 若 $t < 0$, 最大值为 0; 若 $t \geq 0$, 最大值为 1。参数 t 穿过 0 时值函数跳跃。这说明连续性假设控制的是最优值和最优选择的稳定性。

4.10 本章小结

本章建立了最优选择存在性的分析基础。距离和范数描述接近，闭性保留极限，有界性阻止逃向无穷远，紧致性保证最大化序列有可行极限，连续性保证目标函数值传递到极限。下一章将在此基础上研究参数变化下的最优选择，即最大值定理和经济对应。

4.11 Exercises

A 类：距离、范数与集合

习题 4.1. 计算 $x = (1, 1)$ 与 $y = (4, 5)$ 的欧氏距离。

习题 4.2. 计算 $x = (3, -4)$ 的欧氏范数。

习题 4.3. 判断 $(0, 1)$ 是否开，是否闭。

习题 4.4. 判断 $[0, 1]$ 是否开，是否闭。

习题 4.5. 判断 $[0, \infty)$ 是否有界。

习题 4.6. 给出一个有界但不闭的集合。

习题 4.7. 给出一个闭但无界的集合。

B 类：收敛与闭性

习题 4.8. 证明 $1/k \rightarrow 0$ 。

习题 4.9. 设 $x_k \in [0, 1]$ 且 $x_k \rightarrow x$ 。证明 $x \in [0, 1]$ 。

习题 4.10. 给出一个开集中的序列，其极限不属于该开集。

习题 4.11. 若 $x_k \rightarrow x$ ，证明 $2x_k + 1 \rightarrow 2x + 1$ 。

习题 4.12. 解释闭性为什么对预算集有经济意义。

C 类：连续性

习题 4.13. 证明 $f(x) = ax + b$ 连续。

习题 4.14. 说明 $f(x) = x^2$ 为什么连续。

习题 4.15. 给出一个不连续函数的例子。

习题 4.16. 若效用函数不连续，最优解一定不存在吗？说明。

习题 4.17. 若效用函数连续，可行集非紧，最优解一定存在吗？说明。

D 类：紧致性与最大值

习题 4.18. 判断 $[0, 1]$ 在 $\mathbb{R}$ 中是否紧致。

习题 4.19. 判断 $(0, 1)$ 在 $\mathbb{R}$ 中是否紧致。

习题 4.20. 判断 $[0, \infty)$ 在 $\mathbb{R}$ 中是否紧致。

习题 4.21. 求 $u(x) = x(1 - x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值。

习题 4.22. 说明 Weierstrass 最大值定理中紧致性的作用。

习题 4.23. 说明 Weierstrass 最大值定理中连续性的作用。

E 类：消费者问题

习题 4.24. 设 $p = (2, 3)$, $w = 12$ 。证明预算集有界。

习题 4.25. 设 $p_i > 0$ 。证明 $B(p, w)$ 非空。

习题 4.26. 设 $p_i > 0$ 。证明 $B(p, w)$ 有界。

习题 4.27. 为什么 $B(p, w)$ 是闭集？

习题 4.28. 设 $u(x) = x_1 + x_2$, $p = (1, 1)$, $w = 10$ 。消费者最优解是否存在？

习题 4.29. 若某个商品价格为零，预算集可能不紧致。给出例子。

F 类：反例与综合

习题 4.30. 构造一个非空有界但不闭的可行集，使 $u(x) = x$ 没有最大值。

习题 4.31. 构造一个闭但无界的可行集，使连续函数没有最大值。

习题 4.32. 构造一个紧致可行集和不连续函数，使最大值不存在。

习题 4.33. 用一句话解释“上确界不是最大值”。

习题 4.34. 总结消费者最优解存在需要哪些数学条件。

习题 4.35. 本章哪些概念将在 Ch04 最大值定理中继续使用？

4.12 Solutions

本章题解请优先看清“哪个假设在发挥作用”。闭性用于保留极限，有界性用于防止逃向无穷远，紧致性把二者合在一起，连续性把函数值传递到极限。

解答 4.1. 欧氏距离是两个向量差的欧氏范数。先算差：

$$x - y = (1 - 4, 1 - 5) = (-3, -4).$$

因此

$$\|x - y\|_2 = \sqrt{(1 - 4)^2 + (1 - 5)^2} = 5.$$

解答 4.2. 欧氏范数是向量到原点的距离：

$$\|x\|_2 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5.$$

这个例子也说明范数非负，并且只有零向量的范数为 0。

解答 4.3. $(0, 1)$ 是开集：对任意 $x \in (0, 1)$ ，可以取足够小的半径让小球仍落在 $(0, 1)$ 内。它不是闭集，因为序列 $x_k = 1/k \in (0, 1)$ 收敛到 0，但 $0 \notin (0, 1)$ 。这说明它不包含所有极限点。

解答 4.4. $[0, 1]$ 是闭集，因为它包含自己的边界点，也可由补集 $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ 是开集看出。它不是开集，因为在端点 0 或 1 附近，任意小开球都会跑出 $[0, 1]$ 。

解答 4.5. 无界。证明无界时，要说明不存在统一上界：对任意给定 $M > 0$ ，取 $x = M + 1$ ，则 $x \in [0, \infty)$ 且 $x > M$ 。所以 $[0, \infty)$ 不可能被任何有限半径球包含。

解答 4.6. $(0, 1)$ 有界但不闭。

解答 4.7. $[0, \infty)$ 闭但无界。

解答 4.8. 给定 $\varepsilon > 0$ ，取 $K > 1/\varepsilon$ 。当 $k \geq K$ ，有 $|1/k - 0| < \varepsilon$ 。

解答 4.9. 这是用序列刻画闭集。若每个 $x_k \in [0, 1]$ ，则

$$0 \leq x_k \leq 1.$$

当 $x_k \rightarrow x$ 时，不等式在极限下保持，得到

$$0 \leq x \leq 1.$$

所以 $x \in [0, 1]$ 。这说明 $[0, 1]$ 包含其内部序列的极限。

解答 4.10. 在 $(0, 1)$ 中取 $x_k = 1/k$, 则 $x_k \rightarrow 0$, 但 $0 \notin (0, 1)$ 。

解答 4.11.

$$|2x_k + 1 - (2x + 1)| = 2|x_k - x| \rightarrow 0.$$

解答 4.12. 闭性表示可行消费束的极限仍然可行。如果消费者可以用可行选择逼近某个消费束, 该极限不应被无故排除。

解答 4.13. 用 ε -定义证明。给定 $\varepsilon > 0$, 若 $a \neq 0$, 取

$$\delta = \varepsilon/|a|.$$

当 $|x - y| < \delta$ 时,

$$|f(x) - f(y)| = |a||x - y| < |a|\delta = \varepsilon.$$

若 $a = 0$, 函数是常数, 任意 $\delta > 0$ 都可。因此线性函数连续。

解答 4.14. 因为

$$|x_k^2 - x^2| = |x_k - x||x_k + x|,$$

当 $x_k \rightarrow x$ 时, 序列有界, 所以乘积趋于 0。

解答 4.15. 例如

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

在 0 处不连续。

解答 4.16. 不一定。例如在有限集合上, 不连续的概念可能不造成失败; 在某些紧集上不连续函数仍可能碰巧达到最大值。但连续性是一般保证。

解答 4.17. 不一定。例如 $u(x) = x$ 在 $[0, \infty)$ 上连续, 但没有最大值。

解答 4.18. 是。它在 $\mathbb{R}$ 中闭且有界。

解答 4.19. 不是。它有界但不闭。

解答 4.20. 不是。它闭但无界。

解答 4.21.

$$u(x) = x(1 - x)$$

在 $[0, 1]$ 上最大值为 $1/4$, 由 $x = 1/2$ 达到。

解答 4.22. 紧致性保证最大化序列有收敛子序列，且极限仍在可行集中。

解答 4.23. 连续性保证如果选择序列收敛，其目标函数值也收敛到极限点的目标函数值。

解答 4.24. 由 $2x_1 + 3x_2 \leq 12$ ，得 $x_1 \leq 6$ ， $x_2 \leq 4$ ，所以有界。

解答 4.25. 零消费束 0 满足 $p \cdot 0 = 0 \leq w$ ，所以预算集非空。

解答 4.26. 由 $p_i x_i \leq p \cdot x \leq w$ ，得 $x_i \leq w/p_i$ ，所以每个坐标有界。

解答 4.27. 它是连续函数 $x \mapsto p \cdot x$ 对闭集 $(-\infty, w]$ 的逆像，与闭集 $\mathbb{R}_+^n$ 的交。

解答 4.28. 存在。证明路径是：

正价格和有限财富 $\Rightarrow$ 预算集非空、闭、有界 $\Rightarrow$ 预算集紧致。

效用连续，所以由 Weierstrass 最大值定理，连续函数在非空紧集上达到最大值。因此消费者最优解存在。

解答 4.29. 若 $p = (1, 0)$ ，预算集为 $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 \leq w\}$ ，其中 x_2 无上界，因此不紧致。

解答 4.30. 取可行集 $(0, 1)$ ，效用 $u(x) = x$ 。上确界为 1，但最大值不存在。

解答 4.31. 取可行集 $[0, \infty)$ ，效用 $u(x) = x$ 。函数连续，但没有最大值。

解答 4.32. 取 $K = [0, 1]$ ，令

$$u(x) = x \quad (x < 1), \quad u(1) = 0.$$

则上确界为 1，但没有点达到。

解答 4.33. 上确界是最小上界，可能不属于集合；最大值必须由集合中的某个点达到。

解答 4.34. 需要可行集非空、紧致，效用函数连续。对标准预算集，正价格和有限财富帮助建立紧致性。

解答 4.35. 度量、收敛、闭性、紧致性、连续性和最优解存在性都会在 Ch04 的参数化选择和最大值定理中继续使用。

4.13 Computation Lab

例 4.9 (预算集盒子界). 给定 $p = (2, 3)$, $w = 12$, 预算集满足

$$0 \leq x_1 \leq 6, \quad 0 \leq x_2 \leq 4.$$

数值画图时, 可以先在这个矩形网格中筛选满足 $2x_1 + 3x_2 \leq 12$ 的点。

例 4.10 (网格搜索与紧致性). 在紧致预算集上, 可以用越来越细的网格近似最优解。例如对 $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$, 在预算三角形上枚举网格点, 可以观察最优点的数值位置逐渐稳定。

例 4.11 (非紧集上的失败). 若可行集为 $(0, 1)$, 函数为 $u(x) = x$, 网格搜索会找到越来越接近 1 的点, 但永远不会找到真正的最大点。这是数值层面对“上确界不是最大值”的直观展示。

第五章 最大值定理与参数化选择

5.1 从最优解存在到最优解如何变化

上一章回答了一个基本问题：在紧致可行集和连续目标函数下，最优解是否存在。本章进一步问：当参数变化时，最优值和最优选择如何变化？

经济学中几乎所有选择问题都带参数。消费者问题的参数是价格和财富；企业问题的参数是投入价格和产出价格；动态规划问题的参数是状态；资产定价问题的参数是状态价格或随机贴现因子。因此，我们需要研究

$$\max_{y \in \Gamma(x)} f(x, y),$$

其中 x 是参数， y 是选择变量， $\Gamma(x)$ 是参数 x 下的可行集合。

5.2 参数化最优化的三个对象

定义 5.1 (可行对应). 设 X 是参数空间， Y 是选择空间。对应 $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ 称为可行对应，如果 $\Gamma(x)$ 表示参数 x 下所有可行选择。

定义 5.2 (值函数). 给定目标函数 $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ 和可行对应 Γ ，值函数定义为

$$v(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} f(x, y),$$

只要最大值存在。

定义 5.3 (最优选择对应). 最优选择对应定义为

$$G(x) = \arg \max_{y \in \Gamma(x)} f(x, y) = \{y \in \Gamma(x) : f(x, y) = v(x)\}.$$

值函数回答“最优值是多少”；最优选择对应回答“哪些选择达到最优值”。在经济学中，间接效用函数、利润函数和 Bellman 值函数都是值函数；需求、供给和政策函数常常是最优选择对应。

例 5.1 (参数化二次目标). 令可行集 $X = [0, 1]$, 目标函数

$$f(x, t) = -(x - t)^2.$$

如果 $t \in [0, 1]$, 最优解为 $x^*(t) = t$. 如果 $t > 1$, 最优解为 1; 如果 $t < 0$, 最优解为 0. 因此

$$x^*(t) = \min\{1, \max\{0, t\}\}.$$

这个例子展示了最大值定理的直觉: 紧致可行集和连续目标让最优解存在, 并且参数变化时最优解只是在区间上投影。

例 5.2 (值函数和最优对应分开看). 令

$$f(x, t) = -(x - t)^2, \quad x \in [0, 1].$$

当 $t = 1/2$ 时, 最优选择是 $x^* = 1/2$, 值函数值为 $v(1/2) = 0$. 当 $t = 2$ 时, 最优选择是边界 $x^* = 1$, 值函数值为 $v(2) = -1$. 值函数记录最优目标值, 最优对应记录达到该值的选择, 它们回答的是两个不同问题。

5.3 对应的连续性

函数连续性描述单值对象如何随参数变化。对应连续性则描述集合如何随参数变化。

定义 5.4 (上半连续). 对应 $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ 在 x 上半连续, 如果对任意包含 $\Gamma(x)$ 的开集 V , 存在 x 的邻域 U , 使得对所有 $x' \in U$, 有

$$\Gamma(x') \subseteq V.$$

上半连续的直觉是: 参数小变化时, 可行集合不会突然冒出远处的新点。

定义 5.5 (下半连续). 对应 $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ 在 x 下半连续, 如果对任意开集 V 满足 $V \cap \Gamma(x) \neq \emptyset$, 存在 x 的邻域 U , 使得对所有 $x' \in U$,

$$V \cap \Gamma(x') \neq \emptyset.$$

下半连续的直觉是: 原来可行的点附近, 在扰动后仍能找到相近的可行点。

定义 5.6 (连续对应). 若对应同时上半连续和下半连续, 则称它连续。

5.4 闭图像与紧值性

定义 5.7 (紧值对应). 对应 $\Gamma: X \rightrightarrows Y$ 是紧值的, 如果对每个 $x \in X$, $\Gamma(x)$ 都是非空紧集。

定义 5.8 (闭图像). 对应 Γ 的图像为

$$\text{Gr}(\Gamma) = \{(x, y) : y \in \Gamma(x)\}.$$

如果 $\text{Gr}(\Gamma)$ 是闭集, 则称 Γ 有闭图像。

闭图像意味着: 若 $x_k \rightarrow x$, $y_k \rightarrow y$, 且 $y_k \in \Gamma(x_k)$, 则 $y \in \Gamma(x)$ 。这正是参数化可行性所需的极限稳定性。

例 5.3 (闭图像检验可行对应). 令 $\Gamma(t) = [0, t]$, 定义在 $t \in [0, 1]$ 上。若 $t_k \rightarrow t$ 、 $y_k \rightarrow y$ 、且 $0 \leq y_k \leq t_k$, 取极限得到

$$0 \leq y \leq t.$$

所以 $y \in \Gamma(t)$, 图像闭。经济上, 这说明参数极限下的可行选择不会突然变成不可行。

命题 5.1 (闭图像的序列含义). 在有限维空间中, 若 Γ 有闭图像, 且 $x_k \rightarrow x$ 、 $y_k \rightarrow y$ 、 $y_k \in \Gamma(x_k)$, 则 $y \in \Gamma(x)$ 。

证明. 因为 $(x_k, y_k) \in \text{Gr}(\Gamma)$, 且 $(x_k, y_k) \rightarrow (x, y)$ 。闭图像意味着图像包含其收敛序列的极限, 因此 $(x, y) \in \text{Gr}(\Gamma)$, 即 $y \in \Gamma(x)$ 。□

5.5 Berge 最大值定理

定理 5.1 (Berge 最大值定理, 经济适用版本). 设 $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ 为有限维空间中的集合。若目标函数 $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 可行对应 $\Gamma: X \rightrightarrows Y$ 非空、紧值且连续, 则:

1. 值函数

$$v(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} f(x, y)$$

连续;

2. 最优选择对应

$$G(x) = \arg \max_{y \in \Gamma(x)} f(x, y)$$

非空、紧值且上半连续。

证明. 先证明非空性。对每个 x , $\Gamma(x)$ 非空紧致, 且 $f(x, \cdot)$ 连续, 所以由 Weierstrass 定理, 最大值存在, $G(x) \neq \emptyset$ 。

再说明值函数连续。令 $x_k \rightarrow x$ 。取 $y_k \in G(x_k)$ 。因为 $\Gamma(x)$ 紧致, 可取一个有界开集 U 包含 $\Gamma(x)$, 且 $\bar{U}$ 仍为紧集。由上半连续性, 对充分大的 k , 有 $\Gamma(x_k) \subseteq U$ 。因此除去有限项后, (y_k) 落在同一个紧集 $\bar{U}$ 中。有限维紧性给出收敛子序列 $y_{k_j} \rightarrow y$, 闭图像性质给出 $y \in \Gamma(x)$ 。由连续性,

$$f(x_{k_j}, y_{k_j}) \rightarrow f(x, y) \leq v(x).$$

这给出上极限方向。下半连续性保证对任意 $y^* \in G(x)$, 可找到 $y'_k \in \Gamma(x_k)$ 且 $y'_k \rightarrow y^*$, 于是

$$v(x_k) \geq f(x_k, y'_k) \rightarrow f(x, y^*) = v(x),$$

给出下极限方向。因此 $v(x_k) \rightarrow v(x)$ 。

最后证明 G 上半连续。若 $x_k \rightarrow x$ 、 $y_k \in G(x_k)$ 、 $y_k \rightarrow y$, 闭图像给出 $y \in \Gamma(x)$, 连续性给出

$$f(x_k, y_k) = v(x_k) \rightarrow v(x),$$

且 $f(x_k, y_k) \rightarrow f(x, y)$, 所以 $f(x, y) = v(x)$, 即 $y \in G(x)$ 。因此最优选择不会在极限中跳出最优集合。□

这个证明保留了定理的经济逻辑: 紧致性给收敛子序列, 闭图像保留可行性, 目标函数连续保留目标值, 下半连续避免原可行点在扰动后消失。

例 5.4 (下半连续失败的直觉). 令

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \{0\}, & t = 0, \\ \{1\}, & t \neq 0. \end{cases}$$

在 $t = 0$ 时, 原来的可行点是 0, 但当 t 轻微偏离 0 时, 0 附近再也找不到可行点。因此下半连续失败。若目标函数偏好 0, 最优值会在 $t = 0$ 附近突然变化。

例 5.5 (非紧可行集导致不存在最优解). 考虑

$$\max_{x \in (0,1)} x.$$

上确界是 1, 没有任何 $x \in (0, 1)$ 达到它。若把可行集改成 $[0, 1]$, 最大值由 $x = 1$ 达到。这就是为什么消费者问题里要证明预算集紧致。

5.6 消费者需求对应

消费者问题可写为

$$\max_{x \in B(p, w)} u(x),$$

其中参数是 (p, w) , 可行对应是

$$B(p, w) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : p \cdot x \leq w\}.$$

若 $p_i > 0$ 、 $w > 0$, 且效用 u 连续, 则预算集非空紧致。因此需求对应

$$X(p, w) = \arg \max_{x \in B(p, w)} u(x)$$

非空紧值。在适当参数域上, 预算对应连续, 因此由 Berge 定理, 间接效用函数连续, 需求对应上半连续。

例 5.6 (价格变化下的需求稳定). 对 Cobb-Douglas $u(x) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, 需求为

$$x_1(p, w) = \frac{w}{2p_1}, \quad x_2(p, w) = \frac{w}{2p_2}.$$

只要 $p_1, p_2 > 0$, 价格和财富小幅变化会使需求小幅变化。这个显式公式是 Berge 定理在光滑单值情形下的具体表现。

这并不意味着需求一定是单值或连续函数。如果效用不严格凸, 最优选择可能多值; 如果偏好有尖点, 需求可能在某些价格处跳跃。但上半连续仍然排除了某些极端不稳定行为。

例 5.7 (Berge 定理的消费者版本). 设

$$B(p, w) = \{x \geq 0 : p \cdot x \leq w\}$$

且 u 连续。若 $p \gg 0$, 预算集非空紧致, 并随 (p, w) 连续变化。最大值定理告诉我们: 间接效用

$$v(p, w) = \max_{x \in B(p, w)} u(x)$$

是连续的, 需求对应是上半连续的。这是 Ch09 消费者理论的技术底座。

5.7 企业供给与利润函数

企业问题可以写为

$$\pi(p) = \max_{y \in Y} p \cdot y,$$

其中 Y 是生产集合。若 Y 在相关范围内紧致, 利润函数是值函数, 供给对应是最优选择对应。Berge 定理说明, 在可行集合和目标函数表现良好时, 利润随价格连续变化, 供给对应不会突然出现远离原集合的新最优点。

5.8 动态规划中的政策对应

动态规划中的 Bellman 问题常写为

$$V(s) = \max_{a \in \Gamma(s)} \{r(s, a) + \beta V(g(s, a))\}.$$

这里状态 s 是参数，行动 a 是选择变量， $\Gamma(s)$ 是可行动作集合。Berge 定理解释了为什么在适当条件下，政策对应

$$G(s) = \arg \max_{a \in \Gamma(s)} \{r(s, a) + \beta V(g(s, a))\}$$

具有稳定性。这是数值动态规划中政策函数稳定和可计算的基础。

5.9 假设失败的反例

若可行集合不紧，最大值可能不存在。若目标函数不连续，值函数可能不连续，甚至最大值不存在。若可行对应不连续，参数轻微变化可能导致可行选择突然消失或突然出现。Berge 定理的假设正是为了排除这些失败。

例 5.8 (最优对应的多值). 令 $X = [-1, 1]$ ，目标 $g(x) = 0$ 。每个 $x \in [-1, 1]$ 都最优，最优对应为整个区间。最大值定理允许多值最优对应；这正是后面 Kakutani 定理需要对应语言的原因。

5.10 本章小结

本章把最优化从“固定可行集”推进到“参数化可行对应”。Berge 最大值定理说明，在连续目标函数和连续紧值可行对应下，值函数连续，最优选择对应非空紧值且上半连续。这个结果将在消费者理论、企业理论、一般均衡、博弈论和动态规划中反复使用。

5.11 Exercises

A 类：基本对象

习题 5.1. 给定 $\Gamma(t) = [0, t]$ ， $f(t, x) = x^2$ ， $t > 0$ 。求值函数和最优选择对应。

习题 5.2. 给定 $\Gamma(t) = [-t, t]$ ， $f(t, x) = -x^2$ ， $t > 0$ 。求 $G(t)$ 。

习题 5.3. 给定 $\Gamma(t) = [0, 1]$ ， $f(t, x) = tx$ 。当 $t > 0$ 、 $t = 0$ 、 $t < 0$ 时分别求 $G(t)$ 。

习题 5.4. 解释值函数和最优选择对应的区别。

习题 5.5. 为什么最优选择对应可能多值？

B 类：对应连续性

习题 5.6. 设 $\Gamma(t) = [0, t]$, $t > 0$ 。直观说明它是连续对应。

习题 5.7. 设 $\Gamma(t) = [0, 1]$ 若 $t = 0$, $\Gamma(t) = \{0\}$ 若 $t \neq 0$ 。它在 0 是否上半连续？

习题 5.8. 上一题中的对应在 0 是否下半连续？

习题 5.9. 解释上半连续的经济含义。

习题 5.10. 解释下半连续的经济含义。

C 类：Berge 定理

习题 5.11. 陈述 Berge 最大值定理的两个主要结论。

习题 5.12. 在 Berge 定理中，紧值性起什么作用？

习题 5.13. 在 Berge 定理中，目标函数连续性起什么作用？

习题 5.14. 为什么下半连续性有助于证明值函数下半连续？

习题 5.15. 为什么最优选择对应通常只能保证上半连续，而不一定连续？

D 类：消费者与企业

习题 5.16. 设 $p_i > 0$, 证明预算集 $B(p, w)$ 非空。

习题 5.17. 设 $p_i > 0$, 证明预算集 $B(p, w)$ 有界。

习题 5.18. 若效用连续, 说明需求对应非空。

习题 5.19. 在线性效用和相同价格下, 给出需求多值的例子。

习题 5.20. 企业利润函数为什么可以看成值函数？

E 类：反例

习题 5.21. 构造可行集不紧导致最大值不存在的例子。

习题 5.22. 构造目标函数不连续导致最大值不存在的例子。

习题 5.23. 构造最优选择多值但值函数连续的例子。

习题 5.24. 构造值函数不连续的例子。

习题 5.25. 解释为什么“最大值存在”不等于“最优选择连续”。

F 类：动态与综合

习题 5.26. 在动态规划中，状态、行动、可行对应、回报函数分别对应什么？

习题 5.27. 设 $\Gamma(s) = [0, s]$, $r(s, a) = \sqrt{s - a}$ 。解释政策对应的含义。

习题 5.28. 为什么数值动态规划需要政策对应稳定？

习题 5.29. 本章哪些内容会在 Ch09 消费者理论中再次出现？

习题 5.30. 本章哪些内容会在 Ch25 动态规划中再次出现？

习题 5.31. 总结 Berge 定理中每个假设的经济含义。

5.12 Solutions

本章题解的主线是参数化最优化。做题时先识别参数、选择变量、可行对应和值函数，再判断紧值性、连续性、上半连续或下半连续分别用于哪一步。

解答 5.1. 先识别参数和选择变量： t 是参数， $x \in [0, t]$ 是选择变量。由于 x^2 在 $x \geq 0$ 上单调递增，区间 $[0, t]$ 中最大的 x 是 t ，所以最大值在 $x = t$ 取得。因此

$$v(t) = t^2, \quad G(t) = \{t\}.$$

这个例子中最优选择是单值的，并且随参数连续变化。

解答 5.2. 目标函数 $-x^2$ 离 0 越远越小。只要可行集中包含 0，最大值就在 $x = 0$ 取得。因此

$$G(t) = \{0\}.$$

注意这里最优选择不一定随 t 变化；参数改变了可行集上界，但没有改变最优点。

解答 5.3. 选择变量在 $[0, 1]$, 目标是线性函数 tx 。分三种情况:

$$t > 0: \quad tx \text{ 随 } x \text{ 增大, 故 } G(t) = \{1\};$$

$$t = 0: \quad tx = 0 \text{ 对所有 } x \text{ 相同, 故 } G(0) = [0, 1];$$

$$t < 0: \quad tx \text{ 随 } x \text{ 增大而下降, 故 } G(t) = \{0\}.$$

这个例子展示了最优对应可能在某个参数点变成多值。

解答 5.4. 值函数回答“最优值是多少”:

$$v(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} f(x, y).$$

最优选择对应回答“哪些选择达到这个最优值”:

$$G(x) = \{y \in \Gamma(x) : f(x, y) = v(x)\}.$$

一个是数值对象, 一个是集合对象。经济学中, 间接效用是值函数, 需求是最优选择对应。

解答 5.5. 如果多个可行选择产生同样的最高目标值, 最优选择就是一个集合而不是单个点。

解答 5.6. 当 t 小幅变化时, 区间端点也小幅变化, 既不会突然出现远处点, 也不会让原来内部点突然消失, 因此直观上连续。

解答 5.7. 若题目问“是否连续”, 答案是否定的, 因为下半连续失败。直观看, $t = 0$ 时 $\Gamma(0) = [0, 1]$, 但 $t \neq 0$ 时 $\Gamma(t) = \{0\}$ 。原来在 $\Gamma(0)$ 中靠近 $1/2$ 的可行点, 在 $t \neq 0$ 后找不到相近点。

需要小心: 这个对应在 0 处并不因“突然冒出远点”而失败; 失败的是下半连续, 不是上半连续。

解答 5.8. 不下半连续。取开集 V 为 $1/2$ 附近的小邻域, 则 $V \cap \Gamma(0) \neq \emptyset$, 但对 $t \neq 0$, $\Gamma(t) = \{0\}$, 与 V 不相交。

解答 5.9. 上半连续表示参数小变化时, 可行或最优集合不会突然冒出远离原集合的新选择。

解答 5.10. 下半连续表示原来可行的选择附近, 在参数小变化后仍能找到相近可行选择。

解答 5.11. 主要结论是: 值函数连续; 最优选择对应非空、紧值且上半连续。

解答 5.12. 紧值性有两个作用。第一，对每个固定参数 x ， $\Gamma(x)$ 紧致，连续目标函数才能在其上达到最大值。第二，在证明参数序列 $x_k \rightarrow x$ 时，紧性提供最优选择序列的收敛子序列。没有紧性，最优点可能逃向无穷远，值函数和最优对应都难以控制。

解答 5.13. 连续性保证选择和参数取极限时，目标函数值也正确收敛。

解答 5.14. 下半连续保证原参数下的可行点在邻近参数下可被近似，从而防止值函数突然下降。

解答 5.15. 因为最优点可能从单点变成多个点，或多个分支合并。集合稳定性通常只能给上半连续，不能保证单值连续。

解答 5.16. 零消费束满足 $p \cdot 0 = 0 \leq w$ ，所以预算集非空。

解答 5.17. 由 $p_i x_i \leq p \cdot x \leq w$ ，得 $x_i \leq w/p_i$ ，所以有界。

解答 5.18. 证明需求对应非空分三步。第一，预算集非空，因为零消费可行。第二，若 $p \gg 0$ ，预算集闭且有界，因此紧致。第三，效用连续，所以由 Weierstrass 定理，效用在预算集上达到最大值。因此

$$X(p, w) = \arg \max_{x \in B(p, w)} u(x)$$

非空。

解答 5.19. 若 $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ ， $p = (1, 1)$ ， $w = 1$ ，则所有满足 $x_1 + x_2 = 1$ 的消费束都最优。

解答 5.20. 利润函数把价格参数映射为在生产集合上可达到的最大利润，因此是参数化最大化问题的值函数。

解答 5.21. 这是“可行集不紧”导致失败的反例。取 $\Gamma = (0, 1)$ ， $f(x) = x$ 。上确界为 1，但 $1 \notin (0, 1)$ ，所以没有可行点达到最大值。它说明有上确界不等于有最大值。

解答 5.22. 这是“目标函数不连续”导致失败的反例。取 $\Gamma = [0, 1]$ ，定义

$$f(x) = x \quad (x < 1), \quad f(1) = 0.$$

虽然可行集紧致，但当 $x \rightarrow 1$ 且 $x < 1$ 时，函数值趋近 1；然而 $x = 1$ 处函数值跳到 0。上确界为 1，但没有点达到。因此连续性不可省略。

解答 5.23. 取 $\Gamma = [0, 1]$ ， $f(x) = 0$ 。值函数恒为 0，最优选择为整个区间。

解答 5.24. 设 $\Gamma(t) = \{0\}$ ， $f(t, 0) = 1$ 若 $t = 0$ ，否则 $f(t, 0) = 0$ 。值函数在 0 不连续，因为目标函数不连续。

解答 5.25. 最大值存在只说明每个参数下至少有最优点；最优选择连续还要求这些最优点随参数稳定变化。

解答 5.26. 状态是参数 s ，行动是选择 a ，可行对应是 $\Gamma(s)$ ，回报函数是 $r(s, a)$ 加上未来价值项。

解答 5.27. 政策对应给定状态 s 时所有最优行动 a 的集合，例如最优储蓄或投资。

解答 5.28. 如果政策对应不稳定，网格扰动或状态近似可能导致最优政策大幅跳动，数值结果难以解释。

解答 5.29. 预算对应、需求对应、间接效用函数、非空紧值和上半连续会在消费者理论中再次出现。

解答 5.30. 状态、可行行动对应、值函数、政策对应和最大值定理会在动态规划中再次出现。

解答 5.31. 非空性保证有选择；紧值性保证最优点和极限；连续目标保证目标值稳定；上半连续防止新远点突然出现；下半连续防止旧可行点突然消失。

5.13 Computation Lab

例 5.9 (网格上的值函数). 设 $\Gamma(t) = [0, t]$, $f(t, x) = -(x - t/2)^2$ 。在一组 t 网格上，对每个 t 枚举 $x \in [0, t]$ ，可近似计算值函数和最优选择。

例 5.10 (多值最优的数值识别). 若目标函数在一段区间上完全相同，网格搜索会返回多个最优点。数值程序不应强行假设最优选择单值。

例 5.11 (需求对应的网格近似). 对两商品 Cobb–Douglas 或线性效用，可在预算三角形上枚举消费点，观察价格变化时最优点如何移动。线性效用在相同价格处会显示多值需求。

第六章 微分、隐函数与包络方法

6.1 为什么经济学需要可微方法

前几章强调存在性和连续性：最优解是否存在、最优集合是否稳定。本章转向另一个问题：如果最优解存在，如何刻画它？如果价格、收入、税率或技术参数变化，最优选择和最优值如何变化？

可微方法给出局部信息。梯度刻画边际变化，Hessian 刻画曲率，Jacobian 刻画多方方程系统的局部线性化，隐函数定理说明方程组何时定义出局部函数，包络定理说明值函数的参数导数可以在最优点处直接计算。

6.2 偏导数、梯度与全微分

定义 6.1 (偏导数). 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 。若极限

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}$$

存在，则称它为 f 关于第 i 个变量的偏导数。

定义 6.2 (梯度). 若所有偏导数存在，梯度定义为

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \vdots \\ \partial f / \partial x_n \end{pmatrix}.$$

梯度给出函数在各坐标方向上的边际变化。若 f 是效用函数， $\partial f / \partial x_i$ 是商品 i 的边际效用；若 f 是生产函数，偏导数是边际产出。

定义 6.3 (全微分). 若 f 在 x 可微，则小变化 dx 下，

$$df \approx \nabla f(x)^\top dx.$$

全微分是比较静态的基本语言：参数小变动如何传导到目标函数或约束。

例 6.1 (梯度给出边际效用). 设 $u(x_1, x_2) = x_1^{1/2}x_2^{1/2}$ 。梯度为

$$\nabla u(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1^{-1/2}x_2^{1/2} \\ \frac{1}{2}x_1^{1/2}x_2^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

在 $x = (4, 1)$ 处,

$$\nabla u(4, 1) = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

第二种商品的边际效用更高, 因为它相对稀缺。

6.3 Jacobian 与 Hessian

定义 6.4 (Jacobian). 设 $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F = (F_1, \dots, F_m)$ 。Jacobian 矩阵为

$$DF(x) = \begin{pmatrix} \partial F_1 / \partial x_1 & \cdots & \partial F_1 / \partial x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial F_m / \partial x_1 & \cdots & \partial F_m / \partial x_n \end{pmatrix}.$$

定义 6.5 (Hessian). 若 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 二阶可微, 其 Hessian 为

$$D^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{ij}.$$

Jacobian 用于多方程系统和隐函数定理; Hessian 用于二阶条件、凹凸性和局部近似。

例 6.2 (Hessian 读出曲率). 设

$$f(x_1, x_2) = -(x_1^2 + 2x_2^2).$$

则

$$D^2 f = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Hessian 负定, 所以 f 严格凹。若这是利润函数的局部二次近似, 一阶条件给出的点就是局部最大点。

6.4 无约束最优化

考虑

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x).$$

若 x^* 是内点局部最优, 且 f 可微, 则一阶必要条件为

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

命题 6.1 (凹函数的一阶条件充分性). 若 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 可微且凹, 且存在 x^* 满足 $\nabla f(x^*) = 0$, 则 x^* 是全局最大化点。

证明. 凹函数的一阶性质给出对任意 x ,

$$f(x) \leq f(x^*) + \nabla f(x^*)^\top (x - x^*).$$

由于 $\nabla f(x^*) = 0$, 得到 $f(x) \leq f(x^*)$ 。因此 x^* 全局最优。 $\square$

例 6.3 (二阶条件识别最大值). 令

$$f(x) = 10x - x^2.$$

一阶条件为 $10 - 2x = 0$, 所以 $x^* = 5$ 。二阶导数 $f''(x) = -2 < 0$, 说明函数严格凹, 这个临界点是全局最大点。若二阶导数为正, 同样的一阶条件会给出最小点而非最大点。

6.5 约束问题与拉格朗日一阶条件入口

考虑等式约束问题

$$\max_x f(x) \quad \text{s.t.} \quad g(x) = 0.$$

拉格朗日函数为

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x).$$

一阶条件写为

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0, \quad g(x^*) = 0.$$

本章只建立可微直觉; KKT 和一般约束优化将在后续优化章节系统处理。

经济解释是: 最优点处, 目标函数的边际变化必须能由约束的边际变化解释。乘子 λ 衡量放松约束的边际价值。

6.6 隐函数定理

经济学经常通过方程定义变量。例如市场清算方程

$$F(p, \theta) = 0$$

可能隐含地定义均衡价格 $p(\theta)$ 。隐函数定理告诉我们何时可以这样做。

定理 6.1 (隐函数定理, 一维版本). 设 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 连续可微, 且在 (x_0, y_0) 满足

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

则在 (x_0, y_0) 附近, 方程 $F(x, y) = 0$ 可以唯一地写成 $y = \varphi(x)$, 且

$$\varphi'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

公式的经济含义是: 若方程对内生变量 y 的边际反应不为零, 那么参数 x 的变化可以通过调整 y 来维持方程成立。

例 6.4 (市场清算中的隐函数). 设市场清算方程为

$$F(p, t) = 10 - p + t - 2p = 0.$$

这里 t 是需求冲击, p 是内生价格。因为 $F_p = -3 \neq 0$, 可以在局部把价格写成 $p(t)$ 。由隐函数公式,

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{F_t}{F_p} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}.$$

需求冲击上升会提高均衡价格。

例 6.5 (隐函数的手算). 方程

$$F(x, t) = x^2 + t - 4 = 0$$

在点 $(x, t) = (2, 0)$ 附近可以把 x 写成 $x(t)$, 因为 $F_x = 2x = 4 \neq 0$ 。对方程全微分:

$$2x dx + dt = 0,$$

所以

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2x}.$$

在 $x = 2$ 时, $dx/dt = -1/4$ 。参数 t 上升会降低满足方程的 x 。

6.7 比较静态

设一阶条件为

$$F(x, \theta) = 0,$$

其中 x 是最优选择, θ 是参数。若 $F_x \neq 0$, 则

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{F_\theta}{F_x}.$$

这就是比较静态的基本公式。

在多维情形中, 若 F_x 是可逆矩阵, 则

$$\frac{dx}{d\theta} = -(F_x)^{-1}F_\theta.$$

这个表达式解释了为什么 Jacobian 的非奇异性在经济理论中如此重要。

例 6.6 (税率比较静态). 设劳动供给的一阶条件可写为

$$F(\ell, \tau) = 1 - \ell - (1 - \tau)w = 0.$$

其中 τ 是税率。由隐函数公式,

$$\frac{d\ell}{d\tau} = -\frac{F_\tau}{F_\ell} = -\frac{w}{-1} = w.$$

在这个简单设定中, 税率上升使方程中的税后工资下降, 为保持一阶条件, ℓ 按 w 的速度调整。真实模型的符号取决于变量定义, 但计算路线相同。

例 6.7 (消费者一阶条件的比较静态). 最大化

$$\log x_1 + \log x_2 \quad \text{s.t.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = w.$$

一阶条件给出

$$\frac{1}{x_1} = \lambda p_1, \quad \frac{1}{x_2} = \lambda p_2.$$

结合预算约束得

$$x_1^* = \frac{w}{2p_1}, \quad x_2^* = \frac{w}{2p_2}.$$

因此 $\partial x_1^* / \partial p_1 = -w / (2p_1^2) < 0$ 。可微方法在这里直接给出价格变化的方向和大小。

6.8 包络定理

考虑参数化问题

$$v(\theta) = \max_x f(x, \theta),$$

设最优解为 $x^*(\theta)$ 。直接求导会得到

$$\frac{dv}{d\theta} = f_x(x^*(\theta), \theta) \frac{dx^*}{d\theta} + f_\theta(x^*(\theta), \theta).$$

若 $x^*(\theta)$ 是内点最优, $f_x(x^*(\theta), \theta) = 0$, 所以

$$v'(\theta) = f_\theta(x^*(\theta), \theta).$$

定理 6.2 (包络定理, 内点版本). 设 f 连续可微, 且 $x^*(\theta)$ 是内点最优并随 θ 可微。若一阶条件 $f_x(x^*(\theta), \theta) = 0$ 成立, 则

$$v'(\theta) = f_\theta(x^*(\theta), \theta).$$

证明. 由链式法则,

$$v'(\theta) = f_x(x^*(\theta), \theta)x^{*'}(\theta) + f_\theta(x^*(\theta), \theta).$$

一阶条件使第一项为零, 故结论成立。□

包络定理的核心信息是: 最优值对参数的边际变化不需要计算最优选择如何变化, 只需在最优点处对参数直接求偏导。

例 6.8 (包络定理避免求导最优解). 设

$$V(a) = \max_x \{ax - x^2\}.$$

最优解由一阶条件 $a - 2x = 0$ 得 $x^* = a/2$ 。直接代入可得 $V(a) = a^2/4$, 所以 $V'(a) = a/2$ 。

包络定理给出更快的方法:

$$V'(a) = \frac{\partial}{\partial a}(ax - x^2) \Big|_{x=x^*} = x^* = \frac{a}{2}.$$

关键是对参数求导时, 不需要再乘上 dx^*/da , 因为最优点的一阶条件已经消掉那部分。

6.9 经济应用: Shephard 与 Hotelling 的共同结构

成本函数

$$c(w, y) = \min_x w \cdot x \quad \text{s.t.} \quad f(x) \geq y$$

是一个值函数。Shephard 引理说，在适当条件下，

$$\frac{\partial c(w, y)}{\partial w_i} = x_i^*(w, y).$$

利润函数

$$\pi(p, w) = \max_y \{py - c(w, y)\}$$

也是值函数。Hotelling 引理说，利润函数对价格的导数给出供给。

这些结果不是彼此孤立的技巧，而是包络定理在不同经济问题中的表现。

6.10 本章小结

本章建立了经济比较静态的可微工具。梯度和 Hessian 刻画边际和曲率；Jacobian 刻画多方程系统的局部结构；隐函数定理说明内生变量如何随参数变化；包络定理说明最优值的参数导数可以忽略最优选择的间接变化。后续优化、消费者理论、生产理论和动态规划都会反复使用这些方法。

6.11 Exercises

A 类：导数计算

习题 6.1. 计算 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ 的梯度。

习题 6.2. 计算 $f(x, y) = \log x + \log y$ 的梯度。

习题 6.3. 计算 $f(x, y) = x^3 + 2xy$ 的 Hessian。

习题 6.4. 设 $F(x, y) = (x + y, xy)$ 。求 Jacobian。

习题 6.5. 计算 $f(x) = ax - bx^2$ 的一阶条件。

B 类：最优化

习题 6.6. 最大化 $f(x) = -(x - 3)^2 + 5$ 。求最优解和值函数。

习题 6.7. 最大化 $f(x) = \log x - 2x$, $x > 0$ 。求最优解。

习题 6.8. 判断 $f(x, y) = -(x^2 + y^2)$ 是否凹，并求最大化点。

习题 6.9. 设 $f(x, y) = x^{1/2}y^{1/2}$ 。计算边际效用。

习题 6.10. 解释 Hessian 负定和局部最大值的关系。

C 类：隐函数

习题 6.11. 设 $F(x, y) = y + x^2 - 1 = 0$ 。求 dy/dx 。

习题 6.12. 设 $F(p, \theta) = \theta - p^2 = 0$, $p > 0$ 。求 $dp/d\theta$ 。

习题 6.13. 什么时候隐函数定理不能直接使用？

习题 6.14. 解释 $F_y \neq 0$ 的经济含义。

习题 6.15. 用隐函数公式推导市场清算价格对需求参数的反应。

D 类：包络定理

习题 6.16. 设 $v(a) = \max_x \{ax - x^2\}$ 。直接求出 $v(a)$ ，并验证包络定理。

习题 6.17. 设 $v(a) = \max_{x>0} \{a \log x - x\}$, $a > 0$ 。求 $v'(a)$ 。

习题 6.18. 解释为什么包络定理中不需要计算 $x^*(\theta)$ 。

习题 6.19. 在成本函数中，为什么成本对工资的导数等于条件要素需求？

习题 6.20. 在利润函数中，为什么利润对价格的导数等于供给？

E 类：经济应用

习题 6.21. 写出 Cobb-Douglas 效用 $u = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ 的一阶条件直觉。

习题 6.22. 给出一个税率变化影响劳动供给的一阶条件表达。

习题 6.23. 设企业利润为 $pf(l) - wl$ 。写出劳动需求的一阶条件。

习题 6.24. 设资产组合问题为 $\max_w \mu^\top w - \frac{\gamma}{2} w^\top \Sigma w$ 。求一阶条件。

习题 6.25. 解释比较静态和因果效应的区别。

F 类：综合

习题 6.26. 比较 Berge 最大值定理和包络定理的关注点。

习题 6.27. 为什么可微方法通常只给局部结论？

习题 6.28. 说明隐函数定理、Jacobian 和均衡唯一性之间的联系。

习题 6.29. 说明包络定理为什么是经济学中反复出现的工具。

习题 6.30. 本章哪些内容将在消费者理论和生产理论中再次出现？

习题 6.31. 本章哪些内容将在动态规划中再次出现？

6.12 Solutions

本章题解的主线是“边际条件”。计算题要先写一阶条件，再检查二阶条件或凹性；比较静态题要明确谁是内生变量、谁是参数；包络题要区分最优值变化和最优选择变化。

解答 6.1. 逐项求偏导。对 x 求偏导时，把 y 当常数：

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy + y^2) = 2x + y.$$

对 y 求偏导时，把 x 当常数：

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy + y^2) = x + 2y.$$

因此

$$\nabla f = (2x + y, x + 2y)^\top.$$

解答 6.2. 这是对数函数的梯度。因为 $\partial \log x / \partial x = 1/x$ ，所以

$$\nabla f = (1/x, 1/y)^\top.$$

定义域需要 $x > 0, y > 0$ ，否则 $\log$ 无定义。

解答 6.3.

$$D^2 f = \begin{pmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

解答 6.4.

$$DF = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

解答 6.5. 先写一阶条件，再解方程：

$$f'(x) = a - 2bx = 0, \quad x^* = \frac{a}{2b}$$

若 $b > 0$ 。此时二阶导数 $f''(x) = -2b < 0$ ，目标函数严格凹，所以该临界点是全局最大点。

解答 6.6. 若目标是类似 $f(x) = 5 - (x - 3)^2$ ，平方项总是非负，且在 $x = 3$ 时为 0。因此函数最大点为 $x = 3$ ，最大值为

$$f(3) = 5.$$

这种“配方”方法常比直接求导更快。

解答 6.7. 先写一阶条件:

$$f'(x) = 1/x - 2 = 0$$

所以 $x^* = 1/2$ 。再看二阶导数:

$$f''(x) = -1/x^2 < 0.$$

因此目标函数严格凹, $x^* = 1/2$ 是全局最大点。

解答 6.8. 它是严格凹函数, 最大化点为 $(0, 0)$ 。

解答 6.9.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}x^{1/2}y^{-1/2}.$$

解答 6.10. 若 Hessian 负定, 目标函数在该点附近向所有方向弯曲向下, 因此满足一阶条件的点是严格局部最大值。

解答 6.11. 方程 $F(x, y) = 0$ 隐含 y 关于 x 的函数时, 用公式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

这里

$$F_x = 2x, \quad F_y = 1, \quad dy/dx = -2x.$$

因为 $F_y \neq 0$, 局部可以把 y 写成 x 的函数。

解答 6.12. 先区分内生变量和参数: p 是内生变量, θ 是参数。由隐函数公式

$$\frac{dp}{d\theta} = -\frac{F_\theta}{F_p}.$$

这里

$$F_p = -2p, \quad F_\theta = 1, \quad dp/d\theta = -F_\theta/F_p = \frac{1}{2p}.$$

只要 $p \neq 0$, 这个比较静态有效。

解答 6.13. 当相关 Jacobian 对内生变量不可逆, 或函数不连续可微, 或局部唯一性失败时, 不能直接使用。

解答 6.14. 它表示方程对内生变量有非零边际反应, 因此可以通过调整内生变量抵消参数变化。

解答 6.15. 若 $F(p, \theta) = D(p, \theta) - S(p) = 0$, 则

$$\frac{dp}{d\theta} = -\frac{F_\theta}{F_p}.$$

解答 6.16. 先求最优选择。一阶条件为

$$a - 2x = 0,$$

所以

$$x^*(a) = a/2.$$

代回目标函数：

$$v(a) = a(a/2) - (a/2)^2 = a^2/4.$$

因此

$$v'(a) = a/2 = x^*(a).$$

这与包络定理一致：值函数对参数 a 的导数等于最优点处 $\partial(ax - x^2)/\partial a = x^*$ 。

解答 6.17. 一阶条件为 $a/x - 1 = 0$ ，所以 $x^* = a$ 。包络定理给出

$$v'(a) = \log x^* = \log a.$$

解答 6.18. 值函数是

$$v(\theta) = f(x^*(\theta), \theta).$$

直接求导会得到

$$v'(\theta) = f_x(x^*(\theta), \theta)x^{*'}(\theta) + f_\theta(x^*(\theta), \theta).$$

在内点最优下，一阶条件给出 $f_x(x^*(\theta), \theta) = 0$ ，所以第一项消失。包络定理的核心就是：不需要先求 $x^{*'}(\theta)$ ，也能得到最优值的一阶变化。

解答 6.19. 工资上升一点时，按原最优投入计划，成本增加约为该投入数量乘以工资变化；最优调整的一阶影响由包络定理消去。

解答 6.20. 价格上升一点时，按原最优产量，收入和利润增加约为产量乘以价格变化；产量调整的一阶影响被包络定理消去。

解答 6.21. 内点最优下，边际替代率等于价格比：

$$\frac{MU_1}{MU_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

解答 6.22. 若消费和闲暇选择的一阶条件写为 $F(l, \tau) = 0$ ，税率影响为

$$\frac{dl}{d\tau} = -\frac{F_\tau}{F_l}.$$

解答 6.23.

$$pf'(l) - w = 0.$$

劳动的边际收益产品等于工资。

解答 6.24.

$$\mu - \gamma \Sigma w = 0,$$

若 Σ 可逆, 则 $w^* = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \mu$ 。

解答 6.25. 比较静态是在模型内部研究参数变化下均衡或最优选择如何变化; 因果效应涉及现实数据中干预和反事实识别。

解答 6.26. Berge 定理关注最优值和最优选择是否连续稳定; 包络定理关注最优值对参数的边际导数。

解答 6.27. 导数描述的是某点附近的一阶或二阶近似, 因此通常提供局部性质。全局结论还需要凹性、凸性或紧致性等额外条件。

解答 6.28. 均衡方程的 Jacobian 若对内生变量非奇异, 隐函数定理给出局部唯一的均衡函数, 并可计算比较静态。

解答 6.29. 许多经济对象都是值函数: 间接效用、支出函数、成本函数、利润函数、Bellman 值函数。包络定理统一处理它们的参数导数。

解答 6.30. 边际效用、MRS、Hessian、约束一阶条件、Shephard 引理和 Hotelling 引理都会再次出现。

解答 6.31. Bellman 方程的一阶条件、政策函数比较静态和包络条件都会在动态规划中再次出现。

6.13 Computation Lab

例 6.9 (有限差分检查包络定理). 对

$$v(a) = \max_x \{ax - x^2\}$$

可先解析得到 $v(a) = a^2/4$ 。数值上取小步长 h , 比较

$$\frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

与包络公式 $x^*(a) = a/2$ 。

例 6.10 (隐函数比较静态). 给定市场清算方程 $F(p, \theta) = \theta - 2p = 0$, 数值上可对不同 θ 解出 $p = \theta/2$, 再用斜率估计验证 $dp/d\theta = 1/2$ 。

例 6.11 (Hessian 与局部曲率). 对二次函数

$$f(x) = \mu^\top x - \frac{\gamma}{2} x^\top \Sigma x,$$

Hessian 为 $-\gamma\Sigma$ 。若 Σ 正定, 则目标严格凹, 数值优化具有唯一解。

第七章 凸集、凸函数与分离定理

7.1 为什么凸性是经济学的几何核心

凸性是经济学中最有力量的结构假设之一。消费者偏好凸，表示平均化的消费束不比极端消费束差；生产集合凸，表示技术可以混合；可行配置集合凸，价格就可能支持有效配置；资产收益集合凸，分离思想可以把无套利和正定价联系起来。

本章的目标是建立一个共同视角：

凸性 $\longrightarrow$ 支撑与分离 $\longrightarrow$ 价格、对偶与无套利。

7.2 凸集与凸组合

定义 7.1 (凸组合). 给定点 $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ ，若 $\lambda_i \geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ ，则

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$$

称为这些点的凸组合。

定义 7.2 (凸集). 集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 是凸的，如果对任意 $x, y \in C$ 和任意 $\lambda \in [0, 1]$ ，都有

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

凸集的经济含义是：如果两个选择都可行，那么它们的混合也可行。消费集合 $\mathbb{R}_+^n$ 、预算集、许多生产集合和随机化策略集合都是凸集。

例 7.1 (检验预算集凸性). 预算集

$$B = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq w\}$$

是凸的。若 $x, y \in B$ ，则对 $\lambda \in [0, 1]$ ，

$$p \cdot (\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda p \cdot x + (1 - \lambda)p \cdot y \leq w.$$

非负性也被凸组合保持，所以混合消费束仍可行。经济上，这表示两个可负担消费计划的平均也可负担。

定义 7.3 (凸包). 集合 A 的凸包 $\text{co}(A)$ 是包含 A 的最小凸集；等价地，它由 A 中有限多个点的所有凸组合构成。

例 7.2 (凸包表示混合策略). 设一个企业只有两种纯行动：不投资 $a_0 = 0$ 和投资 $a_1 = 1$ 。若允许随机化，则可选择投资概率 $\lambda \in [0, 1]$ ，平均行动为

$$\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_0 = \lambda.$$

因此纯行动集合 $\{0, 1\}$ 的凸包是整个区间 $[0, 1]$ 。经济上，凸包把“只能二选一”的离散选择扩展成“可以按概率混合”的可行选择集。

7.3 凸锥与价格方向

定义 7.4 (锥). 集合 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 是锥，如果对任意 $x \in K$ 和 $\alpha \geq 0$ ，都有 $\alpha x \in K$ 。

定义 7.5 (凸锥). 若 K 同时是锥和凸集，则称为凸锥。

金融中的可达收益集合常常形成锥：如果某个套利收益可以实现，那么任意正倍数也可以实现。生产理论中的可扩张技术也常与锥相关。

定义 7.6 (对偶锥). 给定锥 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ，其对偶锥为

$$K^* = \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot x \geq 0, \forall x \in K\}.$$

对偶锥中的向量可以理解为对所有可行方向都非负评价的价格或泛函。

例 7.3 (对偶锥中的价格). 令 $K = \mathbb{R}_+^2$ 。若 $p \in K^*$ ，则要求

$$p \cdot x \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^2.$$

分别取 $x = (1, 0)$ 和 $x = (0, 1)$ ，得到 $p_1 \geq 0$ 、 $p_2 \geq 0$ 。反过来，只要 $p \geq 0$ ，它对所有非负向量的评价都非负。因此 $(\mathbb{R}_+^2)^* = \mathbb{R}_+^2$ 。这说明在只允许“增加商品”的方向上，非负价格正是不会把可行增量评价为负的价格。

7.4 凸函数与凹函数

定义 7.7 (凸函数). 函数 $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ 在凸集 C 上是凸的, 如果对任意 $x, y \in C$ 和 $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

定义 7.8 (凹函数). 函数 f 是凹的, 如果 $-f$ 是凸的。

经济学中, 效用函数常假设凹, 表示边际效用递减和偏好凸; 成本函数常是凸的, 表示边际成本不下降; 利润最大化和效用最大化中的凹性帮助一阶条件成为充分条件。

定理 7.1 (Jensen 不等式, 有限形式). 若 f 是凸函数, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_i \lambda_i = 1$, 则

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) \leq \sum_i \lambda_i f(x_i).$$

证明. 对两个点的情形, 这正是凸函数定义。有限多个点的情形可通过归纳法得到。 $\square$

若 u 是凹效用函数, 则 Jensen 不等式给出

$$u(\mathbb{E}X) \geq \mathbb{E}u(X),$$

这正是风险厌恶的一条数学表达。

例 7.4 (Jensen 不等式的经济读法). 令 $u(c) = \sqrt{c}$, 这是凹函数。若收入在两个状态中分别为 1 和 9, 等概率, 则期望消费为 5。有

$$u(5) = \sqrt{5}, \quad \frac{1}{2}u(1) + \frac{1}{2}u(9) = 2.$$

因为 $\sqrt{5} > 2$, 消费者更喜欢平滑消费。这是凹性与风险厌恶之间最基本的桥。

7.5 可微凸函数的一阶刻画

命题 7.1 (凸函数的一阶条件). 设 $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ 在凸集 C 上可微。则 f 是凸函数当且仅当对任意 $x, y \in C$,

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x).$$

证明. 只说明核心方向。若 f 凸, 令 $g(t) = f(x + t(y - x))$ 。由一元凸性,

$$g(1) \geq g(0) + g'(0),$$

即

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x).$$

反向可用同一不等式作用于线段上的两点推出凸性。 $\square$

这个不等式说明：可微凸函数的切平面位于函数图像下方。经济上，边际成本线给出总成本的局部线性下界。

例 7.5 (支撑超平面的一维版本). 函数 $f(x) = x^2$ 在 $x_0 = 1$ 的切线为

$$\ell(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 2x - 1.$$

由于 $x^2 \geq 2x - 1$ ，这条切线在全局上支撑凸函数图像。高维分离定理和支撑价格的直觉，就是这个图像的多维版本。

7.6 超平面与支撑

定义 7.9 (超平面). 给定非零向量 $p \in \mathbb{R}^n$ 和标量 α ，集合

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : p \cdot x = \alpha\}$$

称为超平面。

向量 p 是超平面的法向量。经济学中，价格向量 p 定义的预算线或预算超平面就是这种对象。

定义 7.10 (支撑超平面). 若 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ， $x^* \in C$ ，且存在 $p \neq 0$ ，使得

$$p \cdot x \leq p \cdot x^*, \quad \forall x \in C,$$

则超平面 $\{x : p \cdot x = p \cdot x^*\}$ 在 x^* 支撑 C 。

支撑超平面的经济含义是：价格 p 使得 x^* 在可行集合中达到最高价值。福利定理中的支持价格就是这种几何结构。

例 7.6 (价格支持预算边界). 预算集

$$B = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : 2x_1 + x_2 \leq 10\}$$

的边界点 $x^* = (3, 4)$ 满足 $2 \cdot 3 + 4 = 10$ 。取价格向量 $p = (2, 1)$ ，则对所有 $x \in B$ ，都有

$$p \cdot x = 2x_1 + x_2 \leq 10 = p \cdot x^*.$$

所以预算线本身就是在 x^* 支撑预算集的超平面。这里“支撑”不是说 x^* 最受欢迎，而是说在价格评价下它已经用完全部财富。

7.7 分离定理

定理 7.2 (有限维强分离定理, 经济适用版本). 设 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 是非空闭凸集, 点 $z \notin C$. 则存在非零向量 $p \in \mathbb{R}^n$ 和标量 α , 使得

$$p \cdot x \leq \alpha < p \cdot z, \quad \forall x \in C.$$

证明. 证明思路如下. 由于 C 闭凸, 存在 C 中离 z 最近的点 x^* . 令 $p = z - x^*$. 凸性保证从 x^* 指向任意 $x \in C$ 的方向不能与 p 形成正内积, 否则沿线段可找到更接近 z 的点. 因此

$$p \cdot (x - x^*) \leq 0, \quad \forall x \in C.$$

于是

$$p \cdot x \leq p \cdot x^* < p \cdot z,$$

得到分离。 □

分离定理是价格理论的几何核心。它说, 如果某个点不属于一个闭凸可行集合, 那么存在一个线性价格系统把它与该集合区分开。

7.8 价格支持与福利定理的几何

设 F 是可行效用集合或可行配置集合, 且 F 凸. 如果 x^* 是边界上的有效点, 那么通常可以找到价格向量 p , 使得

$$p \cdot x \leq p \cdot x^*, \quad \forall x \in F.$$

这说明有效配置可以由价格支持。第二福利定理的几何直觉正是: 在凸性条件下, 帕累托有效配置可以通过适当价格和财富转移实现为竞争均衡。

7.9 无套利与分离

考虑有限状态金融市场。可交易组合产生的支付集合形成线性子空间或凸锥。无套利要求不存在一个可行支付 X 满足

$$X \geq 0, \quad X \neq 0,$$

且成本非正。若套利锥与正正交区域没有交集, 分离定理可以产生一个正的状态价格向量 q , 使得所有可交易支付都按 q 定价。

因此, 无套利定价和福利价格支持共享同一数学来源: 凸集合之间的分离。

例 7.7 (分离产生正状态价格). 考虑两个状态的金融市场。若某个零成本组合能产生支付 $X = (1, 0.5)$, 则 $X \geq 0$ 且 $X \neq 0$, 它就是套利。无套利要求可达零成本支付集合不能进入严格非负方向。分离定理于是给出某个状态价格 $q = (q_1, q_2) \gg 0$, 使所有零成本可达支付 Z 都满足

$$q \cdot Z = 0.$$

若资产支付为 A , 价格为 s , 则无套利定价可写成

$$s = q \cdot A.$$

这个例子把“没有免费午餐”的经济条件转化成了“存在正线性定价泛函”的几何结论。

7.10 次梯度

定义 7.11 (次梯度). 设 f 是凸函数。向量 g 是 f 在 x 处的次梯度, 如果对所有 y ,

$$f(y) \geq f(x) + g^\top(y - x).$$

所有次梯度的集合称为次微分, 记为 $\partial f(x)$ 。

当凸函数不可微时, 次梯度替代梯度。经济学中, 不可微成本函数、绝对值损失、分段线性预算和多重最优都自然产生次梯度。

例 7.8 (拟凹但不凹的偏好表示). 函数 $u(x) = x_1 x_2$ 在 $\mathbb{R}_+^2$ 上不是全局凹函数, 但常用的单调变换

$$\log u(x) = \log x_1 + \log x_2$$

是凹函数, 并表示同一偏好。这个例子说明: 偏好凸性关心的是上水平集, 而不是某个特定效用表示是否凹。

7.11 本章小结

本章建立了凸分析的基本语言。凸集描述可混合的可行性, 凸函数和凹函数描述曲率, Jensen 不等式连接凸性和风险, 支撑超平面解释价格支持, 分离定理连接福利定理、对偶和无套利。下一章将把这些几何思想转化为约束优化、KKT 条件和对偶性。

7.12 Exercises

A 类：凸集

习题 7.1. 证明区间 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ 是凸集。

习题 7.2. 判断集合 $(0, 1)$ 是否凸。

习题 7.3. 判断集合 $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ 是否凸。

习题 7.4. 判断集合 $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ 是否凸。

习题 7.5. 证明半空间 $\{x : p \cdot x \leq \alpha\}$ 是凸集。

习题 7.6. 证明两个凸集的交仍是凸集。

B 类：凸函数与凹函数

习题 7.7. 判断 $f(x) = x^2$ 是否凸。

习题 7.8. 判断 $f(x) = \log x$ 在 $x > 0$ 上是否凹。

习题 7.9. 判断 $f(x) = |x|$ 是否凸。

习题 7.10. 设 f 和 g 是凸函数，证明 $f + g$ 是凸函数。

习题 7.11. 若 f 是凹函数，解释为什么最大化 f 通常较容易。

习题 7.12. 用 Jensen 不等式解释风险厌恶。

C 类：超平面与分离

习题 7.13. 写出 $\mathbb{R}^2$ 中通过点 $(1, 0)$ 、法向量为 $(1, 1)$ 的超平面。

习题 7.14. 证明 $p = (1, 1)$ 支撑集合 $\{x \geq 0 : x_1 + x_2 \leq 1\}$ 于任意满足 $x_1 + x_2 = 1$ 的点。

习题 7.15. 分离集合 $C = [0, 1]$ 和点 $z = -1$ 。

习题 7.16. 解释分离定理中的向量 p 为什么可以被解释为价格。

习题 7.17. 为什么凸性对分离定理重要？

D 类：经济应用

习题 7.18. 证明预算集 $B(p, w)$ 是凸集。

习题 7.19. 如果偏好由凹效用表示，说明上等值集为什么是凸集。

习题 7.20. 解释“平均消费束不差于极端消费束”的凸偏好含义。

习题 7.21. 用支撑超平面解释价格支持。

习题 7.22. 为什么非凸生产集合可能导致价格支持失败？

E 类：锥、对偶与无套利

习题 7.23. 证明 $\mathbb{R}_+^n$ 是凸锥。

习题 7.24. 求 $K = \mathbb{R}_+$ 的对偶锥。

习题 7.25. 设 $K = \{(x_1, x_2) : x_2 \geq 0, x_1 = 0\}$ 。求其对偶锥。

习题 7.26. 解释套利收益集合为什么常常具有锥结构。

习题 7.27. 用一句话说明无套利和分离定理的关系。

F 类：次梯度与综合

习题 7.28. 求 $f(x) = |x|$ 在 $x > 0$ 和 $x < 0$ 的梯度。

习题 7.29. 说明为什么 $0 \in \partial|x|(0)$ 。

习题 7.30. 用凸函数一阶条件证明 x^2 的切线在图像下方。

习题 7.31. 总结凸性如何连接消费者理论、福利定理和资产定价。

习题 7.32. 本章哪些内容将在 KKT 与对偶性中再次出现？

习题 7.33. 本章哪些内容将在一般均衡和福利定理中再次出现？

7.13 Solutions

本章题解的主线是几何直觉。证明凸集时检查凸组合，证明凸函数时用定义或一阶刻画，分离和支撑题要明确被支撑的集合、支撑点和法向量。

解答 7.1. 证明凸集要检查任意两点的凸组合。若 $x, y \in [a, b]$ ，则

$$a \leq x \leq b, \quad a \leq y \leq b.$$

对 $\lambda \in [0, 1]$ ，有

$$\lambda a + (1 - \lambda)a \leq \lambda x + (1 - \lambda)y \leq \lambda b + (1 - \lambda)b.$$

即

$$a \leq \lambda x + (1 - \lambda)y \leq b.$$

所以凸组合仍在 $[a, b]$ ，区间是凸集。

解答 7.2. 是凸集。任意两个点的凸组合仍在 $(0, 1)$ 中。

解答 7.3. 是凸集。单位圆盘是欧氏范数小于等于 1 的集合，范数球是凸的。

解答 7.4. 不是。点 $(1, 0)$ 和 $(-1, 0)$ 在集合中，但平均点 $(0, 0)$ 不在单位圆周上。

解答 7.5. 半空间的凸性来自内积的线性性。若 $p \cdot x \leq \alpha$ ， $p \cdot y \leq \alpha$ ，则

$$p \cdot (\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha.$$

所以凸组合仍在半空间中。预算集就是半空间与非负正交象限的交，因此也是凸的。

解答 7.6. 若 $x, y \in C \cap D$ ，则它们属于 C 且属于 D 。由凸性，凸组合同时属于 C 和 D ，故属于交集。

解答 7.7. 是凸函数，可由二阶导数 $2 > 0$ 判断。

解答 7.8. 是凹函数，因为二阶导数 $-1/x^2 < 0$ 。

解答 7.9. 是凸函数。其图像是 V 形，任意弦位于图像上方。

解答 7.10. 要证明 $f + g$ 凸，直接使用定义。由 f 的凸性，

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

由 g 的凸性，

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y).$$

两式相加，得到

$$(f + g)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda(f + g)(x) + (1 - \lambda)(f + g)(y).$$

所以 $f + g$ 凸。

解答 7.11. 凹函数的局部一阶条件在很多情况下可以推出全局最大值，避免局部最优和全局最优分离。

解答 7.12. Jensen 不等式说，若 u 凹，则

$$u(\mathbb{E}X) \geq \mathbb{E}u(X).$$

左边是先取彩票的平均消费再评价效用；右边是先在每个状态评价效用再取期望。若左边更大，说明消费者更喜欢确定性的平均消费，而不是有相同均值的风险彩票。这正是风险厌恶的一种数学表达。

解答 7.13. 超平面为

$$(1, 1) \cdot (x - (1, 0)) = 0,$$

即 $x_1 + x_2 = 1$ 。

解答 7.14. 取价格向量 $p = (1, 1)$ 。若可行集合满足 $x_1 + x_2 \leq 1$ ，则对任意可行 x ，

$$p \cdot x = x_1 + x_2 \leq 1.$$

对任意边界点 x^* 满足 $x_1^* + x_2^* = 1$ ，有

$$p \cdot x^* = 1.$$

因此 $p \cdot x \leq p \cdot x^*$ 对所有可行 x 成立，价格向量 p 支撑该边界点。

解答 7.15. 要把 $z = -1$ 与集合 $[0, 1]$ 分离，可以取法向量 $p = -1$ 。对所有 $x \in [0, 1]$ ，有

$$px = -x \leq 0.$$

但对 $z = -1$ ，有

$$pz = (-1)(-1) = 1 > 0.$$

所以超平面点 0 把 $[0, 1]$ 和 z 分开。

解答 7.16. 因为 $p \cdot x$ 是按价格 p 评价配置 x 的线性价值，分离不等式表示某些配置在该价格下被区分。

解答 7.17. 凸性保证集合没有凹陷或断裂，从而可以用一个线性超平面整体地把集合与外部点分开。

解答 7.18. 若 $x, y \in B(p, w)$ ，则 $p \cdot x, p \cdot y \leq w$ 。凸组合的支出不超过 w ，所以仍在预算集。

解答 7.19. 上等值集 $\{x : u(x) \geq c\}$ 。若 u 凹且 $u(x), u(y) \geq c$, 则

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda u(x) + (1 - \lambda)u(y) \geq c.$$

解答 7.20. 若两个消费束都至少一样好, 那么它们的平均或混合也至少一样好。这表达了偏好多样化或平滑消费的倾向。

解答 7.21. 若价格超平面在配置处支撑可行集合, 则该配置在价格评价下不低于其他可行配置, 因此价格支持该配置。

解答 7.22. 非凸集合可能存在凹陷或离散跳跃, 边界有效点未必能被一条线性价格超平面整体支撑。

解答 7.23. 若 $x, y \geq 0$, 凸组合仍非负; 若 $\alpha \geq 0$, 则 $\alpha x \geq 0$ 。所以是凸锥。

解答 7.24. $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+$ 。

解答 7.25. 要求 $p \cdot (0, x_2) = p_2 x_2 \geq 0$ 对所有 $x_2 \geq 0$ 成立, 所以 $p_2 \geq 0$, 而 p_1 任意。对偶锥为 $\{(p_1, p_2) : p_2 \geq 0\}$ 。

解答 7.26. 若某个套利组合可行, 那么按正倍数放大该组合仍可行且仍是套利, 因此形成锥结构。

解答 7.27. 无套利意味着套利锥与严格正收益区域分离; 分离定理给出正状态价格或定价泛函。

解答 7.28. 当 $x > 0$, 梯度为 1; 当 $x < 0$, 梯度为 -1。

解答 7.29. 根据次梯度定义, $g \in \partial f(0)$ 当且仅当对所有 y ,

$$|y| \geq |0| + g(y - 0).$$

若取 $g = 0$, 右边为 0, 所以条件变成 $|y| \geq 0$, 对所有 y 成立。因此 $0 \in \partial|x|(0)$ 。事实上, $\partial|x|(0) = [-1, 1]$ 。

解答 7.30. 对 $f(x) = x^2$, 在点 a 的切线为 $a^2 + 2a(x - a)$ 。不等式

$$x^2 \geq a^2 + 2a(x - a)$$

等价于 $(x - a)^2 \geq 0$ 。

解答 7.31. 消费者理论中凸性刻画偏好和需求稳定; 福利定理中凸性保证价格支持; 资产定价中凸性和锥结构允许用分离定理推出状态价格。

解答 7.32. 凸集、凸函数、支撑超平面、次梯度、对偶锥和分离定理都会在 KKT 与对偶性中再次出现。

解答 7.33. 支撑超平面、价格向量、凸可行集和分离定理会在一般均衡与福利定理中再次出现。

7.14 Computation Lab

例 7.9 (二维半空间筛选). 给定价格向量 $p = (1, 2)$ 和财富 $w = 4$, 预算半空间为

$$x_1 + 2x_2 \leq 4.$$

在二维网格上筛选满足该不等式的点, 就得到预算集的离散近似。

例 7.10 (线性分离的数值直觉). 若点 $z = (2, 2)$ 不属于集合 $C = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 + x_2 \leq 1\}$, 则 $p = (1, 1)$ 给出

$$p \cdot x \leq 1 < 4 = p \cdot z.$$

这是一条显式分离超平面。

例 7.11 (无套利的有限状态检查). 在有限状态中, 可交易收益向量组成矩阵列空间。若能找到组合权重 θ , 使得 $R\theta \geq 0$ 且至少一个状态严格大于零, 同时成本非正, 就存在套利。否则可以寻找正状态价格向量作为分离证据。

第八章 约束优化、KKT 与对偶

8.1 为什么约束优化是经济学的核心

经济选择几乎总是在约束下发生。消费者受预算约束，企业受技术约束，政府受资源约束，投资者受财富和风险约束，动态规划中的行动受状态约束。约束优化的核心问题不是简单地“求最大值”，而是理解约束如何改变边际条件，以及约束的影子价格如何进入经济解释。

本章的主线是：

约束 $\rightarrow$ 乘子 $\rightarrow$ KKT $\rightarrow$ 对偶 $\rightarrow$ 影子价格.

8.2 等式约束与拉格朗日乘子

考虑等式约束问题

$$\max_x f(x) \quad \text{s.t.} \quad h(x) = 0.$$

拉格朗日函数为

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda h(x).$$

若 x^* 是正则内点最优，则存在乘子 λ^* ，使得

$$\nabla f(x^*) = \lambda^* \nabla h(x^*), \quad h(x^*) = 0.$$

几何上，最优点处目标函数的等高线与约束曲面相切。经济上，乘子 λ^* 衡量放松约束的边际价值。

例 8.1 (等式约束下的切线条件). 求解

$$\max_{x_1, x_2} x_1 x_2 \quad \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 = 10.$$

Lagrangian 为

$$\mathcal{L} = x_1 x_2 - \lambda(x_1 + x_2 - 10).$$

一阶条件给出

$$x_2 = \lambda, \quad x_1 = \lambda, \quad x_1 + x_2 = 10.$$

因此 $x_1 = x_2 = 5$ 。几何上，双曲线 $x_1 x_2 = \text{常数}$ 在最优点与直线 $x_1 + x_2 = 10$ 相切；经济上，两个方向的边际收益被同一个资源约束乘子拉平。

8.3 不等式约束与 KKT 条件

考虑最大化问题

$$\max_x f(x) \quad \text{s.t.} \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

采用最大化约定的 Lagrangian:

$$\mathcal{L}(x, \mu) = f(x) - \sum_{i=1}^m \mu_i g_i(x), \quad \mu_i \geq 0.$$

定义 8.1 (KKT 条件). 候选点 x^* 和乘子 μ^* 满足 KKT 条件, 如果:

1. 原始可行性: $g_i(x^*) \leq 0$;
2. 对偶可行性: $\mu_i^* \geq 0$;
3. 互补松弛: $\mu_i^* g_i(x^*) = 0$;
4. 驻点条件:

$$\nabla f(x^*) - \sum_i \mu_i^* \nabla g_i(x^*) = 0.$$

互补松弛是 KKT 的经济灵魂: 不绑定的约束没有影子价格; 有正影子价格的约束必须绑定。

例 8.2 (一个完整的 KKT 计算). 求解

$$\max_{x \geq 0} 4x - x^2.$$

写成最小化 $-4x + x^2$ 且约束 $-x \leq 0$ 。Lagrangian 为

$$\mathcal{L} = -4x + x^2 - \mu x.$$

KKT 条件是

$$-4 + 2x - \mu = 0, \quad \mu x = 0, \quad \mu \geq 0, \quad x \geq 0.$$

若 $x > 0$, 则 $\mu = 0$, 得 $x = 2$ 。这满足非负约束, 所以最优解是 $x^* = 2$ 。

例 8.3 (绑定与不绑定约束). 求解

$$\max_x -(x-3)^2 \quad \text{s.t.} \quad x \leq 5.$$

无约束最优点是 $x = 3$, 它已经满足 $x \leq 5$, 所以约束不绑定。把约束写成 $g(x) = x - 5 \leq 0$, 互补松弛给出

$$\mu(x-5) = 0.$$

在 $x^* = 3$ 时 $x^* - 5 < 0$, 因此必须有 $\mu^* = 0$ 。这正是“不紧的约束没有影子价格”的代数形式。

8.4 约束资格

KKT 条件并非无条件必要。若约束在最优点附近过于退化, 可能不存在合适乘子。约束资格是排除退化情形的条件。

一个常见的直觉条件是: 绑定约束的梯度应当足够独立, 使得可行集合在最优点附近有良好的切空间描述。后续更高级理论会给出 LICQ、MFCQ 和 Slater 条件等形式。本书主线中最重要的是 Slater 条件, 因为它与凸优化强对偶联系紧密。

定理 8.1 (KKT 必要性, LICQ 版本). 设 $f, g_1, \dots, g_m$ 在 x^* 附近连续可微, 且 x^* 是问题

$$\max_x f(x) \quad \text{s.t.} \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

的局部最优解。记活跃约束集合为

$$A(x^*) = \{i : g_i(x^*) = 0\}.$$

若活跃约束梯度族 $\{\nabla g_i(x^*) : i \in A(x^*)\}$ 线性无关, 则存在乘子 $\mu_i^* \geq 0$, 使得 (x^*, μ^*) 满足 KKT 条件。

证明. 证明的核心是把“没有可行的一阶改进方向”转化为梯度之间的锥组合关系。若某个方向 d 同时满足

$$\nabla g_i(x^*) \cdot d \leq 0, \quad i \in A(x^*),$$

并且

$$\nabla f(x^*) \cdot d > 0,$$

则在 LICQ 给出的规则性下, 可以沿着接近 d 的可行曲线从 x^* 出发, 并在一阶上提高目标值。这与局部最优矛盾。因此不存在这样的方向 d 。

由有限维 Farkas 引理, 不存在上述方向等价于

$$\nabla f(x^*) = \sum_{i \in A(x^*)} \mu_i^* \nabla g_i(x^*), \quad \mu_i^* \geq 0.$$

令非活跃约束的乘子为 0, 便得到驻点条件

$$\nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^m \mu_i^* \nabla g_i(x^*) = 0.$$

原始可行性来自 x^* 可行; 对偶可行性来自 $\mu_i^* \geq 0$; 互补松弛来自非活跃约束乘子被设为 0, 活跃约束满足 $g_i(x^*) = 0$ 。故 KKT 条件成立。 $\square$

8.5 凸问题中的充分性

命题 8.1 (凹最大化中的 KKT 充分性). 设 f 是凹函数, 约束集合

$$C = \{x : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$$

是凸集。若存在 (x^*, μ^*) 满足 KKT 条件, 则 x^* 是全局最大化点。

证明. 由凹性, 对任意可行 x ,

$$f(x) \leq f(x^*) + \nabla f(x^*)^\top (x - x^*).$$

由驻点条件,

$$\nabla f(x^*) = \sum_i \mu_i^* \nabla g_i(x^*).$$

若约束函数适当凸, 使得可行集由凸不等式描述, 则对可行 x 可推出

$$\nabla g_i(x^*)^\top (x - x^*) \leq g_i(x) - g_i(x^*).$$

因此

$$f(x) - f(x^*) \leq \sum_i \mu_i^* (g_i(x) - g_i(x^*)).$$

由可行性 $g_i(x) \leq 0$ 、互补松弛 $\mu_i^* g_i(x^*) = 0$ 、以及 $\mu_i^* \geq 0$, 右侧不超过 0。故 $f(x) \leq f(x^*)$ 。 $\square$

这个命题说明, 凸性让局部边际条件变成全局最优条件。

例 8.4 (凹消费者问题中一阶条件足够). 消费者最大化

$$\log x_1 + \log x_2 \quad \text{s.t.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq w, \quad x \gg 0.$$

目标函数严格凹，预算集凸，所以任何满足 KKT 条件的内点解都是全局最优。Lagrangian 为

$$\mathcal{L} = \log x_1 + \log x_2 - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - w).$$

一阶条件给出 $1/x_i = \lambda p_i$ ，所以 $p_1 x_1 = p_2 x_2$ 。结合预算花完，得到

$$x_1^* = \frac{w}{2p_1}, \quad x_2^* = \frac{w}{2p_2}.$$

这里不需要再比较边界上的所有点，凹性已经保证局部条件足够。

8.6 消费者问题中的 KKT

消费者问题可写为

$$\max_{x \geq 0} u(x) \quad \text{s.t.} \quad p \cdot x \leq w.$$

若暂时忽略非负约束并考虑内点解，Lagrangian 为

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = u(x) - \lambda(p \cdot x - w).$$

一阶条件为

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x^*) = \lambda p_i.$$

因此

$$\frac{MU_i}{p_i} = \lambda.$$

经济含义是：最优点处，每一元钱花在任一商品上的边际效用相等。

例 8.5 (互补松弛的经济含义). 消费者预算约束为 $p \cdot x \leq w$ ，乘子为 λ 。互补松弛写作

$$\lambda(w - p \cdot x) = 0.$$

如果预算没花完， $w - p \cdot x > 0$ ，则必须 $\lambda = 0$ ，财富的边际价值为零。若偏好局部非饱和，财富总有正价值，于是 $\lambda > 0$ ，这迫使预算花完。

8.7 企业成本最小化

成本最小化问题为

$$c(w, y) = \min_x w \cdot x \quad \text{s.t.} \quad F(x) \geq y.$$

可写为最大化 $-w \cdot x$ 或直接使用最小化版本。乘子衡量产量约束的边际成本。KKT 条件给出：

$$w_i = \lambda \frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*),$$

即投入价格等于产量影子价值乘以边际产出。

例 8.6 (成本最小化的乘子). 企业最小化 $w_1x_1 + w_2x_2$, 约束 $f(x) \geq y$ 。Lagrangian 可写为

$$\mathcal{L} = w \cdot x + \lambda(y - f(x)).$$

内点一阶条件为 $w_i = \lambda f_i(x)$ 。所以

$$\frac{f_i(x)}{f_j(x)} = \frac{w_i}{w_j}.$$

这就是边际技术替代率等于投入价格比：最后一元钱在各投入上的产出贡献被拉平。

8.8 对偶函数与弱对偶

考虑最小化形式：

$$\min_x f(x) \quad \text{s.t.} \quad g_i(x) \leq 0.$$

Lagrangian 为

$$\mathcal{L}(x, \mu) = f(x) + \sum_i \mu_i g_i(x), \quad \mu_i \geq 0.$$

对偶函数定义为

$$q(\mu) = \inf_x \mathcal{L}(x, \mu).$$

命题 8.2 (弱对偶). 对任意 $\mu \geq 0$, $q(\mu)$ 都是原问题最优值的下界。

证明. 若 x 原始可行, 则 $g_i(x) \leq 0$, 且 $\mu_i \geq 0$, 所以

$$\mathcal{L}(x, \mu) = f(x) + \sum_i \mu_i g_i(x) \leq f(x).$$

因此

$$q(\mu) = \inf_z \mathcal{L}(z, \mu) \leq \mathcal{L}(x, \mu) \leq f(x).$$

对所有可行 x 成立, 故 $q(\mu)$ 不超过原问题最优值。 □

弱对偶说明, 对偶问题给出原问题的界。强对偶则说明在良好凸性和约束资格下, 这个界可以达到。

例 8.7 (对偶给出影子价格). 考虑

$$\min_{x \geq 0} 2x \quad \text{s.t.} \quad x \geq y.$$

显然最优为 $x^* = y$, 成本为 $c(y) = 2y$ 。约束的影子价格是

$$c'(y) = 2.$$

也就是说, 目标产量 y 增加一单位, 最低成本增加 2。对偶乘子正是在记录这种边际价值。

8.9 强对偶与鞍点

在凸优化中, 若目标和约束满足适当凸性, 并且 Slater 条件成立, 通常有强对偶: 原问题最优值等于对偶问题最优值。

鞍点形式写为

$$\mathcal{L}(x^*, \mu) \leq \mathcal{L}(x^*, \mu^*) \leq \mathcal{L}(x, \mu^*)$$

或在最大化约定下相应改变方向。鞍点表达了一个经济事实: 最优选择和正确价格同时稳定, 任何一方单方面偏离都不能改善相应目标。

8.10 资产组合中的约束优化

均值-方差问题可写为

$$\max_w \mu^\top w - \frac{\gamma}{2} w^\top \Sigma w \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{1}^\top w = 1.$$

Lagrangian 为

$$\mathcal{L}(w, \lambda) = \mu^\top w - \frac{\gamma}{2} w^\top \Sigma w - \lambda(\mathbf{1}^\top w - 1).$$

一阶条件为

$$\mu - \gamma \Sigma w - \lambda \mathbf{1} = 0.$$

这说明最优组合权重由预期收益、风险矩阵、风险厌恶和预算约束共同决定。

例 8.8 (两资产组合的预算约束). 设两项资产预期收益为 $\mu = (0.08, 0.04)$, 风险矩阵为单位矩阵, 风险厌恶 $\gamma = 2$, 且 $w_1 + w_2 = 1$ 。目标为

$$0.08w_1 + 0.04w_2 - \frac{2}{2}(w_1^2 + w_2^2).$$

用 $w_2 = 1 - w_1$ 代入, 得到一元问题

$$\max_{w_1} 0.08w_1 + 0.04(1 - w_1) - w_1^2 - (1 - w_1)^2.$$

一阶条件为

$$0.04 - 2w_1 + 2(1 - w_1) = 0,$$

所以 $w_1^* = 0.51$ 、 $w_2^* = 0.49$ 。较高预期收益把资产 1 的权重略微推高, 但风险惩罚阻止组合完全押注在单一资产上。

8.11 本章小结

本章将约束优化转化为乘子和对偶语言。KKT 条件把可行性、边际条件和互补松弛统一起来; 乘子提供影子价格解释; 凸性使 KKT 条件成为全局充分条件; 对偶性把约束问题转化为价格问题。下一章将进入格、超模性和单调比较静态, 研究参数变化方向如何影响最优选择方向。

8.12 Exercises

A 类: Lagrangian 与一阶条件

习题 8.1. 写出问题 $\max_x f(x)$ s.t. $h(x) = 0$ 的 Lagrangian。

习题 8.2. 写出问题 $\max_x f(x)$ s.t. $g(x) \leq 0$ 的 KKT 条件。

习题 8.3. 最大化 $\log x$, 约束 $x \leq w$ 。求最优点和乘子。

习题 8.4. 最大化 $-(x - 2)^2$, 约束 $x \leq 5$ 。约束是否绑定?

习题 8.5. 最大化 x , 约束 $x \leq 3$ 。求 KKT 乘子。

B 类: 消费者和企业

习题 8.6. 对 $u(x_1, x_2) = \log x_1 + \log x_2$, 预算 $p_1x_1 + p_2x_2 = w$, 推导一阶条件。

习题 8.7. 解释消费者问题中乘子 λ 的经济含义。

习题 8.8. 设企业利润为 $pf(l) - wl$ 。写出最优劳动需求的一阶条件。

习题 8.9. 设成本最小化问题为 $\min_x w \cdot x$ s.t. $F(x) \geq y$ 。写出 Lagrangian。

习题 8.10. 解释成本最小化中产量约束乘子的经济含义。

C 类：互补松弛与约束资格

- 习题 8.11. 解释互补松弛条件 $\mu_i g_i(x) = 0$ 。
- 习题 8.12. 若 $\mu_i > 0$ ，说明对应约束必须怎样。
- 习题 8.13. 若约束不绑定，乘子应为多少？
- 习题 8.14. 为什么 KKT 条件需要约束资格？
- 习题 8.15. 给出一个约束退化的直观例子。

D 类：对偶

- 习题 8.16. 对最小化问题写出 Lagrangian 和对偶函数定义。
- 习题 8.17. 证明弱对偶的核心不等式。
- 习题 8.18. 什么是强对偶？
- 习题 8.19. Slater 条件的直观含义是什么？
- 习题 8.20. 解释对偶变量为什么可以被看成价格。

E 类：凸优化

- 习题 8.21. 为什么凹最大化加凸可行集时 KKT 条件通常是充分的？
- 习题 8.22. 设 $f(x) = -(x-1)^2$ ，约束 $x \leq 2$ 。验证 KKT 条件并求最优点。
- 习题 8.23. 设 $f(x) = x$ ，约束 $x \leq 1$ 。验证 KKT 条件。
- 习题 8.24. 说明鞍点和强对偶之间的关系。
- 习题 8.25. 解释 KKT 与支撑超平面的关系。

F 类：资产组合与综合

- 习题 8.26. 写出均值-方差问题的 Lagrangian。
- 习题 8.27. 推导 $\mu - \gamma \Sigma w - \lambda \mathbf{1} = 0$ 。
- 习题 8.28. 如果禁止卖空，约束 $w_i \geq 0$ 如何进入 KKT？
- 习题 8.29. 比较 KKT 条件和包络定理的作用。
- 习题 8.30. 本章哪些内容将在消费者理论中再次出现？
- 习题 8.31. 本章哪些内容将在一般均衡和福利定理中再次出现？

8.13 Solutions

本章题解的固定步骤是：先写原始可行性，再写 Lagrangian，然后写驻点条件、乘子非负和互补松弛。遇到经济解释题时，把乘子读成“放松约束的一单位边际价值”。

解答 8.1. 等式约束问题

$$\max_x f(x) \quad \text{s.t.} \quad h(x) = 0$$

可写 Lagrangian

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda h(x).$$

也可以使用 $f(x) + \lambda h(x)$ ，因为 λ 的符号会相应改变。关键是之后的一阶条件和经济解释要保持同一符号约定。

解答 8.2. 对最大化问题

$$\max_x f(x) \quad \text{s.t.} \quad g(x) \leq 0,$$

采用 $\mathcal{L} = f - \mu g$ 、 $\mu \geq 0$ 。KKT 条件包括：

$$g(x^*) \leq 0 \quad (\text{原始可行}),$$

$$\mu^* \geq 0 \quad (\text{对偶可行}),$$

$$\mu^* g(x^*) = 0 \quad (\text{互补松弛}),$$

$$\nabla f(x^*) - \mu^* \nabla g(x^*) = 0 \quad (\text{驻点}).$$

做题时四条缺一不可。

解答 8.3. 问题是最大化 $\log x$ 且 $x \leq w$ 。由于 $\log x$ 单调递增，最优点会把约束用满：

$$x^* = w.$$

写 Lagrangian $\mathcal{L} = \log x - \mu(x - w)$ 。一阶条件为

$$\frac{1}{x} - \mu = 0.$$

代入 $x^* = w$ ，得

$$\mu^* = \frac{1}{w}.$$

乘子表示财富上限放松一单位带来的效用边际增加。

解答 8.4. 无约束最优点为 $x = 2$ ，满足 $2 < 5$ ，所以约束不绑定，乘子为 0。

解答 8.5. 最优点 $x^* = 3$ 。Lagrangian 为 $x - \mu(x - 3)$ ，驻点 $1 - \mu = 0$ ，故 $\mu = 1$ 。

解答 8.6.

$$\mathcal{L} = \log x_1 + \log x_2 - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - w).$$

一阶条件为 $1/x_i = \lambda p_i$ 。

解答 8.7. λ 表示财富约束放松一单位时最优效用的一阶增加，即财富的边际效用。

解答 8.8.

$$pf'(l) - w = 0.$$

边际收益产品等于工资。

解答 8.9. 可写为

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = w \cdot x + \lambda(y - F(x)), \quad \lambda \geq 0.$$

解答 8.10. 它表示产量要求提高一单位时最小成本增加多少，即边际成本。

解答 8.11. 互补松弛写作

$$\mu_i g_i(x) = 0.$$

因为 $\mu_i \geq 0$ 且 $g_i(x) \leq 0$ ，它表达两种可能：若约束松弛，即 $g_i(x) < 0$ ，则必须 $\mu_i = 0$ ；若乘子 $\mu_i > 0$ ，则必须 $g_i(x) = 0$ ，约束绑定。

经济含义是：只有真正限制选择的约束才有正影子价格。

解答 8.12. 若 $\mu_i > 0$ ，则由互补松弛必须有 $g_i(x) = 0$ ，即约束绑定。

解答 8.13. 若 $g_i(x) < 0$ ，则 $\mu_i = 0$ 。

解答 8.14. 因为没有约束资格时，可行集合局部形状可能退化，梯度无法正确描述可行方向，乘子可能不存在或不可靠。

解答 8.15. 例如约束 $x^2 \leq 0$ 在 $x = 0$ 处只有一个可行点，约束梯度为 0，无法给出正常切空间。

解答 8.16. 最小化问题的 Lagrangian 为

$$\mathcal{L}(x, \mu) = f(x) + \sum_i \mu_i g_i(x), \quad \mu_i \geq 0.$$

对偶函数为 $q(\mu) = \inf_x \mathcal{L}(x, \mu)$ 。

解答 8.17. 对最小化问题, Lagrangian 是

$$\mathcal{L}(x, \mu) = f(x) + \sum_i \mu_i g_i(x), \quad \mu_i \geq 0.$$

若 x 可行, 则 $g_i(x) \leq 0$, 所以

$$\sum_i \mu_i g_i(x) \leq 0.$$

因此

$$\mathcal{L}(x, \mu) \leq f(x).$$

又因为 $q(\mu) = \inf_z \mathcal{L}(z, \mu) \leq \mathcal{L}(x, \mu)$, 得到

$$q(\mu) \leq f(x)$$

对所有可行 x 成立。因此 $q(\mu)$ 是原问题最优值的下界。

解答 8.18. 强对偶是指原问题最优值等于对偶问题最优值。

解答 8.19. Slater 条件要求存在严格满足不等式约束的可行点, 从而排除边界退化并支持强对偶。

解答 8.20. 对偶变量衡量约束放松的边际价值, 类似资源、预算或状态约束的价格。

解答 8.21. 凹性使一阶条件给出全局上界, 凸可行集保证局部边际条件对所有可行方向有效。

解答 8.22. 无约束最优点 $x = 1$ 可行且约束不绑定。KKT 乘子为 0, 最优点为 1。

解答 8.23. 最优点为 1。驻点 $1 - \mu = 0$, 所以 $\mu = 1$ 。约束绑定, 互补松弛成立。

解答 8.24. 鞍点表示某个原始变量和对偶变量组合同时最优。存在鞍点通常意味着原问题和对偶问题无间隙, 即强对偶。

解答 8.25. KKT 乘子给出的线性组合可以看作在最优点支撑可行集合或目标上等值集的超平面。

解答 8.26. 均值-方差问题为

$$\max_w \mu^\top w - \frac{\gamma}{2} w^\top \Sigma w \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{1}^\top w = 1.$$

Lagrangian 可写为

$$\mathcal{L}(w, \lambda) = \mu^\top w - \frac{\gamma}{2} w^\top \Sigma w - \lambda(\mathbf{1}^\top w - 1).$$

其中 λ 是预算约束或权重和约束的乘子。

解答 8.27. 对 w 求梯度:

$$\nabla_w \mathcal{L} = \mu - \gamma \Sigma w - \lambda \mathbf{1} = 0.$$

解答 8.28. 禁止卖空是 $w_i \geq 0$, 可写为 $-w_i \leq 0$, 为每个约束引入非负乘子, 并加入互补松弛。

解答 8.29. KKT 用于刻画最优选择本身; 包络定理用于刻画最优值对参数的边际变化。

解答 8.30. 预算约束、非负消费约束、边际效用条件、财富乘子和互补松弛都会再次出现。

解答 8.31. 资源约束、支持价格、规划者问题、福利权重和价格乘子都会在一般均衡和福利定理中再次出现。

8.14 Computation Lab

例 8.9 (一维绑定约束检查). 对问题

$$\max_x x \quad \text{s.t.} \quad x \leq 3,$$

数值搜索会把最优点推到边界 $x = 3$ 。KKT 乘子为 1, 表示约束右端增加一单位, 目标值增加一单位。

例 8.10 (二次规划一阶条件). 对

$$\max_w \mu^\top w - \frac{\gamma}{2} w^\top \Sigma w$$

若无预算约束, 最优解为

$$w^* = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \mu.$$

数值实现时应解线性系统 $\gamma \Sigma w = \mu$, 而不是显式求逆。

例 8.11 (互补松弛的数值诊断). 求解带不等式约束的问题后, 应检查每个约束的 $g_i(x^*)$ 、乘子 μ_i^* 和乘积 $\mu_i^* g_i(x^*)$ 。若互补松弛误差很大, 数值解可能不可靠。

第九章 格、超模性与单调比较静态

9.1 为什么需要单调比较静态

前面几章给出了两种分析路线。可微方法通过一阶条件和隐函数定理计算参数变化的局部效应；凸分析和 KKT 则强调约束、价格和全局最优。本章引入第三种路线：不用求出最优解，也不一定需要可微性，而是通过序结构判断最优选择是否随参数单调变化。

这类问题在经济学中非常常见：税率上升时劳动供给是否下降？生产率上升时投资是否增加？竞争者行动增加时，企业最佳反应是否也增加？进入成本下降时进入者是否更多？这些问题关注的是方向，而不是精确导数。

9.2 偏序与格

定义 9.1 (偏序). 集合 X 上的关系 $\leq$ 是偏序，如果它满足自反性、反对称性和传递性。

定义 9.2 (上确界与下确界). 给定 $x, y \in X$ ，若存在最小的共同上界，记为 $x \vee y$ ，称为 join；若存在最大的共同下界，记为 $x \wedge y$ ，称为 meet。

定义 9.3 (格). 偏序集合 X 是格，如果任意 $x, y \in X$ 都有 $x \vee y$ 和 $x \wedge y$ 。

命题 9.1 ($\mathbb{R}^n$ 的逐坐标序是格). 在 $\mathbb{R}^n$ 上定义 $x \leq y$ 当且仅当 $x_i \leq y_i$ 对所有 i 成立。则 $\mathbb{R}^n$ 是格，且

$$(x \vee y)_i = \max\{x_i, y_i\}, \quad (x \wedge y)_i = \min\{x_i, y_i\}.$$

证明. 逐坐标最大值显然是 x 和 y 的共同上界；任何其他共同上界的每个坐标都不小于它，所以它是最小共同上界。逐坐标最小值的论证类似。□

经济解释是：多维行动或多维状态可以逐坐标比较。两个政策向量的 join 表示逐项取更高政策强度，meet 表示逐项取更低政策强度。

例 9.1 (政策向量的 join 和 meet). 设政策向量的两个坐标分别表示税率和补贴, 并取 $x = (0.2, 1)$ 、 $y = (0.3, 0.5)$ 。逐坐标序下,

$$x \vee y = (0.3, 1), \quad x \wedge y = (0.2, 0.5).$$

$x \vee y$ 表示把两套政策中每一项更高的强度合并起来, $x \wedge y$ 表示每一项取更低强度。格结构让“高政策”和“低政策”在多维情形中仍有精确定义。

9.3 超模函数

定义 9.4 (超模函数). 设 X 是格。函数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是超模的, 如果对任意 $x, y \in X$,

$$f(x \vee y) + f(x \wedge y) \geq f(x) + f(y).$$

超模性表达互补性: 一个维度更高时, 提高另一个维度的边际收益更大。在二维选择中, 它常意味着两个行动相互强化。

定义 9.5 (次模函数). 若上式反向成立, 则称 f 是次模的。

次模性表达替代性: 一个维度更高时, 提高另一个维度的边际收益更小。

例 9.2 (二维超模收益). 令

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2, \quad x_i \in \{0, 1\}.$$

取 $x = (1, 0)$ 、 $y = (0, 1)$, 则 $x \vee y = (1, 1)$ 、 $x \wedge y = (0, 0)$ 。有

$$f(x \vee y) + f(x \wedge y) = 1 + 0 \geq f(x) + f(y) = 0 + 0.$$

这说明两个行动是互补的: 单独提高一个行动没有收益, 两个行动同时提高才产生收益。

9.4 Increasing Differences

定义 9.6 (Increasing Differences). 设 X, T 都有序。函数 $f: X \times T \rightarrow \mathbb{R}$ 在 (x, t) 上具有 increasing differences, 如果对任意 $x' \geq x$ 、 $t' \geq t$,

$$f(x', t') - f(x, t') \geq f(x', t) - f(x, t).$$

这表示参数 t 越高, 选择更高 x 的相对收益越大。因此最优选择往往随参数上升而上升。

命题 9.2 (可微充分条件). 若 $f(x, t)$ 二阶连续可微, 且

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(x, t) \geq 0$$

对所有 (x, t) 成立, 则 f 具有 *increasing differences*。

证明. 对 $x' > x$, 定义

$$\Delta(t) = f(x', t) - f(x, t).$$

则

$$\Delta'(t) = f_t(x', t) - f_t(x, t) = \int_x^{x'} f_{xt}(s, t) ds \geq 0.$$

因此 $\Delta(t)$ 随 t 增加, 得到 *increasing differences*。 □

例 9.3 (用差分检验 *increasing differences*). 令 $X = \{0, 1\}$ 、 $T = \{0, 1\}$, 收益表为

	$t = 0$	$t = 1$
$x = 0$	0	0
$x = 1$	1	3

当 $t = 0$ 时, 提高 x 的收益增量为 1; 当 $t = 1$ 时, 提高 x 的收益增量为 3。增量随 t 上升而上升, 因此具有 *increasing differences*。

9.5 Topkis 单调性定理

定理 9.1 (Topkis 定理, 有限格版本). 设 X 是有限格, T 是有序参数集合。若 $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$ 对 x 超模, 并且在 (x, t) 上具有 *increasing differences*, 则最优选择对应

$$G(t) = \arg \max_{x \in X} f(x, t)$$

具有单调选择。特别地, 最大选择和最小选择都随 t 单调不减。

证明. 给出有限格情形的证明思路。取 $t' \geq t$, 令 $x \in G(t)$, $x' \in G(t')$ 。超模性保证 $x \vee x'$ 和 $x \wedge x'$ 的组合收益不低于交叉组合。*Increasing differences* 保证当参数从 t 升到 t' 时, 较高行动的相对吸引力上升。将最优性不等式与这两个性质结合, 可推出最高最优选择不会下降。有限格保证最大和最小最优选择存在。 □

Topkis 定理的价值在于, 它不要求最优解唯一, 也不要求可微。它直接给出最优选择集合的单调结构。

例 9.4 (最大最优选择不下降). 令行动集 $X = \{0, 1, 2\}$, 收益为

$$f(x, t) = tx - x^2, \quad t \in \{1, 3\}.$$

当 $t = 1$ 时, 三个行动的收益分别为 $0, 0, -2$, 最优集合为 $\{0, 1\}$, 最大最优选择是 1。当 $t = 3$ 时, 收益分别为 $0, 2, 2$, 最优集合为 $\{1, 2\}$, 最大最优选择是 2。参数上升后, 最大最优选择从 1 升到 2, 没有下降。

例 9.5 (离散投资阈值). 企业选择 $I \in \{0, 1\}$, 收益为

$$\pi(I, z) = Iz - cI.$$

若 $z < c$, 最优为 $I = 0$; 若 $z > c$, 最优为 $I = 1$; 若 $z = c$, 两个选择都最优。最优投资对应随生产率 z 单调上升。这个例子展示了格方法对离散选择特别自然。

9.6 战略互补

在博弈中, 若玩家 i 的收益 $u_i(a_i, a_{-i})$ 对自己的行动 a_i 和他人行动 a_{-i} 具有 increasing differences, 则他人行动越高, 自己选择高行动的收益越大。此时最佳反应通常单调上升, 称为战略互补。

价格竞争中的提价互补、技术采用中的网络效应、平台参与中的双边反馈, 都可用战略互补描述。

例 9.6 (战略互补的最佳反应). 两企业选择 $a_i \in [0, 1]$, 收益为

$$u_i(a_i, a_j) = a_i a_j - \frac{1}{2} a_i^2.$$

内点一阶条件给出 $a_i = a_j$ 。加上区间约束, 最佳反应为 $b_i(a_j) = a_j$ 。对手行动越高, 自己的最佳反应越高, 因此这是战略互补。

9.7 投资、进入与政策比较

设企业选择投资 I , 生产率参数为 z 。若利润函数 $\pi(I, z)$ 具有 increasing differences, 则生产率越高, 投资的边际收益越大, 最优投资随生产率上升而上升。

设企业进入收益为

$$\Pi(e, c) = R(e) - ce,$$

其中 $e \in \{0, 1\}$ 表示是否进入, c 是进入成本。若成本下降, 则进入的相对收益上升, 最优进入决策单调增加。这类离散选择问题正是格方法的优势所在。

例 9.7 (进入成本下降的阈值). 设进入收益为

$$\Pi(e, c) = 10e - ce, \quad e \in \{0, 1\}.$$

不进入的收益为 0, 进入的收益为 $10 - c$ 。若 $c > 10$, 最优选择是不进入; 若 $c < 10$, 最优选择是进入; 若 $c = 10$, 两者都最优。因此当进入成本从 12 降到 8 时, 最优进入选择从 0 跳到 1。这个跳跃不需要导数, 却有明确的单调方向。

9.8 与可微比较静态的关系

隐函数方法通常给出

$$\frac{dx^*}{dt} = -\frac{F_t}{F_x}.$$

这要求最优选择单值、可微且二阶条件良好。单调比较静态则更粗但更稳健: 它关心 $x^*(t)$ 是否随 t 单调, 而不要求导数存在。

因此, 本章方法特别适合处理不可微、多值、离散选择和博弈最佳反应。

例 9.8 (战略替代不能用同一结论). 若收益改为

$$u_i(a_i, a_j) = a_i(1 - a_j) - \frac{1}{2}a_i^2,$$

一阶条件为 $a_i = 1 - a_j$ 。对手行动越高, 自己的最佳反应越低。这是战略替代, Topkis 的单调上升结论不适用。模型结构变了, 比较静态方向也随之改变。

9.9 本章小结

本章建立了单调比较静态的基本语言。格提供有序选择空间; 超模性表达行动之间的互补; increasing differences 表达参数提高时高行动相对收益上升; Topkis 定理把这些性质转化为最优选择的单调性。后续产业组织、博弈、宏观投资和搜索模型都会使用这一思想。

9.10 Exercises

A 类: 格与序

习题 9.1. 在 $\mathbb{R}^2$ 逐坐标序下, 求 $x = (2, 5)$ 、 $y = (3, 1)$ 的 $x \vee y$ 和 $x \wedge y$ 。

习题 9.2. 判断 $(1, 3)$ 和 $(2, 2)$ 在逐坐标序下是否可比较。

习题 9.3. 证明 $\mathbb{R}$ 在通常大小关系下是格。

习题 9.4. 说明为什么离散集合 $\{0, 1\}^n$ 在逐坐标序下是格。

习题 9.5. 给出一个偏序但不是全序的经济例子。

B 类：超模性

习题 9.6. 验证 $f(x, y) = xy$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上具有 increasing differences。

习题 9.7. 验证 $f(x, y) = -xy$ 具有 decreasing differences。

习题 9.8. 若 $f_{xy} \geq 0$ ，说明经济含义。

习题 9.9. 判断 $f(x, y) = x + y$ 是否超模。

习题 9.10. 判断 $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ 是否具有互补性。

C 类：Increasing Differences

习题 9.11. 设 $f(x, t) = xt - x^2$ 。求最优 x 并判断其是否随 t 上升。

习题 9.12. 设 $f(x, t) = -xt - x^2$ 。判断最优 x 如何随 t 变化。

习题 9.13. 解释 increasing differences 与交叉偏导数的关系。

习题 9.14. 给出一个不可微但可能具有单调比较静态的例子。

习题 9.15. 为什么 increasing differences 比单纯一阶条件更适合离散选择？

D 类：Topkis 定理

习题 9.16. 陈述 Topkis 定理的经济含义。

习题 9.17. 为什么有限格上最大最优选择存在？

习题 9.18. 若最优选择不唯一，Topkis 定理还能给出什么结论？

习题 9.19. 解释单调选择和唯一选择的区别。

习题 9.20. 比较 Topkis 方法和隐函数方法。

E 类：经济应用

习题 9.21. 在投资模型中，若生产率提高增加投资边际收益，说明最优投资方向。

习题 9.22. 在进入模型 $ze - ce$ 中，进入决策如何随 z 变化？

习题 9.23. 在进入模型 $ze - ce$ 中，进入决策如何随 c 变化？

习题 9.24. 解释战略互补的含义。

习题 9.25. 解释战略替代的含义。

F 类：综合

习题 9.26. 为什么格方法适合多值最优选择？

习题 9.27. 为什么格方法适合不可微目标函数？

习题 9.28. 说明超模性如何帮助证明均衡比较静态。

习题 9.29. 本章哪些内容将在博弈论中再次出现？

习题 9.30. 本章哪些内容将在动态投资或搜索模型中再次出现？

9.11 Solutions

本章题解的主线是序结构。先确认选择集合是否有偏序或格结构，再检查超模性或 increasing differences，最后用单调选择或 Topkis 直觉解释比较静态方向。

解答 9.1. 在逐坐标序下，join 是逐坐标最大值，meet 是逐坐标最小值。因此若两个向量的对应坐标分别为 $(2, 5)$ 和 $(3, 1)$ ，则

$$x \vee y = (3, 5), \quad x \wedge y = (2, 1).$$

这个计算是格方法的基本操作。

解答 9.2. 不可比较，因为第一个向量第一坐标较低但第二坐标较高。

解答 9.3. 任意两个实数 x, y 的 join 为 $\max\{x, y\}$ ，meet 为 $\min\{x, y\}$ ，所以是格。

解答 9.4. 任意两个 0-1 向量逐坐标取最大和最小后仍是 0-1 向量，因此 join 和 meet 都存在。

解答 9.5. 多商品消费束在逐坐标序下通常只是偏序。例如一个消费束有更多食物但更少住房，另一个相反，二者不可比较。

解答 9.6. 若 f 二阶可微，检验 increasing differences 的常用充分条件是交叉偏导数非负。这里

$$f_{xy} = 1 > 0.$$

因此一个变量越高，提高另一个变量的边际收益越大，函数具有 increasing differences。

解答 9.7. 交叉偏导数为 $-1 < 0$ ，所以具有 decreasing differences。

解答 9.8. 一个变量越高，提高另一个变量的边际收益越大，表示互补性。

解答 9.9. 它既超模也次模，因为交叉项为零，交叉偏导数为 0。

解答 9.10. 交叉偏导数为 $1 > 0$ ，所以具有互补性。

解答 9.11. 最大化 $f(x, t) = tx - x^2$ 。一阶条件为

$$\frac{\partial f}{\partial x} = t - 2x = 0.$$

所以

$$x^*(t) = t/2.$$

由于 $dx^*/dt = 1/2 > 0$ ，最优选择随参数 t 上升。这与 increasing differences 的方向判断一致。

解答 9.12. 一阶条件 $-t - 2x = 0$ ，所以 $x^* = -t/2$ ，随 t 上升而下降。

解答 9.13. 在二阶可微情形，非负交叉偏导数是 increasing differences 的充分条件。

解答 9.14. 例如 $f(x, t) = tx - |x|$ 。它在 $x = 0$ 不可微，但最优选择随 t 具有单调结构。

解答 9.15. 离散选择没有导数，因此不能依赖交叉偏导数。但 increasing differences 的定义本身是差分形式：

$$f(x', t') - f(x, t') \geq f(x', t) - f(x, t).$$

它只比较“高选择相对低选择的收益差”如何随参数变化。因此即使 $x \in \{0, 1\}$ ，仍然可以用这个差分不等式判断单调比较静态。

解答 9.16. 若目标函数具有互补性和 increasing differences，则参数上升会使较高选择更有吸引力，最优选择可单调上升。

解答 9.17. 有限集合的任意非空子集都有最大元素，因此最优集合的最大选择存在。

解答 9.18. 它通常保证最大最优选择和最小最优选择随参数单调。

解答 9.19. 唯一选择要求每个参数下只有一个最优点；单调选择只要求能选出随参数单调变化的最优点。

解答 9.20. 隐函数方法通常从一阶条件 $F(x, t) = 0$ 出发，需要可微性、局部唯一性和 $F_x \neq 0$ ，结论是局部导数

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{F_t}{F_x}.$$

Topkis 方法不要求导数，也允许多值和离散选择；它用 increasing differences 和格结构给出最优选择随参数单调的方向。代价是它通常不给精确导数，只给方向性结论。

解答 9.21. 若生产率提高增加投资边际收益，则最优投资随生产率上升。

解答 9.22. 当 z 上升，进入收益增加，进入决策从不进入转向进入，单调不减。

解答 9.23. 若进入收益为

$$\Pi(e, c) = Re - ce, \quad e \in \{0, 1\},$$

进入相对不进入的收益差为

$$\Pi(1, c) - \Pi(0, c) = R - c.$$

当 c 上升，这个差下降，所以进入更不利。最优进入决策随成本 c 单调不增。

解答 9.24. 战略互补表示他人行动越高，自己的高行动越有吸引力，最佳反应上升。

解答 9.25. 战略替代表示他人行动越高，自己的高行动越不利，最佳反应下降。

解答 9.26. 因为格方法直接处理最优集合，并可研究最大和最小选择的单调性，不要求唯一最优。

解答 9.27. 它基于序和差分比较，而不是导数，因此适合不可微目标。

解答 9.28. 若各玩家最佳反应单调，均衡集合也常具有单调比较静态结构。

解答 9.29. 战略互补、最佳反应对应、单调均衡选择和超模博弈会再次出现。

解答 9.30. 状态和行动的单调性、投资随生产率变化、搜索保留工资随参数变化等都会再次出现。

9.12 Computation Lab

例 9.9 (有限格上的 argmax). 令 $X = \{0, 1, 2\}$, $f(x, t) = xt - x^2$. 对每个 t 枚举三个 x , 记录最大化点, 可以观察最优选择随 t 单调上升。

例 9.10 (最佳反应表). 在二人博弈中, 可以把对手行动 a_j 离散为网格, 对每个 a_j 枚举自己的最优行动 a_i . 若最佳反应表随 a_j 单调上升, 就呈现战略互补。

例 9.11 (多值最优的选择规则). 若某些参数下有多个最优点, 数值程序可以分别记录最小最优选择和最大最优选择。Topkis 定理关心的正是这些选择的单调性。

第十章 偏好、效用与需求理论

10.1 从选择关系到消费者问题

经济学中的消费者理论不是从效用函数开始，而是从比较开始。给定消费集 $X \subseteq \mathbb{R}_+^L$ ，消费者面对两个消费束 $x, y \in X$ 时，可以说 x 至少和 y 一样好，记为 $x \succsim y$ 。效用函数只是这种比较关系的数值表示。

这种顺序很重要。若先写下某个函数 $u(x)$ ，容易误以为效用的数值大小和单位本身有含义；若先写偏好，则会看到核心对象是排序，而不是数值。

10.2 偏好关系

定义 10.1 (偏好关系). 消费集 X 上的偏好关系是一个二元关系 $\succsim \subseteq X \times X$ 。若 $x \succsim y$ ，读作 x 至少和 y 一样好。

定义 10.2 (严格偏好与无差异). 给定偏好 $\succsim$ ，定义

$$x \succ y \iff x \succsim y \text{ 且不是 } y \succsim x,$$

并定义

$$x \sim y \iff x \succsim y \text{ 且 } y \succsim x.$$

定义 10.3 (理性偏好). 偏好 $\succsim$ 是理性的，如果它满足：

1. 完备性：对任意 $x, y \in X$ ，有 $x \succsim y$ 或 $y \succsim x$ 。
2. 传递性：若 $x \succ y$ 且 $y \succ z$ ，则 $x \succ z$ 。

完备性保证消费者可以比较任意两个消费束；传递性排除循环选择。两者共同使偏好成为可用于优化的排序结构。

10.3 效用表示

定义 10.4 (效用表示). 函数 $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ 表示偏好 $\succ$, 如果对任意 $x, y \in X$,

$$x \succ y \iff u(x) \geq u(y).$$

效用表示不是唯一的。若 u 表示 $\succ$, 且 $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 严格递增, 则 $\phi \circ u$ 也表示同一个偏好。经济含义是: 序数效用只记录排序, 不记录强度单位。

例 10.1 (单调变换不改变偏好). 令 $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$, 并取严格递增函数 $\phi(t) = \log t$ 。在 $x_1, x_2 > 0$ 上,

$$\phi(u(x)) = \log x_1 + \log x_2.$$

若 $u(x) \geq u(y)$, 则 $\log u(x) \geq \log u(y)$; 反过来也成立。因此 $x_1 x_2$ 和 $\log x_1 + \log x_2$ 表示同一偏好。后者更容易求导, 但它没有改变消费者的排序。

命题 10.1 (有限集上的效用表示). 若 X 是有限集, 且 $\succ$ 完备、传递, 则存在效用函数 $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ 表示 $\succ$ 。

证明. 把 $x \in X$ 的效用定义为不严格劣于 x 的元素个数:

$$u(x) = \#\{y \in X : x \succ y\}.$$

若 $x \succ y$, 则由传递性, 凡是 $y \succ z$ 的 z , 也有 $x \succ z$, 所以 $u(x) \geq u(y)$ 。反过来, 若不是 $x \succ y$, 完备性给出 $y \succ x$, 于是 y 严格排在 x 前, 计数排序给出 $u(y) > u(x)$ 。因此 $u(x) \geq u(y)$ 当且仅当 $x \succ y$ 。□

在无限消费集上, 理性偏好未必能由连续效用表示。连续性假设正是为了把偏好和拓扑结构连接起来。

10.4 连续性、单调性与凸性

定义 10.5 (连续偏好). 若对任意 $x \in X$, 集合

$$\{y \in X : y \succ x\}, \quad \{y \in X : x \succ y\}$$

都是闭集, 则称偏好 $\succ$ 连续。

连续性排除突跳式排序。词典序偏好满足完备性和传递性, 却不能由通常拓扑下的连续效用表示, 正是因为它对第一坐标的微小差异赋予绝对优先权。

定义 10.6 (单调性与局部非饱和). 若 $x \geq y$ 且 $x \neq y$ 蕴含 $x \succ y$, 则偏好强单调。若对任意 $x \in X$ 和任意邻域 U 都存在 $y \in U \cap X$ 使 $y \succ x$, 则偏好局部非饱和。

强单调性说更多商品总是更好；局部非饱和性弱一些，只要求任一点附近总能找到更好的消费束。消费者理论中，局部非饱和性常用于证明预算约束会被花完。

定义 10.7 (凸偏好). 偏好 $\succ$ 是凸的，如果对任意 $x \in X$, 上等值集

$$U(x) = \{y \in X : y \succ x\}$$

是凸集。若对任意 $y, z \succ x$ 、 $y \neq z$ 和 $\lambda \in (0, 1)$, 有

$$\lambda y + (1 - \lambda)z \succ x,$$

则偏好严格凸。

凸偏好表达多样化偏好：两个都足够好的消费束，其混合也足够好。若效用函数 u 表示偏好，则凸偏好等价于 u 的上水平集凸，也就是 u 拟凹。

例 10.2 (凸偏好的混合读法). 设效用为 $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$ 。消费束 $y = (2, 4)$ 和 $z = (4, 2)$ 都达到效用 2。它们的平均为

$$\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = (3, 3),$$

效用为 3，严格高于 2。这说明消费者喜欢把两种互补商品配平；两个足够好的消费束混合后反而更好，是凸偏好的典型表现。

10.5 预算集与消费者问题

给定价格 $p \in \mathbb{R}_{++}^L$ 和财富 $w \geq 0$, 预算集为

$$B(p, w) = \{x \in \mathbb{R}_+^L : p \cdot x \leq w\}.$$

消费者问题是

$$\max_{x \in B(p, w)} u(x).$$

例 10.3 (画预算线并读出截距). 若 $p_1 = 2$ 、 $p_2 = 4$ 、 $w = 16$, 预算线为

$$2x_1 + 4x_2 = 16.$$

令 $x_2 = 0$, 得 $x_1 = 8$; 令 $x_1 = 0$, 得 $x_2 = 4$ 。斜率为

$$-\frac{p_1}{p_2} = -\frac{1}{2}.$$

价格比给出预算线斜率，也就是市场允许消费者用一种商品交换另一种商品的比率。

命题 10.2 (预算集紧致). 若 $p \gg 0$ 且 $w \geq 0$, 则 $B(p, w)$ 非空、闭、有界, 因此在 $\mathbb{R}^L$ 中紧致。

证明. 零向量属于预算集, 所以非空。预算集由闭半空间和 $\mathbb{R}_+^L$ 的交给出, 所以闭。对任意 $x \in B(p, w)$, 有 $p_l x_l \leq w$, 因此 $0 \leq x_l \leq w/p_l$ 。故预算集有界。由 Heine-Borel 定理, 闭且有界的子集紧致。□

定义 10.8 (Walrasian demand). 给定效用表示 u , Marshallian 或 Walrasian demand 对应定义为

$$X(p, w) = \arg \max_{x \in B(p, w)} u(x).$$

命题 10.3 (需求存在). 若 $p \gg 0$ 、 $w \geq 0$, 且 u 在 $\mathbb{R}_+^L$ 上连续, 则 $X(p, w)$ 非空。

证明. 预算集紧致且非空, 连续函数在紧集上达到最大值。□

例 10.4 (连续性保证需求达到). 令 $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, 价格 $p = (1, 2)$, 财富 $w = 4$ 。预算集是闭且有界的三角形, 效用函数连续, 所以最优解一定存在。直接比较每元效用: 商品 1 每元带来 1 单位效用, 商品 2 每元带来 1/2 单位效用, 因此最优为

$$x^* = (4, 0).$$

存在性命题先保证“最大值在预算集内达到”, 再由具体效用和价格读出最优点。

10.6 需求的基本性质

命题 10.4 (Walras 法则). 若偏好局部非饱和, 且 $x \in X(p, w)$, 则

$$p \cdot x = w.$$

证明. 若 $p \cdot x < w$, 则因为预算不等式有松弛, 在 x 的充分小邻域内仍存在可行消费束。局部非饱和性给出某个 y 满足 $y \succ x$ 且 $p \cdot y \leq w$, 这与 x 最优矛盾。□

命题 10.5 (零次齐次性). 对任意 $\alpha > 0$, 有

$$B(\alpha p, \alpha w) = B(p, w),$$

因此

$$X(\alpha p, \alpha w) = X(p, w).$$

证明. 因为 $\alpha p \cdot x \leq \alpha w$ 当且仅当 $p \cdot x \leq w$, 两个预算集相同, 最优解集合也相同。□

命题 10.6 (凸值需求). 若偏好凸, 且 $x, y \in X(p, w)$, 则对任意 $\lambda \in [0, 1]$,

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in X(p, w).$$

证明. 预算集是凸集, 所以混合消费束可行。由于 x 与 y 都最优, 二者彼此无差异。凸偏好说明二者的混合至少和 x 一样好, 因此也达到最大效用。□

若偏好严格凸, 则需求至多单值。结合连续效用和紧预算集, 可以得到唯一需求函数。

例 10.5 (Cobb-Douglas 需求的完整推导). 最大化

$$\alpha \log x_1 + (1 - \alpha) \log x_2$$

且 $p_1 x_1 + p_2 x_2 = w$ 。Lagrangian 为

$$\mathcal{L} = \alpha \log x_1 + (1 - \alpha) \log x_2 + \lambda(w - p_1 x_1 - p_2 x_2).$$

一阶条件为

$$\frac{\alpha}{x_1} = \lambda p_1, \quad \frac{1 - \alpha}{x_2} = \lambda p_2.$$

乘以 x_i 后可知两种商品支出份额分别为 α 和 $1 - \alpha$, 所以

$$x_1^* = \frac{\alpha w}{p_1}, \quad x_2^* = \frac{(1 - \alpha)w}{p_2}.$$

例 10.6 (完全替代的角点). 设 $u(x) = 2x_1 + x_2$, 价格 $p = (1, 1)$, 财富 $w = 10$ 。每花 1 元, 商品 1 带来 2 单位效用, 商品 2 带来 1 单位效用。因此最优选择是

$$x^* = (10, 0).$$

若价格改为 $p = (2, 1)$, 两种商品每元效用都为 1, 预算线上所有点都最优。角点和多值需求都来自同一个线性偏好。

10.7 间接效用、支出函数与对偶

定义 10.9 (间接效用函数). 间接效用函数定义为

$$v(p, w) = \max_{x \in B(p, w)} u(x).$$

它把价格和财富映射到消费者能够达到的最高效用。直接问题给定预算求最大效用; 对偶问题给定目标效用求最小支出。

定义 10.10 (支出函数与 Hicksian demand). 给定效用目标 $\bar{u}$, 支出函数为

$$e(p, \bar{u}) = \min_{x \in \mathbb{R}_+^L} \{p \cdot x : u(x) \geq \bar{u}\}.$$

达到该最小值的消费束称为 Hicksian demand, 记为 $h(p, \bar{u})$ 。

Marshallian demand 回答“在财富 w 下买什么”；Hicksian demand 回答“达到效用 $\bar{u}$ 最便宜怎么买”。这正是 Ch07 对偶思想在消费者理论中的具体形态。

例 10.7 (Hicksian demand 的手算). 令 $u(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, 目标效用为 $\bar{u}$ 。支出最小化问题是

$$\min_{x \geq 0} p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad \text{s.t.} \quad x_1 x_2 \geq \bar{u}^2.$$

内点条件给出 $p_1/p_2 = x_2/x_1$, 再结合 $x_1 x_2 = \bar{u}^2$, 得到

$$h_1(p, \bar{u}) = \bar{u} \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}, \quad h_2(p, \bar{u}) = \bar{u} \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}.$$

与 Marshallian demand 不同, 这里财富不是给定的, 而是由达到目标效用所需的最低支出内生决定。

10.8 可微情形的两个恒等式

在内点、单值、可微且正则的情形, 包络定理给出两个重要公式。

命题 10.7 (Roy 恒等式, 形式版). 若 v 可微且 $v_w(p, w) \neq 0$, 则 Marshallian demand 的第 l 个分量满足

$$x_l(p, w) = -\frac{v_{p_l}(p, w)}{v_w(p, w)}.$$

证明. 消费者问题的 Lagrangian 为

$$\mathcal{L} = u(x) + \lambda(w - p \cdot x).$$

包络定理给出 $v_w = \lambda$, 以及 $v_{p_l} = -\lambda x_l$ 。两式相除得到结论。 □

例 10.8 (Roy 恒等式的手算). 设 Cobb-Douglas 间接效用为

$$v(p, w) = C w p_1^{-\alpha} p_2^{-(1-\alpha)}.$$

则

$$v_{p_1} = -\frac{\alpha}{p_1} v, \quad v_w = \frac{v}{w}.$$

Roy 恒等式给出

$$x_1 = -\frac{v_{p_1}}{v_w} = \frac{\alpha w}{p_1}.$$

这说明间接效用对价格的敏感度包含了需求信息。

命题 10.8 (Shephard 引理, 形式版). 若支出函数 e 对 p_l 可微, 且 *Hicksian demand* 单值, 则

$$h_l(p, \bar{u}) = \frac{\partial e(p, \bar{u})}{\partial p_l}.$$

证明. 支出最小化的目标函数是 $p \cdot x$. 在正则情形下应用包络定理, 价格 p_l 的边际变化对最小支出的影响等于最优购买量 h_l . $\square$

10.9 与前面章节的连接

本章几乎调用了第一卷前半部分的全部工具。偏好是关系；预算集是凸紧集合；效用最大化依赖最大值定理；需求对应是参数化最优解；KKT 给出可计算的一阶条件；对偶性解释支出函数；比较静态分析价格、财富和政策参数变化如何影响需求。

10.10 本章小结

消费者理论的数学核心是：用偏好关系描述选择排序，用效用函数表示偏好，用预算集表达约束，用最大化问题定义需求，再通过其对偶问题得到支出函数和补偿需求。下一章将把同样的优化、凸性和对偶语言用于生产者问题。

10.11 Exercises

习题 10.1. 证明由效用函数表示的偏好一定完备且传递。

习题 10.2. 设 u 表示偏好, ϕ 严格递增. 证明 $\phi \circ u$ 表示同一偏好。

习题 10.3. 给定有限集合 $X = \{a, b, c\}$, 偏好满足 $a \succ b \sim c$. 构造一个效用表示。

习题 10.4. 说明为什么完备性不蕴含传递性, 并给出三元素反例。

习题 10.5. 设 $u(x) = x_1 + x_2$. 证明它表示的偏好强单调。

习题 10.6. 设 $u(x) = \min\{x_1, x_2\}$. 该偏好是否强单调? 是否局部非饱和?

习题 10.7. 证明若 u 连续, 则集合 $\{x : u(x) \geq c\}$ 闭。

习题 10.8. 证明凹效用函数表示凸偏好。

习题 10.9. 证明拟凹效用函数表示凸偏好。

习题 10.10. 证明预算集 $B(p, w)$ 是凸集。

习题 10.11. 若某个价格 $p_l = 0$, 预算集一定紧致吗? 解释。

习题 10.12. 证明连续效用在预算集上一定达到最大值。

习题 10.13. 证明局部非饱和偏好下任意最优消费都花完整个预算。

习题 10.14. 证明需求对应关于 (p, w) 零次齐次。

习题 10.15. 若偏好严格凸, 证明需求至多单值。

习题 10.16. 求 $u(x) = x_1 x_2$ 在价格 $p_1, p_2 > 0$ 、财富 $w > 0$ 下的 Marshallian demand。

习题 10.17. 求 $u(x) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ 的 Marshallian demand。

习题 10.18. 求 $u(x) = ax_1 + bx_2$ 的 Marshallian demand, 并讨论三种情形。

习题 10.19. 求 $u(x) = \min\{x_1, 2x_2\}$ 的 Marshallian demand。

习题 10.20. 设 $u(x) = \sqrt{x_1} + x_2$ 、 $p_2 = 1$ 。推导内点需求, 并说明财富太低时可能发生什么。

习题 10.21. 对 Cobb-Douglas demand, 验证 Walras 法则。

习题 10.22. 对 Cobb-Douglas demand, 验证零次齐次性。

习题 10.23. 求 $u(x) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ 的间接效用函数。

习题 10.24. 求 $u(x) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ 的支出函数。

习题 10.25. 对上一题支出函数验证 Shephard 引理。

习题 10.26. 对 Cobb-Douglas 间接效用验证 Roy 恒等式。

习题 10.27. 说明 Marshallian demand 与 Hicksian demand 的区别。

习题 10.28. 若价格 p_1 上升, Cobb-Douglas 中商品 1 的需求如何变化?

习题 10.29. 若财富 w 上升, 完全互补偏好的需求如何变化?

习题 10.30. 解释为什么消费者理论中的对偶问题可以看作 Ch07 对偶思想的应用。

10.12 Solutions

本章题解围绕消费者问题展开。做题时先写预算集，再判断偏好性质；需求计算题通常先判断角点、内点或多值，再用一阶条件、预算约束和 Walras 法则求解。

解答 10.1. 由效用表示的定义， $x \succ y$ 当且仅当 $u(x) \geq u(y)$ 。对任意 x, y ，两个实数 $u(x)$ 与 $u(y)$ 总可以比较大小，因此必有 $u(x) \geq u(y)$ 或 $u(y) \geq u(x)$ ，也就是 $x \succ y$ 或 $y \succ x$ ，所以完备性成立。

再看传递性。若 $x \succ y$ 且 $y \succ z$ ，则

$$u(x) \geq u(y), \quad u(y) \geq u(z).$$

实数序的传递性给出 $u(x) \geq u(z)$ ，于是 $x \succ z$ 。因此任何由实值效用函数表示的偏好必然是完备且传递的。

解答 10.2. 这里要区分“数值”与“排序”。 $\phi \circ u$ 的数值通常不同于 u ，但只要 ϕ 严格递增，它不会改变任意两束商品的高低次序：

$$u(x) \geq u(y) \iff \phi(u(x)) \geq \phi(u(y)).$$

因此

$$x \succ y \iff u(x) \geq u(y) \iff (\phi \circ u)(x) \geq (\phi \circ u)(y).$$

所以 $\phi \circ u$ 诱导同一偏好排序。这也是为什么效用是序数概念：允许严格递增变换。

解答 10.3. 取 $u(a) = 2$ 、 $u(b) = 1$ 、 $u(c) = 1$ 。这正好表示 $a \succ b \sim c$ 。

解答 10.4. 令 $X = \{a, b, c\}$ ，规定 $a \succ b$ 、 $b \succ c$ 、 $c \succ a$ ，并加上自反关系。任意两点可比较，所以完备；但 $a \succ b$ 、 $b \succ c$ 却不是 $a \succ c$ ，传递性失败。

解答 10.5. 强单调要求：如果 $x \geq y$ 且 $x \neq y$ ，则 $x \succ y$ 。现在 $x \geq y$ 表示 $x_1 \geq y_1$ 、 $x_2 \geq y_2$ ，而 $x \neq y$ 表示至少有一个坐标严格大于对应坐标。因此

$$x_1 + x_2 > y_1 + y_2.$$

在 $u(x) = x_1 + x_2$ 下，这意味着 $u(x) > u(y)$ ，所以 $x \succ y$ 。故该偏好强单调。

解答 10.6. 它不是强单调。例如从 $(2, 1)$ 到 $(2, 2)$ 增加第二个商品会提高效用，但从 $(2, 1)$ 到 $(3, 1)$ 效用仍为 1，不严格提高。它局部非饱和，因为在任一点附近同时略微增加两个商品即可提高 $\min\{x_1, x_2\}$ 。

解答 10.7. 集合 $\{x : u(x) \geq c\} = u^{-1}([c, \infty))$ 。由于 $[c, \infty)$ 是闭集，连续函数的闭集原像闭。

解答 10.8. 若 u 凹且 $u(y) \geq u(x)$ 、 $u(z) \geq u(x)$ ，则

$$u(\lambda y + (1 - \lambda)z) \geq \lambda u(y) + (1 - \lambda)u(z) \geq u(x).$$

所以上等值集凸。

解答 10.9. 拟凹性的定义就是对任意 c ，上水平集 $\{x : u(x) \geq c\}$ 是凸集。令 $c = u(x)$ ，得到偏好的上等值集凸。

解答 10.10. 若 $x, y \in B(p, w)$ ，则 $p \cdot x \leq w$ 、 $p \cdot y \leq w$ 。对 $\lambda \in [0, 1]$ ，

$$p \cdot (\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda w + (1 - \lambda)w = w.$$

且非负性保持，所以预算集凸。

解答 10.11. 不一定。若 $p_l = 0$ ，商品 l 可以无限增加而不改变支出，因此预算集可能无界，不能保证紧致。

解答 10.12. 当 $p \gg 0$ 时预算集非空紧致。连续效用在非空紧集上由 Weierstrass 定理达到最大值。

解答 10.13. 设最优束 x 满足 $p \cdot x < w$ 。这说明预算还有正的剩余

$$\varepsilon = w - p \cdot x > 0.$$

由于价格向量 $p \gg 0$ ，只要 y 足够接近 x ，就有 $p \cdot y < w$ ，因此 y 仍可行。局部非饱和性恰好保证在任意小邻域内都存在一个严格更好的 $y \succ x$ 。这与 x 是最优选择矛盾。

所以在局部非饱和偏好和正价格下，任何最优消费束都必须花完预算：

$$p \cdot x = w.$$

解答 10.14. 对任意 $\alpha > 0$ ，

$$\alpha p \cdot x \leq \alpha w \iff p \cdot x \leq w.$$

预算集完全相同，所以最优解对应完全相同。

解答 10.15. 若存在两个不同最优点 x, y ，严格凸偏好给出 $\lambda x + (1 - \lambda)y \succ x$ 。预算集凸，所以该混合可行，矛盾。因此至多一个最优点。

解答 10.16. 最大化 x_1x_2 等价于最大化 $\log x_1 + \log x_2$, 因为 $\log$ 严格递增。局部非饱和性保证预算用尽, 所以约束为 $p_1x_1 + p_2x_2 = w$ 。写 Lagrangian:

$$\mathcal{L} = \log x_1 + \log x_2 + \lambda(w - p_1x_1 - p_2x_2).$$

内点一阶条件给出

$$\frac{1}{x_1} = \lambda p_1, \quad \frac{1}{x_2} = \lambda p_2.$$

两式分别乘以 x_1 、 x_2 , 得到

$$1 = \lambda p_1 x_1, \quad 1 = \lambda p_2 x_2.$$

因此两种商品支出相等。结合预算约束,

$$p_1x_1 = p_2x_2 = \frac{w}{2},$$

从而

$$x_1 = \frac{w}{2p_1}, \quad x_2 = \frac{w}{2p_2}.$$

解答 10.17. 对数化后最大化 $\alpha \log x_1 + (1 - \alpha) \log x_2$ 。一阶条件给出

$$\frac{\alpha}{x_1} = \lambda p_1, \quad \frac{1 - \alpha}{x_2} = \lambda p_2.$$

结合预算约束, 得到

$$x_1 = \frac{\alpha w}{p_1}, \quad x_2 = \frac{(1 - \alpha)w}{p_2}.$$

解答 10.18. 完全替代品 $u(x) = ax_1 + bx_2$ 的关键是比较每一元钱能带来的边际效用:

$$\frac{a}{p_1} \quad \text{与} \quad \frac{b}{p_2}.$$

若 $a/p_1 > b/p_2$, 把钱花在商品 1 上更划算, 需求为 $(w/p_1, 0)$ 。若 $a/p_1 < b/p_2$, 把钱花在商品 2 上更划算, 需求为 $(0, w/p_2)$ 。若二者相等, 消费者沿预算线移动时效用不变, 因此整条预算线都是最优。这个例子提醒我们: 非严格凸偏好可能导致多值需求。

解答 10.19. 最优时 $x_1 = 2x_2$ 。预算约束给出

$$p_1(2x_2) + p_2x_2 = w,$$

所以

$$x_2 = \frac{w}{2p_1 + p_2}, \quad x_1 = \frac{2w}{2p_1 + p_2}.$$

解答 10.20. 内点时

$$\frac{1}{2\sqrt{x_1}} = p_1,$$

所以 $x_1 = 1/(4p_1^2)$, 且 $x_2 = w - p_1x_1$. 若 $w < p_1/(4p_1^2) = 1/(4p_1)$, 财富不足以购买内点最优的 x_1 , 则角点 $x_2 = 0$ 可能出现。

解答 10.21. Cobb-Douglas demand 满足

$$p_1 \frac{\alpha w}{p_1} + p_2 \frac{(1-\alpha)w}{p_2} = \alpha w + (1-\alpha)w = w.$$

解答 10.22. 把 (p, w) 替换为 $(\beta p, \beta w)$, 有

$$x_1 = \frac{\alpha \beta w}{\beta p_1} = \frac{\alpha w}{p_1}, \quad x_2 = \frac{(1-\alpha)\beta w}{\beta p_2} = \frac{(1-\alpha)w}{p_2}.$$

解答 10.23. 由 Cobb-Douglas 公式 $\alpha = 1/2$,

$$x_1 = \frac{w}{2p_1}, \quad x_2 = \frac{w}{2p_2}.$$

代入效用:

$$v(p, w) = \left(\frac{w}{2p_1}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{w}{2p_2}\right)^{1/2} = \frac{w}{2\sqrt{p_1 p_2}}.$$

解答 10.24. 支出最小化问题为

$$\min_{x_1, x_2 \geq 0} p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{x_1 x_2} \geq \bar{u}.$$

在内点, 约束绑定为 $x_1 x_2 = \bar{u}^2$, 切点条件为

$$\frac{MU_1}{MU_2} = \frac{p_1}{p_2} \implies \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}.$$

所以 $x_2 = (p_1/p_2)x_1$. 代入 $x_1 x_2 = \bar{u}^2$, 得到

$$x_1 = \bar{u} \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}, \quad x_2 = \bar{u} \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}.$$

于是

$$e(p, \bar{u}) = 2\bar{u}\sqrt{p_1 p_2}.$$

解答 10.25. 由 $e(p, \bar{u}) = 2\bar{u}\sqrt{p_1 p_2}$,

$$\frac{\partial e}{\partial p_1} = \bar{u} \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}, \quad \frac{\partial e}{\partial p_2} = \bar{u} \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}.$$

这正是达到效用 $\bar{u}$ 的 Hicksian demand。

解答 10.26. 对

$$v(p, w) = C w p_1^{-\alpha} p_2^{-(1-\alpha)}$$

其中 $C = \alpha^\alpha (1 - \alpha)^{1-\alpha}$, 有

$$v_{p_1} = -\alpha v / p_1, \quad v_w = v / w.$$

Roy 恒等式给出

$$-\frac{v_{p_1}}{v_w} = \frac{\alpha w}{p_1},$$

即商品 1 的 Marshallian demand。商品 2 同理。

解答 10.27. Marshallian demand 固定价格和财富, 问“在预算内最喜欢什么”; Hicksian demand 固定价格和目标效用, 问“达到这个效用最便宜怎么买”。因此前者来自

$$\max_x u(x) \quad \text{s.t.} \quad p \cdot x \leq w,$$

后者来自

$$\min_x p \cdot x \quad \text{s.t.} \quad u(x) \geq \bar{u}.$$

价格变化时, Marshallian demand 同时包含替代效应和收入效应; Hicksian demand 把效用水平固定住, 所以只刻画补偿后的替代效应。

解答 10.28. Cobb-Douglas 中 $x_1 = \alpha w / p_1$ 。当 p_1 上升时, x_1 下降, 且弹性为 -1 。

解答 10.29. 对 $u(x) = \min\{x_1, x_2\}$, 需求为 $x_1 = x_2 = w / (p_1 + p_2)$ 。财富 w 上升时两个商品需求按同一比例线性上升。

解答 10.30. 直接问题是在预算约束下最大化效用; 对偶问题是在效用约束下最小化支出。两者通过同一最优消费束和乘子联系, 形式上正是 Ch07 中原问题与对偶问题互相刻画最优值和影子价格的思想。

10.13 Computation Lab

10.13.1 有限网格上的需求

取价格 $p = (1, 2)$ 、财富 $w = 10$, 在网格

$$\{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \{0, 0.1, \dots, 10\}\}$$

上筛选满足 $p \cdot x \leq w$ 的点, 并计算 $u(x) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ 。网格最大点应接近解析解

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 2.5.$$

10.13.2 需求对应的多值性

令 $u(x) = x_1 + x_2$ 、 $p = (1, 1)$ 、 $w = 1$ 。预算线

$$x_1 + x_2 = 1$$

上的每一点都最优。计算实验可以把所有达到最大效用的网格点标出，从而看到需求是集合而不是单个点。

10.13.3 支出最小化

给定 $u(x) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ 、目标效用 $\bar{u} = 2$ 、价格 $p = (1, 4)$ 。在网格上搜索满足 $u(x) \geq 2$ 的消费束，并最小化 $p \cdot x$ 。解析解由

$$h_1 = \bar{u} \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}, \quad h_2 = \bar{u} \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}$$

给出，即 $h = (4, 1)$ 。

10.13.4 Recommended Checks

1. 改变网格精度，检查数值解是否接近解析解。
2. 同时乘大价格和财富，验证 Marshallian demand 不变。
3. 只提高一个价格，观察 Marshallian demand 和 Hicksian demand 的差异。

第十一章 生产、成本与利润理论

11.1 企业问题的数学形式

消费者理论从偏好和预算集出发；生产者理论从技术和价格出发。企业不是选择最喜欢的消费束，而是在可行技术集合内选择利润最高的生产计划，或者在给定产量要求下选择成本最低的投入组合。

本章有两个等价视角。第一是利润最大化：

$$\max_{x \geq 0} pf(x) - w \cdot x,$$

其中 x 是投入， $f(x)$ 是产出， p 是产出价格， w 是投入价格。第二是成本最小化：

$$\min_{x \geq 0} w \cdot x \quad \text{s.t.} \quad f(x) \geq y.$$

前者问“价格给定时生产多少最赚钱”，后者问“要生产 y 至少要花多少钱”。

11.2 生产集与生产函数

定义 11.1 (生产集). 生产集 $Y \subseteq \mathbb{R}^L$ 是所有可行净产出向量的集合。若 $y_l > 0$ ，商品 l 是净产出；若 $y_l < 0$ ，商品 l 是净投入。

生产集语言适合一般均衡，因为它把多投入、多产出统一在一个向量 y 中。单产出企业则常用生产函数。

定义 11.2 (生产函数). 生产函数 $f: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ 把投入向量 x 映射为最大可生产产出 $f(x)$ 。

定义 11.3 (自由处置). 技术满足自由处置，如果可行计划在减少产出或增加投入后仍然可行。对生产函数而言，这意味着若 $x' \geq x$ ，则 $f(x') \geq f(x)$ 。

命题 11.1 (自由处置与单调最大产出). 若技术满足自由处置，则生产函数 f 单调不减： $x' \geq x$ 蕴含 $f(x') \geq f(x)$ 。

证明. 若 x 能生产 $f(x)$, 则投入 $x' \geq x$ 至少可以把多余投入自由处置掉, 复制原计划。因此用 x' 能达到的最大产出不低于 $f(x)$ 。□

例 11.1 (自由处置的生产集图像). 设单投入单产出技术为 $y \leq \sqrt{x}$ 。如果 $(x, y) = (4, 2)$ 可行, 那么 $(5, 2)$ 也可行, 因为多投入可以闲置; $(4, 1.5)$ 也可行, 因为少生产一些产出不违反技术约束。自由处置让可行集合在“更多投入、较少产出”的方向上向外延伸。

定义 11.4 (凸技术). 生产集 Y 是凸的, 如果 $y, z \in Y$ 蕴含 $\lambda y + (1 - \lambda)z \in Y$ 对所有 $\lambda \in [0, 1]$ 成立。

凸技术表示可以混合两种生产计划。对单产出生产函数, 若 f 凹, 则其上图集合具有凸性, 成本最小化问题通常表现良好。

11.3 规模报酬

定义 11.5 (规模报酬). 给定生产函数 f , 若对所有 $t \geq 1$:

$$f(tx) = tf(x),$$

则为常数规模报酬; 若 $f(tx) > tf(x)$, 则为递增规模报酬; 若 $f(tx) < tf(x)$, 则为递减规模报酬。

规模报酬决定利润最大化的形状。常数规模报酬下, 若某个生产计划有正利润, 按比例放大会让利润无界; 若所有计划利润不正, 则最优利润为零, 企业可能选择不生产。

例 11.2 (规模报酬的快速判断). 令 $f(x) = x^\alpha$ 。把投入放大 $t \geq 1$ 倍, 有

$$f(tx) = t^\alpha x^\alpha.$$

若 $\alpha = 1$, 则产出也放大 t 倍, 是常数规模报酬; 若 $\alpha > 1$, 产出放大超过 t 倍, 是递增规模报酬; 若 $0 < \alpha < 1$, 产出放大小于 t 倍, 是递减规模报酬。这个判断直接来自齐次次数。

11.4 利润最大化

设产出价格为 $p > 0$, 投入价格为 $w \gg 0$ 。企业的利润最大化问题为

$$\pi(p, w) = \max_{x \geq 0} \{pf(x) - w \cdot x\}.$$

达到最大值的投入选择称为无条件要素需求, 产出 $f(x)$ 称为供给。

命题 11.2 (内点一阶条件). 若 f 可微且最优投入 $x^* \gg 0$, 则

$$p \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = w_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

证明. 内点最优点使目标函数对每个投入的一阶导数为零:

$$pf_i(x^*) - w_i = 0.$$

这说明投入 i 的边际收益产品等于其价格。 □

若 f 凹, 利润目标 $pf(x) - w \cdot x$ 也是凹函数, 一阶条件不仅必要, 而且在适当正则条件下充分。

例 11.3 (线性技术下的角点供给). 设 $f(x) = ax$, 利润为

$$\pi(x) = pax - wx = (pa - w)x.$$

若 $pa < w$, 每多用一单位投入都会亏损, 最优选择 $x^* = 0$. 若 $pa = w$, 任意产量利润都为零. 若 $pa > w$ 且没有容量约束, 利润随 x 无界上升. 这个例子说明, 线性或常数规模技术下未必有内点一阶条件决定的有限最优解。

例 11.4 (递减报酬下的利润函数). 设 $f(x) = \sqrt{x}$. 利润最大化问题为

$$\max_{x \geq 0} p\sqrt{x} - wx.$$

一阶条件给出 $p/(2\sqrt{x}) = w$, 所以

$$x^* = \frac{p^2}{4w^2}, \quad y^* = \frac{p}{2w}.$$

代回利润:

$$\pi(p, w) = p \frac{p}{2w} - w \frac{p^2}{4w^2} = \frac{p^2}{4w}.$$

11.5 利润函数的性质

定义 11.6 (利润函数). 利润函数定义为

$$\pi(p, w) = \sup_{x \geq 0} \{pf(x) - w \cdot x\}.$$

命题 11.3 (利润函数一次齐次). 对任意 $\alpha > 0$,

$$\pi(\alpha p, \alpha w) = \alpha \pi(p, w).$$

证明. 对任意 x , 有

$$\alpha pf(x) - \alpha w \cdot x = \alpha \{pf(x) - w \cdot x\}.$$

对 x 取上确界即得结论。 $\square$

例 11.5 (Hotelling 引理的手算). 若上一例中 $\pi(p, w) = p^2/(4w)$, 则

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} = \frac{p}{2w} = y^*, \quad -\frac{\partial \pi}{\partial w} = \frac{p^2}{4w^2} = x^*.$$

利润函数对产出价格的导数给出供给, 对投入价格导数的相反数给出投入需求。

命题 11.4 (利润函数关于价格凸). 把所有商品价格写成向量 q , 利润函数可写为

$$\pi(q) = \sup_{y \in Y} q \cdot y.$$

则 π 关于 q 是凸函数。

证明. 对每个固定 y , 函数 $q \mapsto q \cdot y$ 是线性的。线性函数族的逐点上确界是凸函数。 $\square$

例 11.6 (Cobb-Douglas 成本最小化推导). 设 $f(x) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, 目标产量为 y 。最小化

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 \quad \text{s.t.} \quad x_1^{1/2} x_2^{1/2} \geq y.$$

内点条件给出

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{w_1}{w_2}, \quad x_1 x_2 = y^2.$$

解得

$$x_1^c = y \sqrt{\frac{w_2}{w_1}}, \quad x_2^c = y \sqrt{\frac{w_1}{w_2}},$$

成本为 $c(w, y) = 2y\sqrt{w_1 w_2}$ 。

例 11.7 (Shephard 引理读出条件要素需求). 由上一个 Cobb-Douglas 成本函数

$$c(w, y) = 2y\sqrt{w_1 w_2}$$

可得

$$\frac{\partial c}{\partial w_1} = y \sqrt{\frac{w_2}{w_1}}, \quad \frac{\partial c}{\partial w_2} = y \sqrt{\frac{w_1}{w_2}}.$$

这正好等于条件要素需求 x_1^c, x_2^c 。因此成本函数不只是一个最小支出数值, 它的价格导数还记录了企业在成本最小化时使用多少投入。

命题 11.5 (Hotelling 引理, 形式版). 若利润函数 $\pi(q)$ 在 q 处可微, 且最优净供给唯一为 $y(q)$, 则

$$\nabla_q \pi(q) = y(q).$$

证明. 利润函数是值函数 $\sup_{y \in Y} q \cdot y$ 。在唯一最优和可微正则条件下应用包络定理, 价格 q_l 的边际变化对最大利润的影响等于最优净供给 $y_l(q)$ 。 $\square$

11.6 成本最小化

给定目标产量 $y \geq 0$ ，成本最小化问题为

$$c(w, y) = \min_{x \geq 0} \{w \cdot x : f(x) \geq y\}.$$

达到最小值的投入向量称为条件要素需求，记为 $x^c(w, y)$ 。

命题 11.6 (成本函数一次齐次). 对任意 $\alpha > 0$,

$$c(\alpha w, y) = \alpha c(w, y).$$

证明. 可行集合 $\{x : f(x) \geq y\}$ 不随投入价格变化。目标函数从 $w \cdot x$ 变成 $\alpha w \cdot x$ ，所以最小值乘以 α 。□

命题 11.7 (成本函数关于投入价格凹). 对固定 y ，函数 $w \mapsto c(w, y)$ 是凹函数。

证明. 成本函数是可行投入集合上所有线性函数 $w \mapsto w \cdot x$ 的逐点下确界。线性函数族的逐点下确界是凹函数。等价地，设 $w = \lambda w^1 + (1 - \lambda)w^2$ ，则

$$c(w, y) = \inf_x \{\lambda w^1 \cdot x + (1 - \lambda)w^2 \cdot x\} \geq \lambda c(w^1, y) + (1 - \lambda)c(w^2, y).$$

□

命题 11.8 (Shephard 引理，形式版). 若成本函数 $c(w, y)$ 对 w_i 可微，且条件要素需求唯一，则

$$\frac{\partial c(w, y)}{\partial w_i} = x_i^c(w, y).$$

证明. 成本最小化的目标函数是 $w \cdot x$ 。在唯一最优和可微正则条件下应用包络定理，投入价格 w_i 的边际变化对最小成本的影响等于最优使用量 x_i^c 。□

11.7 成本与利润的对偶

利润最大化可以分两步看：先问生产 y 的最小成本 $c(w, y)$ ，再选择最优产量：

$$\pi(p, w) = \sup_{y \geq 0} \{py - c(w, y)\}.$$

若 c 可微且内点产量最优，则

$$p = \frac{\partial c(w, y)}{\partial y}.$$

也就是说，竞争性企业选择边际成本等于产出价格的产量。

这与消费者理论完全平行。消费者直接问题给出间接效用，支出最小化给出支出函数；企业直接问题给出利润函数，成本最小化给出成本函数。

例 11.8 (边际成本曲线给出供给). 设成本函数

$$c(y) = 10 + y^2.$$

竞争性企业最大化 $py - c(y)$ 。内点一阶条件为 $p = 2y$ 。因此供给为 $y(p) = p/2$ ，但固定成本 10 会影响利润是否为正：

$$\pi(p) = p \frac{p}{2} - 10 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - 10.$$

短期可继续生产，长期进入退出则要看利润符号。

11.8 常数规模报酬与零利润

若技术常数规模报酬，成本函数通常满足

$$c(w, y) = yc(w, 1).$$

于是

$$\pi(p, w) = \sup_{y \geq 0} y\{p - c(w, 1)\}.$$

若 $p < c(w, 1)$ ，最优为不生产，利润为零；若 $p = c(w, 1)$ ，任意产量都可获得零利润；若 $p > c(w, 1)$ ，利润无界。这就是长期竞争均衡中零利润条件的数学来源。

例 11.9 (单位成本和供给决策). 若常数规模报酬技术的单位成本为 $c(w, 1) = 5$ ，则生产 y 的成本为 $5y$ 。利润为

$$\pi(y) = py - 5y = (p - 5)y.$$

若 $p < 5$ ，最优不生产；若 $p = 5$ ，任意产量零利润；若 $p > 5$ ，没有容量限制时利润无界。长期竞争模型中的零利润条件正来自这里。

11.9 本章小结

生产者理论把凸分析、KKT 和对偶性转化为企业决策语言。利润函数来自最大化，成本函数来自最小化；Hotelling 引理和 Shephard 引理都是包络定理的应用；常数规模报酬下的零利润条件则连接单个企业优化和一般均衡价格支持。下一章将引入固定点方法，为均衡存在性做准备。

11.10 Exercises

习题 11.1. 解释生产集 $Y \subseteq \mathbb{R}^L$ 中正分量和负分量的经济含义。

习题 11.2. 证明自由处置意味着生产函数单调不减。

习题 11.3. 给出一个不满足自由处置的生产函数例子，并解释。

习题 11.4. 判断 $f(x) = x^\alpha$ 在 $\alpha < 1$ 、 $\alpha = 1$ 、 $\alpha > 1$ 时的规模报酬。

习题 11.5. 证明若 f 凹，则利润目标 $pf(x) - w \cdot x$ 是凹函数。

习题 11.6. 设 $f(x) = \sqrt{x}$ 。求利润最大化的投入、产出和利润。

习题 11.7. 设 $f(x) = \log(1 + x)$ 。写出内点利润最大化的一阶条件。

习题 11.8. 设 $f(x) = ax$ 。讨论利润最大化的三种情形。

习题 11.9. 证明利润函数关于所有价格一次齐次。

习题 11.10. 证明利润函数关于价格凸。

习题 11.11. 证明若产出价格固定，利润函数关于投入价格 w 是凸函数。

习题 11.12. 设 $\pi(p, w) = p^2/(4w)$ 。用 Hotelling 引理求供给和投入需求。

习题 11.13. 写出生产 y 的成本最小化问题。

习题 11.14. 证明成本函数关于投入价格一次齐次。

习题 11.15. 证明成本函数关于投入价格凹。

习题 11.16. 设 $f(x) = \sqrt{x}$ 。求成本函数。

习题 11.17. 设 $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$ 。求成本函数和条件要素需求。

习题 11.18. 设 $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ 。求成本函数，并讨论 $w_1 = w_2$ 的多值情形。

习题 11.19. 设 $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$ 。求成本函数。

习题 11.20. 对上一题验证 Shephard 引理。

习题 11.21. 设 $c(w, y) = y(w_1^{1/2} + w_2^{1/2})^2$ 。求条件要素需求。

习题 11.22. 若成本函数为 $c(y) = F + cy$ ，求竞争性企业供给。

习题 11.23. 若成本函数为 $c(y) = F + ay^2$, 求内点供给。

习题 11.24. 证明常数规模报酬下 $c(w, y) = yc(w, 1)$ 。

习题 11.25. 解释常数规模报酬下为什么正单位利润会导致利润无界。

习题 11.26. 比较消费者的支出函数和企业的成本函数。

习题 11.27. 比较消费者的间接效用函数和企业的利润函数。

习题 11.28. 用 KKT 条件写出成本最小化问题的必要条件。

习题 11.29. 解释边际技术替代率等于投入价格比的含义。

习题 11.30. 说明固定成本为什么影响利润但不影响内点边际产量选择。

11.11 Solutions

本章题解围绕企业的两个问题展开：利润最大化和成本最小化。利润题看边际收益产品与投入价格，成本题看条件要素需求与产量约束；对偶题要把 Hotelling 和 Shephard 都理解成包络定理。

解答 11.1. 正分量表示该商品作为净产出被生产出来；负分量表示该商品作为净投入被使用。净产出向量把投入和产出放在同一个商品空间中。

解答 11.2. 若 $x' \geq x$, 则 x' 至少包含 x 中的全部投入。企业可以先用其中的 x 部分复制原来的生产计划，再把多出的 $x' - x$ 作为多余投入自由处置。自由处置的含义正是“多出来的投入不会迫使企业产出更少”。因此使用 x' 时至少能达到 $f(x)$, 从而

$$f(x') \geq f(x).$$

这说明自由处置在生产函数表示下对应投入单调性。

解答 11.3. 例如 $f(x) = -(x-1)^2 + 1$ 在 $x > 1$ 后随投入增加而下降。这表示过多投入会降低产出，且不能把多余投入无成本丢弃，因此不满足自由处置。

解答 11.4. 考察把所有投入同时放大 $t > 1$ 倍后的产出：

$$f(tx) = (tx)^\alpha = t^\alpha x^\alpha = t^\alpha f(x).$$

规模报酬比较的是 $f(tx)$ 与 $tf(x)$ 。若 $\alpha < 1$, 则 $t^\alpha < t$, 产出增加比例小于投入增加比例, 是递减规模报酬；若 $\alpha = 1$, 则 $f(tx) = tf(x)$, 是常数规模报酬；若 $\alpha > 1$, 则 $t^\alpha > t$, 是递增规模报酬。

解答 11.5. 凹函数乘以正数仍凹，线性函数 $-w \cdot x$ 既凹又凸。凹函数与线性函数之和仍凹。

解答 11.6. 目标为

$$\max_{x \geq 0} p\sqrt{x} - wx.$$

由于 $\sqrt{x}$ 凹，目标函数是凹函数，内点一阶条件足以刻画最优解。边际收益产品为

$$pf'(x) = \frac{p}{2\sqrt{x}},$$

令其等于投入价格 w ，得

$$\frac{p}{2\sqrt{x}} = w.$$

所以

$$x^* = \frac{p^2}{4w^2}, \quad y^* = \frac{p}{2w}.$$

代回利润：

$$\pi = p \frac{p}{2w} - w \frac{p^2}{4w^2} = \frac{p^2}{4w}.$$

经济含义是：最优时最后一单位投入带来的产出收入刚好等于其成本。

解答 11.7. 目标为 $p \log(1+x) - wx$ 。内点一阶条件是

$$\frac{p}{1+x} = w.$$

若 $p > w$ ，内点解为 $x = p/w - 1$ ；否则角点 $x = 0$ 。

解答 11.8. 利润为 $(pa - w)x$ 。若 $pa < w$ ，最优不生产；若 $pa = w$ ，任意 x 都给出零利润；若 $pa > w$ ，利润随 x 线性上升且无界。

解答 11.9. 对任意 $\alpha > 0$ ，

$$\pi(\alpha q) = \sup_{y \in Y} \alpha q \cdot y = \alpha \sup_{y \in Y} q \cdot y = \alpha \pi(q).$$

解答 11.10. 利润函数可以写为

$$\pi(q) = \sup_{y \in Y} q \cdot y.$$

对每个固定的生产计划 y ，函数 $q \mapsto q \cdot y$ 都是线性的。利润函数是在所有可行 y 上取这些线性函数的逐点上确界。逐点上确界保持凸性，因此 $\pi(q)$ 关于价格 q 是凸的。

直觉是：价格变化时，企业可以重新选择最有利的生产计划；这种“可重新优化”的上包络结构使值函数呈凸形。

解答 11.11. 若把利润写成 $\pi(p, w) = \sup_x \{pf(x) - w \cdot x\}$ ，它关于 w 是线性函数族 $-w \cdot x$ 的上确界，因此关于 w 是凸的。

解答 11.12. 由前面的计算, 利润函数为 $\pi(p, w) = p^2/(4w)$ 。Hotelling 引理说, 在内点且可微时, 利润函数对产出价格的偏导数给出供给:

$$y = \frac{\partial \pi}{\partial p} = \frac{p}{2w}.$$

对投入价格求偏导:

$$\frac{\partial \pi}{\partial w} = -\frac{p^2}{4w^2}.$$

投入价格上升会降低利润, 因此偏导为负。投入需求取其相反数:

$$x = -\frac{\partial \pi}{\partial w} = \frac{p^2}{4w^2}.$$

这与直接利润最大化得到的 x^* 一致。

解答 11.13. 成本最小化问题是

$$c(w, y) = \min_{x \geq 0} w \cdot x \quad \text{s.t.} \quad f(x) \geq y.$$

解答 11.14. 可行集不依赖 w 。把 w 改为 αw 只会把每个可行投入的成本乘以 α , 所以最小成本也乘以 α 。

解答 11.15. 成本函数关于投入价格应为凹函数。令 $x(w)$ 是价格 w 下的最优投入, 直接用最小化值函数的性质证明: 对 $w = \lambda w^1 + (1 - \lambda)w^2$,

$$c(w, y) = \inf_x [\lambda w^1 \cdot x + (1 - \lambda)w^2 \cdot x] \geq \lambda c(w^1, y) + (1 - \lambda)c(w^2, y).$$

不等号的方向来自“同一个 x ”未必同时分别最小化两个价格下的成本。于是 $c(\cdot, y)$ 关于投入价格凹。直觉上, 价格取平均时, 企业的重新选择能力会使成本不低于两个最小成本的平均。

解答 11.16. 约束 $\sqrt{x} \geq y$ 等价于 $x \geq y^2$ 。因此

$$c(w, y) = wy^2.$$

解答 11.17. 要使 $\min\{x_1, x_2\} \geq y$, 必须 $x_1 \geq y$ 、 $x_2 \geq y$ 。最低成本选择 $x_1 = x_2 = y$, 所以

$$c(w, y) = (w_1 + w_2)y.$$

解答 11.18. 若 $w_1 < w_2$, 使用投入 1, 成本 $w_1 y$ 。若 $w_2 < w_1$, 使用投入 2, 成本 $w_2 y$ 。若 $w_1 = w_2$, 任意满足 $x_1 + x_2 = y$ 的投入组合都成本最小。总体上

$$c(w, y) = y \min\{w_1, w_2\}.$$

解答 11.19. 最小化

$$w_1x_1 + w_2x_2 \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{x_1x_2} \geq y.$$

在正价格下约束绑定，否则可以等比例减少投入并降低成本。因此 $x_1x_2 = y^2$ 。内点切点条件为

$$\frac{MP_1}{MP_2} = \frac{w_1}{w_2}.$$

对 $f(x) = \sqrt{x_1x_2}$ ，有 $MP_1/MP_2 = x_2/x_1$ ，所以

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{w_1}{w_2}.$$

结合 $x_1x_2 = y^2$ ，解得

$$x_1 = y\sqrt{\frac{w_2}{w_1}}, \quad x_2 = y\sqrt{\frac{w_1}{w_2}}.$$

代回成本：

$$c(w, y) = 2y\sqrt{w_1w_2}.$$

解答 11.20. 对 $c(w, y) = 2y\sqrt{w_1w_2}$ ，

$$\frac{\partial c}{\partial w_1} = y\sqrt{\frac{w_2}{w_1}}, \quad \frac{\partial c}{\partial w_2} = y\sqrt{\frac{w_1}{w_2}},$$

与上一题的条件要素需求一致。

解答 11.21. 对 $c(w, y) = y(w_1^{1/2} + w_2^{1/2})^2$ ，由 Shephard 引理，

$$x_1^c = y(w_1^{1/2} + w_2^{1/2})w_1^{-1/2},$$

$$x_2^c = y(w_1^{1/2} + w_2^{1/2})w_2^{-1/2}.$$

解答 11.22. 利润为 $py - F - cy = (p - c)y - F$ 。若 $p < c$ ，不生产；若 $p = c$ ，任意产量给出同样的经营利润但固定成本仍需处理；若 $p > c$ ，没有容量约束时供给无界。

解答 11.23. 利润为 $py - F - ay^2$ 。内点一阶条件为 $p - 2ay = 0$ ，所以

$$y^* = \frac{p}{2a}.$$

固定成本不影响该一阶条件。

解答 11.24. 常数规模报酬意味着生产 1 单位的成本最小投入按比例放大 y 倍即可生产 y 单位，因此 $c(w, y) \leq yc(w, 1)$ 。反向不等式由把生产 y 的最小投入缩小 $1/y$ 倍得到，故 $c(w, y) = yc(w, 1)$ 。

解答 11.25. 若每单位产出利润 $p - c(w, 1) > 0$, 生产 y 的利润为 $y[p - c(w, 1)]$ 。令 $y \rightarrow \infty$, 利润趋于无穷。

解答 11.26. 二者都是给定目标水平时的最小支出函数。消费者支出函数给定目标效用, 选择消费束; 企业成本函数给定目标产量, 选择投入束。

解答 11.27. 间接效用函数在预算约束下最大化效用, 利润函数在技术约束下最大化利润。二者都是参数化最优化问题的值函数, 也都可通过包络定理恢复选择行为。

解答 11.28. 写成约束 $y - f(x) \leq 0$ 、 $-x_i \leq 0$ 。Lagrangian 可取

$$\mathcal{L} = w \cdot x + \lambda(y - f(x)) - \mu \cdot x.$$

KKT 条件包括

$$w_i - \lambda f_i(x) - \mu_i = 0, \quad \lambda(y - f(x)) = 0, \quad \mu_i x_i = 0,$$

以及可行性和非负乘子条件。

解答 11.29. 内点成本最小化下 $w_i = \lambda f_i$ 。因此

$$\frac{f_i}{f_j} = \frac{w_i}{w_j}.$$

边际技术替代率等于投入价格比, 表示最后一元钱花在不同投入上的产出贡献被拉平。

解答 11.30. 固定成本不随产量变化, 所以总成本可写为

$$C(y) = F + VC(y),$$

边际成本为

$$C'(y) = VC'(y).$$

因此在已经生产且内点选择产量时, 一阶条件 $p = C'(y)$ 不含 F , 固定成本不改变边际产量选择。

但固定成本会改变总利润:

$$\pi(y) = py - VC(y) - F.$$

所以它会影响是否进入市场、是否生产以及长期零利润条件。简言之, 固定成本不改变“生产多少”的边际条件, 却会改变“值不值得生产”的参与条件。

11.12 Computation Lab

11.12.1 网格利润最大化

设 $f(x) = \sqrt{x}$ 、 $p = 4$ 、 $w = 2$ 。在网格 $x \in \{0, 0.01, \dots, 10\}$ 上计算

$$\pi(x) = 4\sqrt{x} - 2x.$$

解析解为

$$x^* = \frac{p^2}{4w^2} = 1, \quad y^* = 1.$$

网格最大点应接近 $x = 1$ 。

11.12.2 二维成本最小化

设 $f(x) = \sqrt{x_1 x_2}$ 、目标产量 $y = 2$ 、投入价格 $w = (1, 4)$ 。在二维网格上筛选满足 $\sqrt{x_1 x_2} \geq 2$ 的点并最小化 $x_1 + 4x_2$ 。解析条件要素需求为

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 1.$$

11.12.3 多值条件要素需求

设 $f(x) = x_1 + x_2$ 、 $w_1 = w_2 = 1$ 、目标产量 $y = 1$ 。所有满足 $x_1 + x_2 = 1$ 的投入组合都成本最小。网格实验应显示整条线段都是最优集合。

11.12.4 Recommended Checks

1. 同时乘大所有价格，验证利润函数一次齐次。
2. 同时乘大投入价格，验证成本函数一次齐次。
3. 改变 p 并观察递减报酬技术下供给如何上升。
4. 对常数规模报酬技术，检查 p 高于单位成本时利润无界的数值表现。

第十二章 固定点方法

12.1 为什么均衡需要固定点

前两章讨论消费者和企业如何在给定价格下最优化。但均衡不是单个主体的最优选择，而是所有主体的选择和价格彼此一致。价格影响需求和供给，需求和供给又决定能否支持这些价格。博弈中也类似：每个玩家的最优行动依赖他人的行动，而均衡要求每个人的行动都同时是最佳反应。

这类问题都可以写成

$$x = T(x)$$

或

$$x \in \Phi(x).$$

前者是单值映射的固定点，后者是对应的固定点。

定义 12.1 (固定点). 设 X 是集合， $T: X \rightarrow X$ 。若 $x^* = T(x^*)$ ，则称 x^* 是 T 的固定点。

定义 12.2 (对应的固定点). 设 $\Phi: X \rightrightarrows X$ 是对应。若 $x^* \in \Phi(x^*)$ ，则称 x^* 是 Φ 的固定点。

例 12.1 (市场清算作为固定点). 设价格调整规则为

$$T(p) = p + \alpha z(p),$$

其中 $z(p)$ 是超额需求， $\alpha > 0$ 是调整速度。若某个价格 p^* 满足 $T(p^*) = p^*$ ，则

$$p^* + \alpha z(p^*) = p^*,$$

所以 $z(p^*) = 0$ 。因此固定点正是市场清算价格。真实一般均衡模型会把价格归一化到单纯形上，但基本思想就是“价格调整后不再变化”。

12.2 Brouwer 固定点定理

定理 12.1 (Brouwer 固定点定理). 设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 非空、紧、凸, 且 $T: X \rightarrow X$ 连续。则存在 $x^* \in X$ 使

$$T(x^*) = x^*.$$

Brouwer 定理适合处理连续单值映射。经济学中, 如果某个价格调整规则、需求归一化规则或策略更新规则是连续函数, 并且把紧凸集合映回自身, 则存在自洽点。

本书不在这里证明 Brouwer 定理的完整拓扑版本。更重要的是理解它的使用方式: 检查定义域非空、紧、凸; 检查映射连续; 检查映射不离开定义域。

例 12.2 (一维 Brouwer 的直接检验). 令 $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 为 $T(x) = 1 - x^2/2$ 。它连续, 且对所有 $x \in [0, 1]$, 有 $T(x) \in [1/2, 1] \subseteq [0, 1]$ 。Brouwer 定理保证存在固定点。直接求解

$$x = 1 - \frac{x^2}{2}$$

得到 $x^* = -1 + \sqrt{3} \in [0, 1]$ 。定理的作用是先确认固定点不会不存在, 代数求解只是这个简单例子中的额外便利。

例 12.3 (选择哪个固定点定理). 若 $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 连续但不一定压缩, 可用 Brouwer 保证存在固定点。若还能证明

$$|T(x) - T(y)| \leq 0.7|x - y|,$$

则可用 Banach, 得到存在、唯一和迭代收敛。若最优反应是区间 $\Phi(x)$ 而不是点, 则要考虑 Kakutani。若行动空间是格且最佳反应单调, 则考虑 Tarski。选择定理的第一步永远是识别对象: 函数、对应、压缩还是单调映射。

12.3 Kakutani 固定点定理

许多经济模型中的最优反应不是函数, 而是对应。消费者可能有多个最优消费束, 企业可能有多种最优生产计划, 玩家可能有多个最佳反应。此时需要 Kakutani 定理。

定理 12.2 (Kakutani 固定点定理). 设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 非空、紧、凸。若对应 $\Phi: X \rightrightarrows X$ 满足:

1. 对每个 $x \in X$, $\Phi(x)$ 非空、紧、凸;
2. Φ 上半连续;

则存在 $x^* \in X$ 使 $x^* \in \Phi(x^*)$ 。

定义 12.3 (上半连续的直觉). 对应 Φ 上半连续, 直觉上意味着: 若 $x_m \rightarrow x$ 、 $y_m \in \Phi(x_m)$ 、 $y_m \rightarrow y$, 则极限点 y 不会突然跑出 $\Phi(x)$ 。

在紧值条件下, 上半连续常可通过闭图验证。也就是说, 若

$$\text{graph}(\Phi) = \{(x, y) : y \in \Phi(x)\}$$

是闭集, 则极限最优选择仍是极限参数下的可行最优选择。

例 12.4 (闭图检验的直觉). 设

$$\Phi(x) = \begin{cases} [0, x], & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

若 $x_m \rightarrow x$ 、 $y_m \in [0, x_m]$ 、且 $y_m \rightarrow y$, 则由 $0 \leq y_m \leq x_m$ 取极限得到 $0 \leq y \leq x$, 所以 $y \in \Phi(x)$ 。因此图像是闭的。经济上, 这表示当参数和选择同时收敛时, 极限选择不会突然变成不可行选择。

例 12.5 (Kakutani 型最佳反应). 设玩家的策略集合为 $[0, 1]$, 最佳反应对应为

$$\Phi(a) = \begin{cases} \{0\}, & a < 1/2, \\ [0, 1], & a = 1/2, \\ \{1\}, & a > 1/2. \end{cases}$$

固定点要求 $a \in \Phi(a)$ 。当 $a = 1/2$ 时, 确有 $1/2 \in [0, 1]$, 所以 $1/2$ 是固定点。这里在临界点出现多值, 单值连续 Brouwer 不方便, Kakutani 的语言更自然。

12.4 压缩映射

Brouwer 和 Kakutani 给出存在性, 但通常不告诉我们如何计算固定点。压缩映射定理同时给出存在、唯一和迭代收敛。

定义 12.4 (压缩映射). 设 (X, d) 是度量空间。映射 $T : X \rightarrow X$ 是压缩映射, 如果存在 $\beta \in [0, 1)$, 使对任意 $x, y \in X$,

$$d(Tx, Ty) \leq \beta d(x, y).$$

定理 12.3 (Banach 压缩映射定理). 若 (X, d) 是完备度量空间, 且 $T : X \rightarrow X$ 是压缩映射, 则 T 存在唯一固定点 x^* 。并且从任意 $x_0 \in X$ 出发, 迭代

$$x_{n+1} = T(x_n)$$

收敛到 x^* 。

证明. 先证明迭代序列是 Cauchy。由压缩性,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \beta^n d(x_1, x_0).$$

若 $m > n$, 则

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \beta^k d(x_1, x_0) \leq \frac{\beta^n}{1-\beta} d(x_1, x_0).$$

右侧随 $n \rightarrow \infty$ 收敛到零, 所以 (x_n) 是 Cauchy。完备性保证存在 $x^* \in X$ 使 $x_n \rightarrow x^*$ 。压缩映射连续, 因此

$$x^* = \lim x_{n+1} = \lim T(x_n) = T(x^*).$$

最后, 若 x^* 和 y^* 都是固定点, 则

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq \beta d(x^*, y^*).$$

因为 $\beta < 1$, 只能有 $d(x^*, y^*) = 0$, 故固定点唯一。 □

命题 12.1 (迭代误差界). 在 Banach 定理条件下,

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\beta^n}{1-\beta} d(x_1, x_0).$$

证明. 令上面证明中的 $m \rightarrow \infty$, 即可得到误差界。 □

动态规划中的 Bellman 算子通常就是压缩映射。这会在后续动态规划章节成为核心工具。

例 12.6 (压缩迭代的数值过程). 令

$$T(x) = 1 + 0.5x.$$

固定点满足 $x = 1 + 0.5x$, 所以 $x^* = 2$ 。从 $x_0 = 0$ 出发:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1.5, \quad x_3 = 1.75, \quad x_4 = 1.875.$$

每一步误差都大约减半。这个例子说明 Banach 定理不仅是存在性定理, 也是算法收敛定理。

例 12.7 (误差界给出停止准则). 仍令 $T(x) = 1 + 0.5x$, 压缩系数 $\beta = 0.5$, 从 $x_0 = 0$ 出发有 $x_1 = 1$ 。Banach 误差界给出

$$|x_n - x^*| \leq \frac{0.5^n}{1-0.5} |x_1 - x_0| = 2 \cdot 0.5^n.$$

若希望误差不超过 0.01, 只需 $2 \cdot 0.5^n \leq 0.01$, 即 $n \geq 8$ 。这说明压缩定理可以直接转化为计算中的停止规则。

12.5 Tarski 固定点定理

Ch08 已经说明, 单调性可以替代连续性和凸性。若映射定义在格上, 并且保持序, 则可以使用 Tarski 固定点定理。

定理 12.4 (Tarski 定理, 有限完全格版本). 设 X 是有限完全格, $T: X \rightarrow X$ 单调不减。则 T 至少有一个固定点。并且固定点集合本身也是非空完全格, 因此存在最小固定点和最大固定点。

证明. 定义集合

$$A = \{x \in X : x \leq T(x)\}.$$

由于 X 有最小元 $\perp$, 且 $\perp \leq T(\perp)$, 所以 A 非空。令 $a = \vee A$ 。对任意 $x \in A$, 有 $x \leq a$, 由单调性得 $T(x) \leq T(a)$ 。又 $x \leq T(x)$, 所以 $x \leq T(a)$ 。因此 $T(a)$ 是 A 的上界, 故 $a \leq T(a)$, 从而 $a \in A$ 。

因为 $a \in A$, 有 $a \leq T(a)$ 。再用单调性, $T(a) \leq T(T(a))$, 所以 $T(a) \in A$ 。由于 a 是 A 的上确界, $T(a) \leq a$ 。合并得到 $T(a) = a$ 。固定点集合存在最小和最大元的结论可对所有固定点取 meet 和 join 得到; 有限性保证这些运算存在。□

Tarski 定理常用于战略互补和多重均衡。它不要求连续性, 也不要求凸性, 但要求有序结构和单调最佳反应。

例 12.8 (有限格上的最小和最大固定点). 令 $X = \{0, 1, 2, 3\}$, 定义

$$T(0) = 1, \quad T(1) = 1, \quad T(2) = 3, \quad T(3) = 3.$$

这是单调映射。固定点是 1 和 3。从最小元开始迭代:

$$0 \mapsto 1 \mapsto 1,$$

得到最小固定点; 从最大元开始得到最大固定点 3。多重均衡模型中, 这两个端点常有清楚的经济含义。

12.6 四类固定点工具如何选择

若模型给出连续单值映射, 并且定义域紧凸, 优先考虑 Brouwer。若模型给出最优反应对应, 值非空、紧、凸且上半连续, 优先考虑 Kakutani。若目标是唯一性和可计算迭代, 寻找压缩结构。若模型有战略互补和格结构, 使用 Tarski 或单调迭代。

12.7 经济学中的三个原型

12.7.1 一般均衡

价格 p 给定时，消费者和企业产生需求与供给。若能构造一个把价格单纯形映回自身的连续或上半连续对象，固定点就是均衡价格。这是 Ch12 的主线。

12.7.2 博弈均衡

每个玩家对他人策略有最佳反应。若最佳反应是单值连续函数，可用 Brouwer；若最佳反应是非空凸值上半连续对应，可用 Kakutani；若存在战略互补，可用 Tarski。

12.7.3 动态规划

Bellman 方程写作

$$V = TV.$$

折现因子小于 1 时，Bellman 算子常是压缩映射，因此值函数存在唯一，值函数迭代收敛。

12.8 本章小结

固定点方法是均衡存在性、动态递归和计算迭代的共同语言。Brouwer 处理连续单值映射；Kakutani 处理最优反应对应；Banach 处理唯一性和收敛算法；Tarski 处理单调结构和多重均衡。下一章将把这些工具用于一般均衡和福利定理。

12.9 Exercises

习题 12.1. 定义单值映射的固定点，并给出一个没有固定点的自映射例子。

习题 12.2. 证明任意连续 $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 有固定点。

习题 12.3. 说明 Brouwer 定理中紧性为什么重要。

习题 12.4. 说明 Brouwer 定理中凸性为什么重要。

习题 12.5. 判断 $T(x) = x^2$ 在 $[0, 1]$ 上的固定点。

习题 12.6. 判断 $T(x) = 1 - x$ 在 $[0, 1]$ 上的固定点。

习题 12.7. 设 $T(x) = a + \beta x$, $|\beta| < 1$ 。求固定点。

习题 12.8. 证明上一题中的 T 是压缩映射。

习题 12.9. 说明 $T(x) = x$ 为什么不是压缩映射。

习题 12.10. 证明 Banach 定理中的固定点唯一性。

习题 12.11. 推导压缩迭代误差界。

习题 12.12. 若 T 的 Lipschitz 常数等于 1, Banach 定理能否应用? 给出例子。

习题 12.13. 设 $T(x) = \sqrt{x}$ 在 $[0, 1]$ 上。求固定点, 并判断是否压缩。

习题 12.14. 定义对应的固定点。

习题 12.15. 设 $\Phi(x) = [x/2, 1]$ 。求 $[0, 1]$ 上的固定点集合。

习题 12.16. 设 $\Phi(x) = \{1 - x\}$ 。把它看作对应, 求固定点。

习题 12.17. 解释 Kakutani 定理为什么允许多值最佳反应。

习题 12.18. 给出一个值非凸的对应例子。

习题 12.19. 说明闭图性质与上半连续之间的关系。

习题 12.20. 定义有限格上的单调映射。

习题 12.21. 设 $X = \{0, 1, 2\}$, $T(0) = 0, T(1) = 2, T(2) = 2$ 。求固定点。

习题 12.22. 设 $X = \{0, 1, 2\}$, $T(0) = 1, T(1) = 2, T(2) = 0$ 。它是否单调? 是否有固定点?

习题 12.23. 证明有限完全格上单调映射至少有一个固定点。

习题 12.24. 解释 Tarski 定理为什么适合战略互补。

习题 12.25. 给定最佳反应 $b(a) = \min\{1, 0.2 + 0.7a\}$, 求固定点。

习题 12.26. 给定最佳反应 $b(a) = 1 - a$, 求固定点, 并说明是否战略互补。

习题 12.27. 设 Bellman 算子满足 $\|TV - TW\|_\infty \leq \beta\|V - W\|_\infty$ 。说明为什么值函数唯一。

习题 12.28. 比较 Brouwer 与 Banach 的结论差异。

习题 12.29. 比较 Kakutani 与 Tarski 的假设差异。

习题 12.30. 说明一般均衡、博弈均衡和动态规划分别自然对应哪类固定点工具。

12.10 Solutions

本章题解的第一步是判断固定点工具类型：连续单值映射用 Brouwer，非空凸值上半连续对应用 Kakutani，压缩映射用 Banach，单调格映射用 Tarski。不要在未检查假设时直接套定理。

解答 12.1. 若 $T: X \rightarrow X$ ，固定点是满足 $T(x) = x$ 的点。自映射不一定有固定点，例如 $X = (0, 1)$ ， $T(x) = x/2$ 。它把 $(0, 1)$ 映回 $(0, 1)$ ，但唯一候选固定点 0 不在集合中。

解答 12.2. 令

$$g(x) = T(x) - x.$$

因为 T 连续， g 也连续。又因为 T 是从 $[0, 1]$ 到 $[0, 1]$ 的自映射，

$$T(0) \geq 0 \Rightarrow g(0) = T(0) - 0 \geq 0,$$

$$T(1) \leq 1 \Rightarrow g(1) = T(1) - 1 \leq 0.$$

若 $g(0) = 0$ 或 $g(1) = 0$ ，端点本身就是固定点。否则 $g(0) > 0$ 、 $g(1) < 0$ ，由介值定理存在 $x^* \in (0, 1)$ 使 $g(x^*) = 0$ 。这等价于 $T(x^*) = x^*$ 。这是一维 Brouwer 定理的核心证明。

解答 12.3. 紧性主要负责“极限点不丢失”。如果定义域不是闭的，迭代或连续性论证可能把候选固定点推到边界极限处，而这个边界点不属于定义域。

例如 $T(x) = x/2$ 在 $(0, 1)$ 上是连续自映射，因为 $x/2 \in (0, 1)$ 。固定点方程为

$$x/2 = x,$$

唯一候选解是 $x = 0$ 。但 $0 \notin (0, 1)$ ，所以没有固定点。若把定义域改成紧集 $[0, 1]$ ，这个固定点就被包含进来了。

解答 12.4. 凸性保证映射定义域没有洞。Brouwer 定理需要这种几何结构；若集合不是凸的，连续自映射可能在不同部分之间移动而无固定点。

解答 12.5. 固定点满足 $x^2 = x$ ，所以 $x = 0$ 或 $x = 1$ 。

解答 12.6. 固定点满足 $1 - x = x$ ，所以 $x = 1/2$ 。

解答 12.7. 固定点满足 $x = a + \beta x$ ，因此

$$x^* = \frac{a}{1 - \beta}.$$

解答 12.8. 对任意 x, y ,

$$|T(x) - T(y)| = |\beta||x - y|.$$

由于 $|\beta| < 1$, 它是压缩映射。

解答 12.9. 压缩映射要求存在 $\beta < 1$ 使 $|x - y| \leq \beta|x - y|$ 对所有 x, y 成立。只要 $x \neq y$, 这不可能。因此恒等映射不是压缩映射。

解答 12.10. 若 x^*, y^* 都是固定点, 则 $Tx^* = x^*$ 、 $Ty^* = y^*$ 。压缩性给出

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq \beta d(x^*, y^*).$$

移项得

$$(1 - \beta)d(x^*, y^*) \leq 0.$$

因为 $1 - \beta > 0$ 且距离非负, 只能有 $d(x^*, y^*) = 0$ 。距离为零意味着两个点相同, 所以压缩映射的固定点至多一个。这个证明只用到了压缩性, 不用构造迭代序列。

解答 12.11. 由压缩性,

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq \beta^k d(x_1, x_0).$$

为了估计第 n 次迭代与固定点之间的距离, 把它写成尾和:

$$d(x_n, x^*) \leq \sum_{k=n}^{\infty} d(x_{k+1}, x_k) \leq \frac{\beta^n}{1 - \beta} d(x_1, x_0).$$

这说明误差按几何速度收敛。实际计算时, 若 β 很接近 1, 理论上仍收敛, 但收敛可能很慢。

解答 12.12. 不能直接应用。例子是 $T(x) = x$, Lipschitz 常数为 1, 有无穷多个固定点。另一个例子是 $T(x) = 1 - x$, Lipschitz 常数为 1, 但仍有固定点 $1/2$ 。这说明 Banach 条件是充分条件, 不是必要条件。

解答 12.13. 固定点满足

$$\sqrt{x} = x.$$

两边非负, 可以平方得到 $x = x^2$, 所以 $x = 0$ 或 $x = 1$ 。两个点都在 $[0, 1]$ 中, 因此都是固定点。

它在整个 $[0, 1]$ 上不是压缩映射。若在区间内部看导数,

$$T'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

当 $x \downarrow 0$ 时导数无界, 因此不存在一个统一的 Lipschitz 常数 $\beta < 1$ 控制整个区间。这个例子也说明 Brouwer 可保证存在固定点, 但不保证唯一。

解答 12.14. 若 $\Phi: X \rightrightarrows X$, 固定点是满足 $x \in \Phi(x)$ 的点。

解答 12.15. 固定点条件是

$$x \in \Phi(x) = [x/2, 1].$$

这等价于同时满足 $x \geq x/2$ 和 $x \leq 1$ 。对所有 $x \in [0, 1]$, 这两个不等式都成立, 所以每个点都是固定点。固定点集合为整个 $[0, 1]$ 。

这个例子展示了多值对应和单值映射的差别: 固定点集合可以是一整段, 而不是一个孤立点。

解答 12.16. 固定点满足 $x = 1 - x$, 所以 $x = 1/2$ 。

解答 12.17. 最佳反应可能因无差异而是集合。Kakutani 定理直接处理非空、紧、凸值且上半连续的对应, 因此允许多值最佳反应并仍能推出存在固定点。

解答 12.18. 例如 $\Phi(x) = \{0, 1\}$ 对所有 $x \in [0, 1]$ 。每个值都不是凸集。

解答 12.19. 闭图表示: 若

$$x_n \rightarrow x, \quad y_n \rightarrow y, \quad y_n \in \Phi(x_n),$$

则极限点仍满足 $y \in \Phi(x)$ 。也就是说, 对应图像

$$\text{Gr}(\Phi) = \{(x, y) : y \in \Phi(x)\}$$

是闭集。

在紧值等常见条件下, 闭图是上半连续的重要判别方式。经济直觉是: 如果参数和选择同时收敛, 极限选择不能突然跑到可行或最优集合之外。

解答 12.20. 有限格 X 上的映射 $T: X \rightarrow X$ 单调, 是指若 $x \leq y$, 则 $T(x) \leq T(y)$ 。

解答 12.21. 固定点满足 $T(x) = x$ 。这里 $T(0) = 0$ 、 $T(2) = 2$, 所以固定点为 0 和 2。

解答 12.22. 它不是单调映射, 因为 $1 \leq 2$, 但 $T(1) = 2 \not\leq T(2) = 0$ 。它没有固定点, 因为 $T(0) = 1$ 、 $T(1) = 2$ 、 $T(2) = 0$ 。

解答 12.23. 令

$$A = \{x : x \leq T(x)\}.$$

完全格有最小元 $\perp$, 且 $\perp \leq T(\perp)$, 所以 $\perp \in A$, 从而 A 非空。令

$$a = \vee A$$

为 A 的上确界。

对任意 $x \in A$, 有 $x \leq a$ 。由 T 单调, $T(x) \leq T(a)$ 。又因为 $x \leq T(x)$, 得到 $x \leq T(a)$ 。所以 $T(a)$ 是 A 的一个上界, 进而 $a \leq T(a)$, 即 $a \in A$ 。

既然 $a \in A$, 由单调性 $T(a) \leq T(T(a))$, 所以 $T(a) \in A$ 。但 a 是 A 的上确界, 因此 $T(a) \leq a$ 。合并 $a \leq T(a)$ 与 $T(a) \leq a$, 得到

$$T(a) = a.$$

这证明了存在固定点, 并且这个构造实际给出一个最大的“前固定点”。

解答 12.24. 战略互补意味着他人行动越高, 自己的最佳反应越高。也就是说, 最佳反应是单调映射或单调对应。Tarski 定理正是从单调性和格结构推出固定点存在, 并允许多个均衡。

解答 12.25. 若固定点不受上界截断, 则 $a = 0.2 + 0.7a$, 所以 $a = 2/3$ 。它小于 1, 因此固定点为 $2/3$ 。

解答 12.26. 固定点满足 $a = 1 - a$, 所以 $a = 1/2$ 。该最佳反应随 a 上升而下降, 是战略替代而非战略互补。

解答 12.27. Bellman 算子通常形如

$$(TV)(s) = \max_a \{u(s, a) + \beta V(s')\},$$

其中 $0 < \beta < 1$ 。在上确界范数下, 未来值函数项被折现因子 β 缩小, 因此可以证明

$$\|TV - TW\|_\infty \leq \beta \|V - W\|_\infty.$$

这说明 T 是以 β 为模的压缩映射。由 Banach 定理, Bellman 方程 $V = TV$ 的固定点唯一, 所以值函数唯一; 从任意初始值函数反复迭代 $V_{n+1} = TV_n$ 也会收敛到该值函数。

解答 12.28. Brouwer 与 Banach 的差别在“假设强度”和“结论强度”。Brouwer 要求定义域是非空紧凸集, 映射连续且为自映射; 结论是至少存在一个固定点。但它不保证唯一, 也不保证简单迭代 $x_{n+1} = T(x_n)$ 收敛。

Banach 要求定义域是完备度量空间, 并且 T 是压缩映射。这个假设更强, 但结论也更强: 固定点存在、唯一, 并且从任意初值开始的迭代都收敛到固定点。因此动态规划和数值算法中, 只要能证明压缩性, Banach 通常比 Brouwer 更有操作性。

解答 12.29. Kakutani 依赖拓扑和凸性: 定义域紧凸、对应非空紧凸值、上半连续。Tarski 依赖序结构: 定义域是完全格、映射单调。前者适合凸最优化的最佳反应, 后者适合战略互补和单调比较静态。

解答 12.30. 一般均衡通常使用 Brouwer 或 Kakutani；博弈均衡在混合策略空间中常用 Kakutani，在战略互补中常用 Tarski；动态规划常用 Banach 压缩映射，因为它同时给出唯一值函数和迭代收敛。

12.11 Computation Lab

12.11.1 压缩迭代

取

$$T(x) = 1 + 0.8x.$$

固定点为 $x^* = 5$ 。从 $x_0 = 0$ 开始迭代 $x_{n+1} = T(x_n)$ ，记录误差 $|x_n - 5|$ 。误差应近似按 0.8^n 下降。

12.11.2 Cobweb 迭代

设价格调整规则为

$$p_{t+1} = 0.5 + 0.6p_t.$$

它的固定点为 $p^* = 1.25$ 。画出 p_{t+1} 对 p_t 的图像和 45 度线，可以看到收敛过程。

12.11.3 最佳反应迭代

两人对称最佳反应为

$$b(a) = 0.25 + 0.5a.$$

从 $a_0 = 0$ 出发迭代 $a_{t+1} = b(a_t)$ ，收敛到 $a^* = 0.5$ 。把斜率改为 1.1，观察迭代可能不再收敛。

12.11.4 有限格单调迭代

令 $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ，定义

$$T(0) = 1, \quad T(1) = 2, \quad T(2) = 2, \quad T(3) = 4, \quad T(4) = 4.$$

从最小元 0 迭代得到最小固定点 2；从最大元 4 反向迭代保持在最大固定点 4。这展示多重固定点与 Tarski 定理的关系。

12.11.5 Recommended Checks

1. 改变压缩系数 β ，比较收敛速度。
2. 用不同初值验证压缩映射收敛到同一固定点。
3. 构造一个非单调有限映射，检查固定点可能不存在。
4. 把最佳反应画在同一张图上，观察交点如何对应 Nash 均衡。

第十三章 一般均衡与福利定理

13.1 从单个市场到所有市场

前两章已经分别研究消费者和企业给定价格下如何最优化。一般均衡向前走一步：价格本身也必须由全经济的相容性决定。一个商品价格不能只让某个消费者满意，还要让所有消费者、企业和资源约束同时协调起来。

本章先处理最清楚的模型：有限商品、有限消费者的纯交换经济。纯交换经济没有生产，所有商品总量来自初始禀赋。这样可以把注意力集中在价格、需求、可行性和福利定理上。

定义 13.1 (纯交换经济). 一个有限纯交换经济由

$$\mathcal{E} = ((X_i, \succeq_i, \omega_i)_{i=1}^I)$$

给出。其中 I 是消费者数，商品数为 L ，消费集通常取 $X_i = \mathbb{R}_+^L$ ，偏好为 $\succeq_i$ ，初始禀赋为 $\omega_i \in \mathbb{R}_+^L$ 。总禀赋记为

$$\bar{\omega} = \sum_{i=1}^I \omega_i.$$

定义 13.2 (配置与可行性). 配置是 $x = (x_1, \dots, x_I)$ ，其中 $x_i \in X_i$ 。若

$$\sum_{i=1}^I x_i \leq \sum_{i=1}^I \omega_i = \bar{\omega},$$

则称配置 x 可行。若偏好局部非饱和，通常有效或均衡配置会用尽总资源，即等号成立。

例 13.1 (两人两商品的可行配置). 设两名消费者和两种商品的禀赋为

$$\omega_1 = (1, 0), \quad \omega_2 = (0, 1).$$

总禀赋为 $\bar{\omega} = (1, 1)$ 。若

$$x_1 = (0.4, 0.7), \quad x_2 = (0.6, 0.3),$$

则 $x_1 + x_2 = (1, 1)$, 所以可行。若 $x_1 = (0.7, 0.7)$ 、 $x_2 = (0.6, 0.5)$, 总需求为 $(1.3, 1.2)$, 超过总禀赋, 因此不可行。

这个例子就是 Edgeworth box 的代数版本: 一个人的消费越多, 另一个人可消费的剩余越少。一般均衡不是分别最大化每个人效用, 而是在总资源约束内同时安排所有人的选择。

13.2 价格、预算与需求

给定价格 $p \in \mathbb{R}_+^L$, 消费者 i 的财富来自出售初始禀赋:

$$w_i(p) = p \cdot \omega_i.$$

因此预算集为

$$B_i(p) = \{x_i \in \mathbb{R}_+^L : p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i\}.$$

消费者需求对应为

$$D_i(p) = \arg \max_{x_i \in B_i(p)} u_i(x_i),$$

其中 u_i 是表示 $\succeq_i$ 的效用函数。

定义 13.3 (价格归一化). 若所有价格和财富同时乘以同一个正数, 预算集不变。因此一般均衡价格只在比例意义上确定。常用归一化是价格单纯形

$$\Delta = \left\{ p \in \mathbb{R}_+^L : \sum_{\ell=1}^L p_\ell = 1 \right\}.$$

例 13.2 (价格比例而不是价格水平). 若 $p = (2, 4)$, 消费者禀赋 $\omega = (1, 1)$, 预算约束为

$$2x_1 + 4x_2 \leq 6.$$

把价格乘以 $1/2$, 得到 $p' = (1, 2)$, 预算约束变成

$$x_1 + 2x_2 \leq 3.$$

两条不等式描述同一个预算集。因此均衡中重要的是相对价格 p_1/p_2 , 而不是价格单位本身。这个事实会在超额需求和固定点证明中反复使用。

13.3 超额需求与 Walras 法则

若每个消费者在价格 p 下选择 $x_i(p) \in D_i(p)$, 总需求为

$$X(p) = \sum_{i=1}^I x_i(p).$$

总超额需求为

$$z(p) = X(p) - \bar{\omega}.$$

第 ℓ 个分量 $z_\ell(p) > 0$ 表示商品 ℓ 需求超过供给; $z_\ell(p) < 0$ 表示供给超过需求。

定理 13.1 (Walras 法则). 如果每个消费者的偏好局部非饱和, 且 $x_i(p)$ 是预算集上的最优选择, 则

$$p \cdot z(p) = 0.$$

证明. 局部非饱和性意味着消费者最优时花完预算:

$$p \cdot x_i(p) = p \cdot \omega_i.$$

对所有消费者求和, 得到

$$p \cdot \sum_i x_i(p) = p \cdot \sum_i \omega_i.$$

移项即

$$p \cdot \left(\sum_i x_i(p) - \sum_i \omega_i \right) = p \cdot z(p) = 0.$$

□

例 13.3 (Walras 法则不是每个市场都清算). 设有两种商品, 价格为 $p = (1, 2)$, 超额需求为

$$z(p) = (2, -1).$$

则

$$p \cdot z(p) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0.$$

第一种商品超额需求为正, 第二种商品超额需求为负, 但按价格加权后的总价值为零。Walras 法则说的是“总超额需求价值为零”, 不是说每个商品市场已经清算。若除一个市场以外所有市场都清算, 则最后一个市场也必须清算, 这才是它在均衡证明中的关键作用。

13.4 竞争均衡

定义 13.4 (竞争均衡). 纯交换经济中的竞争均衡是一组价格和配置 (p^*, x^*) , 满足:

1. $p^* \in \mathbb{R}_+^L$, 且 $p^* \neq 0$;
2. 对每个消费者 i , $x_i^* \in D_i(p^*)$;
3. 市场清算:

$$\sum_{i=1}^I x_i^* = \sum_{i=1}^I \omega_i.$$

竞争均衡的定义有两个层次。个体层面，每个人在自己的预算集内最优化；社会层面，所有人的选择合起来不超过资源，且在局部非饱和下正好用尽资源。

例 13.4 (两人 Cobb-Douglas 交换经济). 设两名消费者有相同效用

$$u_i(x_{i1}, x_{i2}) = \sqrt{x_{i1}x_{i2}},$$

禀赋为

$$\omega_1 = (1, 0), \quad \omega_2 = (0, 1).$$

令商品 2 为计价物，设 $p_2 = 1$ 、 $p_1 = q$ 。消费者 1 财富为 q ，Cobb-Douglas 需求为

$$x_{11} = \frac{q}{2q} = \frac{1}{2}, \quad x_{12} = \frac{q}{2}.$$

消费者 2 财富为 1，需求为

$$x_{21} = \frac{1}{2q}, \quad x_{22} = \frac{1}{2}.$$

商品 1 市场清算要求

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2q} = 1.$$

解得 $q = 1$ 。于是均衡相对价格为 $p_1/p_2 = 1$ ，均衡配置为

$$x_1^* = (1/2, 1/2), \quad x_2^* = (1/2, 1/2).$$

这里每个人都把财富的一半花在每种商品上，价格恰好调整到两种商品总需求都等于总供给。

例 13.5 (只清算一个市场即可). 继续两商品经济。Walras 法则给出

$$p_1 z_1(p) + p_2 z_2(p) = 0.$$

若 $p_1, p_2 > 0$ ，且已经知道 $z_1(p) = 0$ ，则必有 $z_2(p) = 0$ 。因此两商品模型中常常只解一个市场清算方程。这个技巧不是省略条件，而是利用了预算约束和 Walras 法则。

13.5 存在性：固定点的作用

一般均衡存在性定理的完整证明需要把需求对应、价格单纯形和固定点方法组合起来。本章只给有限维、直觉清楚的版本。

定理 13.2 (竞争均衡存在性的基本形式). 考虑有限纯交换经济。若每个消费者的消费集为 $\mathbb{R}_+^L$, 初始禀赋严格为正, 偏好连续、凸、强单调, 并且需求在价格单纯形内部连续, 则存在竞争均衡。

证明思路. 第一步, 在价格 p 下由消费者最优化得到需求 $x_i(p)$, 进而得到超额需求 $z(p)$ 。连续偏好、凸性和适当的唯一性条件可使需求函数连续。

第二步, 利用 Walras 法则:

$$p \cdot z(p) = 0.$$

这保证超额需求的总价值为零。

第三步, 构造一个价格调整映射。例如把有正超额需求的商品价格相对提高, 再归一化回价格单纯形:

$$T_\ell(p) = \frac{p_\ell + \max\{z_\ell(p), 0\}}{\sum_{k=1}^L (p_k + \max\{z_k(p), 0\})}.$$

在适当条件下, $T: \Delta \rightarrow \Delta$ 连续。由 Brouwer 固定点定理, 存在 $p^* = T(p^*)$ 。

第四步, 固定点条件说明所有正超额需求都被消除; 结合 Walras 法则和正价格, 可推出市场清算。于是得到竞争均衡。□

注 13.1. 严格的一般均衡存在性证明常使用 Kakutani, 因为需求可能是多值的。若需求对应非空、凸值、上半连续, 就可以对价格调整对应使用固定点定理。本章的目标是让读者看清证明骨架, 而不是把所有边界技术细节一次压进主线。

例 13.6 (价格调整映射的读法). 设两商品在价格 p 下的超额需求为 $z(p) = (0.3, -0.2)$ 。价格调整规则会提高商品 1 的相对价格, 因为它供不应求; 商品 2 的价格不因负超额需求而上调。然后把价格重新归一化到 Δ 。若某个价格 p^* 调整后不变, 说明没有商品存在需要上调的正超额需求。再由 Walras 法则, 负超额需求也不能单独留下, 因此市场清算。

13.6 Pareto 改进与 Pareto 有效

定义 13.5 (Pareto 改进). 给定两个可行配置 x 和 y 。若对所有 i , $y_i \succeq_i x_i$, 且至少一个消费者 j 满足 $y_j \succ_j x_j$, 则称 y 是对 x 的 Pareto 改进。

定义 13.6 (Pareto 有效). 可行配置 x 是 Pareto 有效的, 如果不存在另一个可行配置 y 是对 x 的 Pareto 改进。

例 13.7 (Edgeworth box 中的无效率). 两人两商品, 总禀赋为 $(1, 1)$ 。若配置为

$$x_1 = (0.2, 0.2), \quad x_2 = (0.3, 0.3),$$

则只用了 $(0.5, 0.5)$, 还有资源未分配。若两人的偏好都强单调, 把剩余资源给任意一个人都会使该人更好, 且不伤害另一个人。因此该配置不是 Pareto 有效。这个例子说明: 强单调或局部非饱和下, Pareto 有效配置必须用尽资源。

13.7 第一福利定理

第一福利定理说明: 竞争均衡配置不会浪费可行的互利改进机会。价格系统把每个人的预算约束和社会资源约束连接起来。

定理 13.3 (第一福利定理). 设 (p^*, x^*) 是竞争均衡。若每个消费者偏好局部非饱和, 则 x^* 是 Pareto 有效的。

证明. 反设存在可行配置 y Pareto 改进 x^* 。则对所有 i ,

$$y_i \succeq_i x_i^*,$$

且至少一个消费者 j 严格更好:

$$y_j \succ_j x_j^*.$$

因为 x_i^* 是消费者 i 在预算集中的最优选择, 若 $y_i \succeq_i x_i^*$, 则 y_i 不可能严格便宜并可行而又至少一样好。更具体地, 最优性给出: 若 $y_i \succ_i x_i^*$, 则

$$p^* \cdot y_i > p^* \cdot \omega_i.$$

对于只满足 $y_i \succeq_i x_i^*$ 的消费者, 局部非饱和和最优性推出

$$p^* \cdot y_i \geq p^* \cdot \omega_i.$$

至少一个严格偏好者给出严格不等式。对所有 i 求和:

$$p^* \cdot \sum_i y_i > p^* \cdot \sum_i \omega_i.$$

但 y 可行意味着

$$\sum_i y_i \leq \sum_i \omega_i.$$

在非负价格下,

$$p^* \cdot \sum_i y_i \leq p^* \cdot \sum_i \omega_i,$$

矛盾。因此不存在 Pareto 改进, x^* Pareto 有效。 □

例 13.8 (为什么第一福利定理不说公平). 在两人一商品经济中, 总禀赋为 1. 若均衡配置为

$$x_1^* = 0.99, \quad x_2^* = 0.01,$$

且两人都偏好更多商品, 那么这个配置可以是 Pareto 有效的: 若想让消费者 2 更多, 就必须减少消费者 1. 第一福利定理只说没有不伤害任何人的改进, 不说分配公平, 也不说每个人效用相近. 效率和公平是不同问题。

13.8 第二福利定理

第一福利定理从均衡推出效率。第二福利定理反过来问: 给定一个 Pareto 有效配置, 能否找到价格和财富再分配, 使它成为竞争均衡?

定理 13.4 (第二福利定理, 有限维凸版本). 设偏好凸、局部非饱和, 并满足适当连续性条件。若可行配置 x^* 是 Pareto 有效的, 且位于相关可行集合的适当边界上, 则存在非零价格向量 $p \geq 0$ 和财富转移, 使 x^* 在这些价格和转移下构成竞争均衡。

第二福利定理的数学核心是 Ch06 的支持超平面思想。Pareto 有效配置对应一个不能被可行改进集合穿过的边界点; 在凸性条件下, 可以用一个超平面支撑这个边界。支撑超平面的法向量就是价格。

例 13.9 (支持价格的几何含义). 设两商品总资源集合为

$$F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 + x_2 \leq 1\}.$$

点 $x^* = (1/2, 1/2)$ 位于边界 $x_1 + x_2 = 1$ 上。向量 $p = (1, 1)$ 支撑该边界, 因为对所有 $x \in F$,

$$p \cdot x = x_1 + x_2 \leq 1 = p \cdot x^*.$$

若 x^* 同时也是某个社会目标或 Pareto 边界上的点, 则 p 可以解释为支持该配置的价格。价格不是凭空来的, 它是把资源可行边界线性化后的法向量。

例 13.10 (非凸性为什么麻烦). 设可行集合由两个孤立点组成:

$$F = \{(1, 0), (0, 1)\}.$$

两个点都可能是 Pareto 有效的, 但不存在一条支持直线可以像凸集边界那样把所有可行点放在同一侧并精细支持任一点的局部替代结构。非凸性下, 边际价格可能无法支持有效配置, 或者需要更复杂的制度安排。第二福利定理因此高度依赖凸性。

13.9 生产经济的接口

若加入企业，每个企业 j 有生产集 Y_j ，利润最大化问题为

$$y_j(p) \in \arg \max_{y \in Y_j} p \cdot y.$$

消费者财富包括禀赋价值和企业的利润分红。竞争均衡要求消费者最优化、企业利润最大化、所有商品市场清算。

生产经济中的福利定理依然有相同结构：在均衡中，每个消费者在预算集内最优，每个企业在价格下利润最大化，市场清算把个体最优拼成社会可行配置。第一福利定理仍然依赖局部非饱和和价格预算逻辑；第二福利定理依赖消费者偏好和生产集合的凸性。

例 13.11 (企业利润最大化和市场清算). 若一个企业能把商品 1 转化为商品 2，生产计划写成 $y = (-a, b)$ 。价格 p 下利润为

$$p \cdot y = -p_1 a + p_2 b.$$

企业选择利润最大的可行 y 。消费者购买商品，企业供给商品，均衡要求

$$\sum_i x_i = \sum_i \omega_i + \sum_j y_j.$$

因此生产经济只是在纯交换的资源约束右侧加上净产出。Ch10 的企业理论在这里进入一般均衡。

13.10 本章小结

一般均衡把第一卷前半部分的数学工具集中起来。需求来自消费者最优化；供给来自企业最优化；超额需求继承 Walras 法则；价格归一化把问题放入紧凸的价格单纯形；固定点定理给出均衡存在性的基本路线；福利定理说明价格均衡与 Pareto 效率之间的关系。

本章最重要的学习目标不是背诵福利定理，而是看见证明中的结构：预算最优性、资源可行性、局部非饱和、凸性和分离定理如何各自承担一块工作。下一章将把固定点方法转向博弈均衡和信息结构。

13.11 Exercises

习题 13.1. 定义纯交换经济，并说明禀赋在模型中起什么作用。

习题 13.2. 设 $\omega_1 = (2, 1)$ 、 $\omega_2 = (1, 3)$ 。计算总禀赋，并判断 $x_1 = (1, 2)$ 、 $x_2 = (2, 2)$ 是否可行。

习题 13.3. 写出消费者 i 在价格 p 下的预算集。

习题 13.4. 证明价格按正比例缩放不改变预算集。

习题 13.5. 解释为什么一般均衡价格通常只在比例意义上确定。

习题 13.6. 定义总需求和超额需求。

习题 13.7. 证明 Walras 法则。

习题 13.8. 设 $p = (2, 1)$ 、 $z(p) = (1, -2)$ 。检验 Walras 法则。

习题 13.9. 两商品经济中，若 $p \gg 0$ 、Walras 法则成立且 $z_1(p) = 0$ ，证明 $z_2(p) = 0$ 。

习题 13.10. 定义竞争均衡。

习题 13.11. 说明竞争均衡的个体最优条件和市场清算条件分别在说什么。

习题 13.12. 设一名消费者效用 $u(x) = x_1^{1/2}x_2^{1/2}$ ，禀赋 $\omega = (2, 1)$ ，价格 $p = (1, 2)$ 。求其需求。

习题 13.13. 两人两商品交换经济中，效用均为 Cobb-Douglas $u_i = \sqrt{x_{i1}x_{i2}}$ ，禀赋为 $\omega_1 = (2, 0)$ 、 $\omega_2 = (0, 2)$ 。令 $p_2 = 1$ ，求均衡相对价格。

习题 13.14. 在上一题中求均衡配置。

习题 13.15. 若两人效用为 $u_i = x_{i1} + x_{i2}$ ，禀赋仍为 $\omega_1 = (1, 0)$ 、 $\omega_2 = (0, 1)$ 。讨论均衡价格可能出现什么多值现象。

习题 13.16. 说明超额需求函数的零点为什么对应市场清算。

习题 13.17. 解释 Brouwer 固定点定理在均衡存在性证明中的作用。

习题 13.18. 说明为什么需求多值时常需要 Kakutani 而不是 Brouwer。

习题 13.19. 定义 Pareto 改进。

习题 13.20. 定义 Pareto 有效。

习题 13.21. 证明若偏好强单调，Pareto 有效配置必须用尽总资源。

习题 13.22. 在一商品两人经济中，总禀赋为 1，偏好均为“越多越好”。说明任意用尽资源的配置都是 Pareto 有效的。

习题 13.23. 证明第一福利定理。

习题 13.24. 解释第一福利定理为什么不是公平定理。

习题 13.25. 说明局部非饱和性在第一福利定理证明中的作用。

习题 13.26. 给出一个没有局部非饱和性时均衡可能不使用完资源的例子。

习题 13.27. 用一句话说明第二福利定理与第一福利定理的方向差异。

习题 13.28. 解释第二福利定理为什么需要凸性。

习题 13.29. 给出支持超平面的经济解释。

习题 13.30. 设可行集合 $F = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 + 2x_2 \leq 4\}$ 。求边界点 $x^* = (2, 1)$ 的一个支持价格。

习题 13.31. 说明非凸生产集合为什么可能破坏第二福利定理。

习题 13.32. 写出含生产经济中的市场清算条件。

习题 13.33. 企业生产集为 $Y = \{(-a, y) : y \leq \sqrt{a}, a \geq 0\}$ 。价格为 (w, p) ，其中投入价格为 w 、产出价格为 p 。写出利润最大化问题。

习题 13.34. 解释一般均衡中消费者财富为什么可能包含企业利润分红。

习题 13.35. 总结 Ch09-Ch12 的逻辑链条：消费者理论、生产理论、固定点方法和一般均衡分别承担什么角色。

13.12 Solutions

本章题解的主线是“个体最优 + 资源可行 + 价格支持”。计算题先写预算或市场清算方程；证明题先指出使用 Walras 法则、局部非饱和、凸性或固定点定理中的哪一个工具。

解答 13.1. 纯交换经济由消费者集合、每个消费者的消费集、偏好和初始禀赋组成，通常写为

$$\mathcal{E} = ((X_i, \succeq_i, \omega_i)_{i=1}^I).$$

禀赋 ω_i 是消费者 i 初始拥有的商品束。给定价格 p 后，禀赋决定财富 $p \cdot \omega_i$ ，从而决定预算集。纯交换经济没有生产，所有可分配资源都来自总禀赋 $\sum_i \omega_i$ 。

解答 13.2. 总禀赋为

$$\bar{\omega} = \omega_1 + \omega_2 = (2, 1) + (1, 3) = (3, 4).$$

给定配置的总消费为

$$x_1 + x_2 = (1, 2) + (2, 2) = (3, 4).$$

它等于总禀赋, 所以该配置可行, 并且正好用尽所有资源。

解答 13.3. 消费者 i 的财富来自出售禀赋, 等于 $p \cdot \omega_i$ 。因此预算集为

$$B_i(p) = \{x_i \in X_i : p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i\}.$$

若 $X_i = \mathbb{R}_+^L$, 这就是非负消费束中买得起的所有商品束。

解答 13.4. 取任意 $\alpha > 0$ 。缩放后的预算约束为

$$(\alpha p) \cdot x_i \leq (\alpha p) \cdot \omega_i.$$

两边同时除以 α , 得到

$$p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i.$$

所以缩放前后的预算集完全相同。价格单位变了, 但相对价格和可购买集合没有变。

解答 13.5. 一般均衡中所有消费者的财富都由价格乘以禀赋决定。如果把所有价格乘以同一个正数, 每个人财富也按同一比例变化, 预算集不变, 需求不变, 市场清算也不变。因此均衡只能确定相对价格。为了得到具体向量, 常把价格归一化到 $\sum_{\ell} p_{\ell} = 1$ 或令某个商品价格等于 1。

解答 13.6. 若 $x_i(p)$ 是消费者 i 在价格 p 下的需求, 总需求是

$$X(p) = \sum_{i=1}^I x_i(p).$$

超额需求是总需求减总禀赋:

$$z(p) = X(p) - \bar{\omega}.$$

若 $z_{\ell}(p) > 0$, 商品 ℓ 供不应求; 若 $z_{\ell}(p) < 0$, 商品 ℓ 供过于求。

解答 13.7. 局部非饱和性保证每个消费者在最优时花完预算:

$$p \cdot x_i(p) = p \cdot \omega_i.$$

对 i 求和:

$$p \cdot \sum_i x_i(p) = p \cdot \sum_i \omega_i.$$

移项得

$$p \cdot \left(\sum_i x_i(p) - \sum_i \omega_i \right) = p \cdot z(p) = 0.$$

这就是 Walras 法则：总超额需求的价值为零。

解答 13.8. 直接计算：

$$p \cdot z(p) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0.$$

所以该超额需求满足 Walras 法则。注意这不表示两个市场都清算，因为 $z_1 = 1$ 、 $z_2 = -2$ 都不是零；它只表示超额需求的价值加总为零。

解答 13.9. 两商品下 Walras 法则为

$$p_1 z_1(p) + p_2 z_2(p) = 0.$$

若 $z_1(p) = 0$ ，则

$$p_2 z_2(p) = 0.$$

由于 $p_2 > 0$ ，只能有 $z_2(p) = 0$ 。因此在正价格和 Walras 法则下，清算 $L - 1$ 个市场即可推出最后一个市场清算。

解答 13.10. 竞争均衡是一组价格和配置 (p^*, x^*) ，满足三个条件：价格非零且非负；每个消费者在价格 p^* 下选择自己的最优消费束；所有商品市场清算：

$$\sum_i x_i^* = \sum_i \omega_i.$$

所以均衡同时要求个体理性选择和社会资源相容。

解答 13.11. 个体最优条件说：给定价格，每个消费者都在自己的预算集里选最喜欢的商品束。市场清算条件说：把所有人的选择加总后，需求正好等于经济中的总资源。前者来自 Ch09 的消费者理论，后者是一般均衡新增的相容性要求。

解答 13.12. 财富为

$$w = p \cdot \omega = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4.$$

Cobb-Douglas $u = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ 把财富一半花在每种商品上，因此

$$x_1 = \frac{w}{2p_1} = \frac{4}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{w}{2p_2} = \frac{4}{4} = 1.$$

需求正好等于禀赋，是因为给定价格下消费者已经持有自己最想要的束。

解答 13.13. 令 $p_2 = 1$ 、 $p_1 = q$ 。消费者 1 财富为 $2q$ ，需求为

$$x_{11} = \frac{2q}{2q} = 1, \quad x_{12} = \frac{2q}{2} = q.$$

消费者 2 财富为 2，需求为

$$x_{21} = \frac{2}{2q} = \frac{1}{q}, \quad x_{22} = 1.$$

商品 1 总供给为 2，清算要求

$$1 + \frac{1}{q} = 2.$$

解得 $q = 1$ 。所以均衡相对价格 $p_1/p_2 = 1$ 。

解答 13.14. 由上一题 $q = 1$ ，代入需求：

$$x_1^* = (1, 1), \quad x_2^* = (1, 1).$$

总消费为 $(2, 2)$ ，等于总禀赋 $(2, 2)$ 。两人从完全偏向一种商品的禀赋，通过市场交换得到平衡消费。

解答 13.15. 当 $u_i = x_{i1} + x_{i2}$ 时，两种商品是完全替代品。若 $p_1 < p_2$ ，消费者只想买商品 1；若 $p_1 > p_2$ ，只想买商品 2；若 $p_1 = p_2$ ，预算线上所有商品组合带来同样效用。因此在 $p_1 = p_2$ 时需求可能是多值的。一般均衡仍可能存在，但用单值连续需求函数描述会不方便，这正是 Kakutani 对应方法有用的场景。

解答 13.16. 超额需求零点满足

$$z(p) = \sum_i x_i(p) - \sum_i \omega_i = 0.$$

这等价于

$$\sum_i x_i(p) = \sum_i \omega_i,$$

也就是所有商品市场同时清算。因此在给定需求选择下，寻找均衡价格就是寻找超额需求函数的零点。

解答 13.17. Brouwer 定理的作用是把价格调整规则的固定点转化为均衡候选。若能构造连续映射 $T: \Delta \rightarrow \Delta$ ，让 $T(p)$ 按超额需求方向调整价格，则 Brouwer 保证存在 $p^* = T(p^*)$ 。再用 Walras 法则证明该固定点没有正超额需求，从而得到市场清算。

解答 13.18. 需求多值时，价格到需求不再是普通函数，而是对应。Brouwer 处理连续单值映射，不能直接处理“一个价格对应多个需求”的情况。Kakutani 定理允许非空、紧、凸值且上半连续的对应，因此更适合处理有无差异、完全替代品或多重最优选择的一般均衡存在性证明。

解答 13.19. 若 x 和 y 都可行, 且对每个消费者 i , $y_i \succeq_i x_i$, 并且至少一个消费者 j 满足 $y_j \succ_j x_j$, 则 y 是对 x 的 Pareto 改进。它表示没有人变差, 至少一个人变好。

解答 13.20. 可行配置 x 是 Pareto 有效的, 如果不存在另一个可行配置 y 可以 Pareto 改进 x 。也就是说, 不可能在不伤害任何人的情况下让至少一个人更好。

解答 13.21. 若可行配置 x 没有用尽资源, 则存在某种商品有剩余。强单调偏好下, 把任意正数量的剩余商品给某个消费者, 会使该消费者严格更好, 而其他消费者消费不变。因此得到一个 Pareto 改进, 和 Pareto 有效矛盾。所以强单调下 Pareto 有效配置必须用尽总资源。

解答 13.22. 一商品两人经济中, 用尽资源意味着 $x_1 + x_2 = 1$ 。若想让消费者 1 更多, 必须减少消费者 2; 若想让消费者 2 更多, 必须减少消费者 1。由于两人都偏好更多商品, 任何让一方严格变好的可行变化都会让另一方变差。因此任意用尽资源的配置都是 Pareto 有效的。

解答 13.23. 反设竞争均衡配置 x^* 不是 Pareto 有效, 则存在可行配置 y 使所有人至少一样好, 且某人严格更好。对严格更好者, 均衡最优性意味着 $p^* \cdot y_i > p^* \cdot \omega_i$; 对至少一样好者, 局部非饱和和最优性意味着 $p^* \cdot y_i \geq p^* \cdot \omega_i$ 。至少一个严格不等式使得

$$p^* \cdot \sum_i y_i > p^* \cdot \sum_i \omega_i.$$

但 y 可行且 $p^* \geq 0$, 所以

$$p^* \cdot \sum_i y_i \leq p^* \cdot \sum_i \omega_i,$$

矛盾。因此竞争均衡配置 Pareto 有效。

解答 13.24. 第一福利定理只说明竞争均衡没有可行的 Pareto 改进, 也就是效率性质。它不比较不同消费者之间的效用水平, 也不判断禀赋分配是否公平。一个极端不平等的配置仍可能 Pareto 有效, 因为改善穷人可能必须减少富人的消费。

解答 13.25. 局部非饱和性用于把“至少一样好但更便宜”排除掉。如果某个 $y_i \succeq_i x_i^*$ 且 $p^* \cdot y_i < p^* \cdot \omega_i$, 消费者还有剩余预算。局部非饱和性允许在 y_i 附近找到更好的可行束, 从而与 x_i^* 的最优性矛盾。因此证明中才能推出 $p^* \cdot y_i \geq p^* \cdot \omega_i$ 。

解答 13.26. 设一人一商品, 禀赋为 1, 但偏好完全饱和: 所有消费束都无差异。价格 $p = 1$ 下, 消费者选择 $x = 0$ 也是预算集中的最优选择, 因为他对任何消费都无差异。此时资源没有用尽, 但仍满足个体最优。这个例子说明没有局部非饱和性时, 均衡概念可能允许浪费。

解答 13.27. 第一福利定理是“均衡 $\Rightarrow$ Pareto 有效”；第二福利定理是“在凸性和适当再分配下，Pareto 有效 $\Rightarrow$ 可被价格支持为均衡”。前者从市场到效率，后者从效率到可支持的市场制度。

解答 13.28. 第二福利定理要用支持超平面把 Pareto 有效配置和可改进集合分开。支持超平面定理需要凸性。若偏好或生产集合非凸，有效点附近可能没有一个线性价格向量能同时支持消费者最优和资源可行性，因此有效配置未必能通过竞争价格实现。

解答 13.29. 支持超平面的法向量可以解释为价格。它把可行集合放在一侧，并在目标配置处接触边界。经济含义是：在这个价格下，任何可行偏离的总价值都不超过目标配置，因此价格系统支持该配置不被可行改进击穿。

解答 13.30. 集合边界为

$$x_1 + 2x_2 = 4.$$

法向量为 $p = (1, 2)$ 。对所有 $x \in F$,

$$p \cdot x = x_1 + 2x_2 \leq 4.$$

而 $x^* = (2, 1)$ 满足 $p \cdot x^* = 2 + 2 = 4$ 。所以 $p = (1, 2)$ 是一个支持价格。

解答 13.31. 非凸生产集合可能导致规模经济或固定成本。此时社会有效的生产点可能无法由线性价格支持，因为企业在这些价格下可能更愿意跳到另一个非凸区域，或者需要亏损才能生产有效点。第二福利定理中的价格支持逻辑依赖凸性；非凸性会破坏边际价格对全局选择的支撑。

解答 13.32. 含生产时，若企业 j 的净产出为 y_j ，市场清算条件为

$$\sum_i x_i = \sum_i \omega_i + \sum_j y_j.$$

右侧是初始资源加上所有企业的净产出。若某个 $y_{j\ell} < 0$ ，表示企业使用商品 ℓ 作为投入；若 $y_{j\ell} > 0$ ，表示企业供给商品 ℓ 。

解答 13.33. 生产计划为 $(-a, y)$ ，投入商品的价格为 w ，产出商品的价格为 p 。利润为

$$py - wa.$$

技术约束为 $y \leq \sqrt{a}$ 、 $a \geq 0$ 。利润最大化问题是

$$\max_{a \geq 0, y \leq \sqrt{a}} py - wa.$$

在最优时若 $p > 0$ ，通常会取 $y = \sqrt{a}$ ，回到 Ch10 的企业最优化问题。

解答 13.34. 如果消费者拥有企业股份，企业利润最终归消费者所有。于是消费者财富不仅包括禀赋价值 $p \cdot \omega_i$ ，还包括按股份获得的利润分红。这使企业利润最大化和消费者预算约束连接起来，是生产经济一般均衡中的关键会计关系。

解答 13.35. Ch09 给出消费者在价格和财富下如何形成需求；Ch10 给出企业在价格下如何形成供给和利润；Ch11 提供固定点方法，说明如何寻找价格和选择的自洽点；Ch12 把这些拼接起来，定义竞争均衡，并证明均衡与 Pareto 效率之间的福利定理。

13.13 Computation Lab

13.13.1 两人两商品交换经济

设两名消费者效用均为

$$u_i(x_{i1}, x_{i2}) = x_{i1}^{\alpha_i} x_{i2}^{1-\alpha_i}.$$

给定禀赋 ω_1, ω_2 ，令 $p_2 = 1$ 、 $p_1 = q$ 。消费者 i 的财富为

$$w_i(q) = q\omega_{i1} + \omega_{i2}.$$

Marshallian demand 为

$$x_{i1}(q) = \frac{\alpha_i w_i(q)}{q}, \quad x_{i2}(q) = (1 - \alpha_i) w_i(q).$$

商品 1 的超额需求为

$$z_1(q) = x_{11}(q) + x_{21}(q) - (\omega_{11} + \omega_{21}).$$

数值任务是求解 $z_1(q) = 0$ 。

13.13.2 超额需求图像

取

$$\alpha_1 = 0.5, \quad \alpha_2 = 0.5, \quad \omega_1 = (1, 0), \quad \omega_2 = (0, 1).$$

在 $q \in [0.2, 5]$ 上画出 $z_1(q)$ 。图像应在 $q = 1$ 附近穿过零。再把 α_1 改成 0.8，观察均衡相对价格如何变化。

13.13.3 Tâtonnement 迭代

给定简单价格调整：

$$q_{t+1} = q_t + \eta z_1(q_t),$$

其中 $\eta > 0$ 是步长。选择 $q_0 = 0.5$ ，比较 $\eta = 0.05$ 、 $\eta = 0.2$ 、 $\eta = 0.8$ 的收敛表现。步长太大时，价格可能振荡或变成负数；实际计算中需要加入下界截断，例如 $q_{t+1} = \max\{0.01, q_t + \eta z_1(q_t)\}$ 。

13.13.4 Edgeworth Box 可行性检查

在两人两商品经济中，总禀赋为 $\bar{\omega} = (1, 1)$ 。随机生成若干 $x_1 \in [0, 1]^2$ ，令

$$x_2 = \bar{\omega} - x_1.$$

检查 $x_2 \geq 0$ 。所有满足非负性的点都对应 Edgeworth box 中的可行配置。若效用为 Cobb-Douglas，可以计算每个配置下两人的效用，并画出近似契约曲线。

13.13.5 福利定理数值检查

对一个候选均衡 (p^*, x^*) ，做三步检查：

1. 预算检查：确认 $p^* \cdot x_i^* = p^* \cdot \omega_i$ 。
2. 最优性检查：在预算线上采样若干消费束，确认没有采样点给出更高效用。
3. 可行性检查：确认 $\sum_i x_i^* = \sum_i \omega_i$ 。

这些数值检查不能替代理论证明，但能帮助读者看见第一福利定理中的三个关键部件如何同时工作。

13.13.6 Recommended Checks

1. 改变禀赋分布，比较均衡价格与均衡配置。
2. 改变 Cobb-Douglas 参数 α_i ，观察偏好强度如何影响相对价格。
3. 对完全替代效用做同样实验，观察需求多值或价格不稳定现象。
4. 用价格归一化 $\sum_\ell p_\ell = 1$ 重写两商品计算，确认结果只差比例。

第十四章 博弈均衡与信息结构初步

14.1 为什么一般均衡之后需要博弈

Ch12 的竞争均衡把许多消费者和企业放进同一个价格系统中。价格是协调机制，每个主体把价格当作给定。博弈论处理另一类相互依赖：一个人的最优选择直接取决于其他人的选择。企业定价、拍卖、平台进入、货币政策承诺、搜索与匹配、金融挤兑都具有这种结构。

本章的数学主线仍然是固定点。消费者理论中，需求是价格的函数或对应；博弈论中，最佳反应是他人策略的函数或对应。Nash 均衡要求每个人的策略同时属于自己的最佳反应：

$$s_i^* \in B_i(s_{-i}^*), \quad i = 1, \dots, N.$$

这正是对应固定点。

14.2 标准式博弈

定义 14.1 (标准式博弈). 一个有限标准式博弈由

$$G = (N, (S_i)_{i=1}^N, (u_i)_{i=1}^N)$$

给出。其中 N 是玩家数， S_i 是玩家 i 的纯策略集合， $S = \prod_i S_i$ 是策略组合集合，收益函数为

$$u_i : S \rightarrow \mathbb{R}.$$

若写 $s = (s_i, s_{-i})$ ，则 s_i 是玩家 i 的策略， s_{-i} 是其他玩家的策略组合。

例 14.1 (囚徒困境). 两名玩家各有两个策略：合作 C 和背叛 D 。收益矩阵为

	C	D
C	(2, 2)	(0, 3)
D	(3, 0)	(1, 1)

对玩家 1, 如果玩家 2 选 C , 玩家 1 选 D 得到 3, 高于选 C 的 2; 如果玩家 2 选 D , 玩家 1 选 D 得到 1, 高于选 C 的 0。因此 D 严格占优。玩家 2 同理。唯一占优策略均衡是 (D, D) 。

经济解释是: 个体理性选择不一定实现共同最优。虽然 (C, C) 给两人总收益 4, 高于 (D, D) 的 2, 但在一次性同时行动中, 每个人都有背叛动机。

14.3 占优策略与最佳反应

定义 14.2 (严格占优). 若对所有 $s_{-i} \in S_{-i}$, 都有

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}),$$

则称策略 s_i 严格占优于 s'_i 。

定义 14.3 (最佳反应). 给定其他玩家策略 s_{-i} , 玩家 i 的最佳反应对应为

$$B_i(s_{-i}) = \arg \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}).$$

定义 14.4 (Nash 均衡). 策略组合 $s^* \in S$ 是纯策略 Nash 均衡, 如果对每个玩家 i ,

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \text{for all } s_i \in S_i.$$

等价地,

$$s_i^* \in B_i(s_{-i}^*), \quad i = 1, \dots, N.$$

命题 14.1 (Nash 均衡的最佳反应刻画). 策略组合 s^* 是 Nash 均衡, 当且仅当每个分量都是对其他人策略的最佳反应。

证明. 这只是定义的改写。Nash 条件要求任何玩家单方面偏离都不能提高收益, 即

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

对所有 s_i 成立。这正是 $s_i^* \in \arg \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}^*) = B_i(s_{-i}^*)$ 。□

例 14.2 (协调博弈的多个 Nash 均衡). 考虑收益矩阵

	L	R
U	(2, 2)	(0, 0)
D	(0, 0)	(1, 1)

若玩家 2 选 L , 玩家 1 的最佳反应是 U ; 若玩家 2 选 R , 玩家 1 的最佳反应是 D 。玩家 2 同理。因此 (U, L) 和 (D, R) 都是 Nash 均衡。

这个例子说明 Nash 均衡不一定唯一。它描述的是自洽性: 给定别人这么做, 自己没有单方面偏离的动机。两个均衡分别对应高协调和低协调状态。

例 14.3 (没有纯策略均衡的匹配硬币). 玩家 1 选择 H 或 T , 玩家 2 也选择 H 或 T . 若两人相同, 玩家 1 得 1、玩家 2 得 -1 ; 若不同, 玩家 1 得 -1 、玩家 2 得 1. 收益矩阵为

	H	T
H	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
T	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

若玩家 2 选 H , 玩家 1 最好选 H , 但此时玩家 2 想改成 T . 逐格检查可知没有任何纯策略组合让两人都在最佳反应上. 这个例子推动我们引入混合策略.

14.4 混合策略

定义 14.5 (混合策略). 若 S_i 是有限集合, 玩家 i 的混合策略是 S_i 上的概率分布, 记为 $\sigma_i \in \Delta(S_i)$. 混合策略组合为 $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$.

混合策略不是说玩家“心理上不确定”, 而是把策略空间扩展到概率单纯形. 这样每个玩家的策略集合变成非空、紧、凸集合; 收益变成关于混合策略的多重线性函数.

定义 14.6 (混合策略期望收益). 有限博弈中, 混合策略组合 σ 下玩家 i 的期望收益为

$$U_i(\sigma) = \sum_{s \in S} u_i(s) \prod_{j=1}^N \sigma_j(s_j).$$

例 14.4 (匹配硬币的混合均衡). 设玩家 1 选择 H 的概率为 p , 玩家 2 选择 H 的概率为 q . 玩家 1 选 H 的期望收益为

$$q \cdot 1 + (1 - q)(-1) = 2q - 1.$$

选 T 的期望收益为

$$q(-1) + (1 - q)1 = 1 - 2q.$$

若玩家 1 在均衡中混合, 必须对 H 和 T 无差异:

$$2q - 1 = 1 - 2q.$$

解得 $q = 1/2$. 同理, 玩家 2 无差异要求 $p = 1/2$. 所以混合 Nash 均衡为

$$p^* = q^* = 1/2.$$

混合均衡的核心计算法则是: 让对方在其支持集上的纯策略无差异.

例 14.5 (进入博弈的混合均衡). 两个企业同时决定进入 E 或不进入 N 。若两者都进入, 各得 -1 ; 若一方进入另一方不进入, 进入者得 2 , 不进入者得 0 ; 若都不进入, 各得 0 :

	E	N
E	$(-1, -1)$	$(2, 0)$
N	$(0, 2)$	$(0, 0)$

设对手进入概率为 q 。自己进入的期望收益为

$$-q + 2(1 - q) = 2 - 3q.$$

不进入收益为 0 。混合时无差异:

$$2 - 3q = 0,$$

所以 $q = 2/3$ 。对称混合均衡中每个企业以 $2/3$ 的概率进入。

经济解释是: 进入概率越高, 竞争越激烈, 进入的吸引力越低。混合均衡把对手进入概率调到使自己刚好无差异。

14.5 Nash 存在定理

定理 14.1 (Nash 存在定理, 有限博弈). 每个有限标准式博弈至少存在一个混合策略 Nash 均衡。

证明思路. 对每个玩家 i , 混合策略集合 $\Delta(S_i)$ 是非空、紧、凸的单纯形。乘积集合

$$\Delta = \prod_{i=1}^N \Delta(S_i)$$

仍非空、紧、凸。

给定 σ_{-i} , 玩家 i 最大化连续且关于 σ_i 线性的期望收益 $U_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ 。因此最佳反应集合

$$B_i(\sigma_{-i}) = \arg \max_{\sigma_i \in \Delta(S_i)} U_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

非空、紧、凸。由最大值定理, 最佳反应对应上半连续。

定义联合最佳反应对应

$$B(\sigma) = \prod_{i=1}^N B_i(\sigma_{-i}).$$

它从 Δ 映到自身, 且满足 Kakutani 定理的条件。于是存在 $\sigma^* \in \Delta$ 使

$$\sigma^* \in B(\sigma^*).$$

这正是混合策略 Nash 均衡。

□

例 14.6 (最佳反应为什么是凸值). 在有限博弈中, 若给定 σ_{-i} , 玩家 i 的两个纯策略 A 和 B 都给出最大期望收益 3, 则任意混合

$$\lambda A + (1 - \lambda)B, \quad \lambda \in [0, 1],$$

也给出期望收益 3。原因是期望收益对自己的混合策略是线性的。于是最佳反应集合是一个面, 因而是凸的。这正是 Nash 存在证明中 Kakutani 可以使用的关键。

14.6 连续策略与一阶条件

有限博弈之外, 许多经济博弈有连续行动。例如 Cournot 产量竞争、价格竞争和公共品贡献。若收益函数可微, 最佳反应常由一阶条件刻画。

例 14.7 (Cournot 双寡头). 两个企业选择产量 $q_1, q_2 \geq 0$ 。反需求为

$$P(Q) = a - bQ, \quad Q = q_1 + q_2,$$

边际成本为 c , 其中 $a > c$ 。企业 i 利润为

$$\pi_i(q_i, q_j) = (a - b(q_i + q_j) - c)q_i.$$

对 q_i 求一阶条件:

$$a - c - bq_j - 2bq_i = 0.$$

最佳反应为

$$B_i(q_j) = \frac{a - c - bq_j}{2b}$$

在非负约束下再取正部。对称均衡满足 $q_1 = q_2 = q^*$, 所以

$$q^* = \frac{a - c - bq^*}{2b}.$$

解得

$$q^* = \frac{a - c}{3b}.$$

这里 Nash 均衡是两个最佳反应曲线的交点。

例 14.8 (最佳反应斜率和战略替代). Cournot 最佳反应

$$B_i(q_j) = \frac{a - c}{2b} - \frac{1}{2}q_j$$

关于对手产量下降, 因此产量是战略替代: 对手生产越多, 自己最优产量越低。这和 Ch08 的战略互补相反。不同的斜率结构会影响均衡唯一性和动态调整稳定性。

14.7 战略互补与单调均衡

若玩家行动集合是格，收益具有 increasing differences，则最佳反应随他人行动上升而上升。此时可以使用 Tarski 定理。

定义 14.7 (战略互补). 若玩家 i 的收益 $u_i(s_i, s_{-i})$ 在 s_i 和 s_{-i} 之间具有 increasing differences，则称策略具有战略互补。直觉是：他人行动越高，自己选择高行动的相对收益越大。

定理 14.2 (超模博弈的固定点思路). 若每个策略集合是完全格，最佳反应对应非空且存在单调选择，则单调最佳反应映射存在固定点。该固定点是 Nash 均衡。

例 14.9 (技术采纳的战略互补). 两家企业选择是否采用新技术 0 或 1。若只有一家采用，收益提升有限；若两家都采用，供应链和兼容性提高，收益更高。设收益为

$$u_i(s_i, s_j) = 2s_i + s_i s_j - s_i.$$

当 $s_j = 0$ 时，采用的净收益为 1；当 $s_j = 1$ 时，采用的净收益为 2。对手采用越可能，自己采用越有吸引力。这是战略互补。最佳反应单调，可能出现“都不采用”和“都采用”这样的多重均衡。

14.8 信息结构与 Bayesian 博弈

到目前为止，玩家知道博弈的收益函数。许多经济场景中，玩家只知道自己的成本、估值或类型，而不知道他人的类型。信息结构把这种不完全信息组织起来。

定义 14.8 (类型与信念). 玩家 i 的类型为 $\theta_i \in \Theta_i$ 。类型可以表示成本、估值、质量或私人信号。玩家对其他人类型的条件分布称为信念，记为

$$\mu_i(\theta_{-i} | \theta_i).$$

定义 14.9 (Bayesian 策略). Bayesian 博弈中，玩家 i 的策略是从类型到行动的函数：

$$s_i : \Theta_i \rightarrow A_i.$$

也就是说，不同类型可以选择不同行动。

定义 14.10 (Bayesian Nash 均衡). 策略组合 $s^* = (s_1^*, \dots, s_N^*)$ 是 Bayesian Nash 均衡，如果对每个玩家 i 和每个类型 θ_i ， $s_i^*(\theta_i)$ 最大化给定信念和他人策略时的条件期望收益。

例 14.10 (一价拍卖的类型策略). 两个买家估值分别为 $\theta_i \in [0, 1]$ 。在一价密封拍卖中, 行动是出价 b_i 。策略不是一个单一出价, 而是函数

$$b_i = s_i(\theta_i).$$

高估值类型通常出更高价格, 低估值类型出更低价格。均衡要求每个估值类型在给定别人出价函数时都不愿改变自己的出价。这就是 Bayesian Nash 条件。

例 14.11 (离散类型的期望收益). 玩家 1 有类型 H, L , 概率各为 $1/2$ 。玩家 2 不观察类型, 只知道概率。若玩家 1 的策略为 $s_1(H) = A$ 、 $s_1(L) = B$, 玩家 2 选择 C 的期望收益为

$$\frac{1}{2}u_2(A, C, H) + \frac{1}{2}u_2(B, C, L).$$

选择 D 的期望收益类似。玩家 2 的最佳反应比较的是这些按信念加权的期望收益, 而不是某一个确定类型下的收益。

14.9 与动态和金融章节的接口

博弈论提供三种后续章节会反复使用的语言。第一, 均衡是固定点: 策略等于最佳反应。第二, 信息影响最优选择: 策略可能是状态或类型的函数。第三, 混合和信念把概率引入战略推理。Ch14 的有限状态动态规划会把“策略是状态的函数”推到动态环境; 卷二和卷三会进一步把信息结构扩展为过滤、条件期望和随机过程。

14.10 本章小结

博弈均衡是一般均衡思想的近亲: 都要求个体最优和整体自洽。标准式博弈用策略集和收益函数描述相互依赖; 最佳反应对应把优化问题变成固定点问题; 混合策略把有限博弈放进紧凸单纯形; Kakutani 给出 Nash 存在性; Tarski 处理战略互补和多重均衡; Bayesian 博弈把私人信息纳入策略函数和条件期望。下一章将进入有限状态动态规划, 把“策略依赖状态”的思想变成递归优化。

14.11 Exercises

习题 14.1. 定义有限标准式博弈。

习题 14.2. 解释 s_i 和 s_{-i} 的含义。

习题 14.3. 定义严格占优策略。

习题 14.4. 定义最佳反应对应。

习题 14.5. 定义纯策略 Nash 均衡。

习题 14.6. 证明 Nash 均衡等价于每个玩家都在最佳反应上。

习题 14.7. 给定收益矩阵

	L	R
U	(3, 2)	(0, 0)
D	(1, 1)	(2, 3)

求所有纯策略 Nash 均衡。

习题 14.8. 判断上一题中是否存在严格占优策略。

习题 14.9. 给定囚徒困境矩阵, 说明为什么 (D, D) 是 Nash 均衡但不是总收益最大配置。

习题 14.10. 定义混合策略。

习题 14.11. 写出有限博弈中混合策略期望收益公式。

习题 14.12. 解释为什么混合策略集合 $\Delta(S_i)$ 是凸集。

习题 14.13. 匹配硬币中, 推导混合均衡。

习题 14.14. 给定博弈

	L	R
U	(2, 1)	(0, 0)
D	(0, 0)	(1, 2)

求玩家 1 在混合均衡中使玩家 2 无差异的概率。

习题 14.15. 继续上一题, 求玩家 2 在混合均衡中使玩家 1 无差异的概率。

习题 14.16. 说明混合均衡中为什么支持集内的纯策略必须给出相同期望收益。

习题 14.17. 说明 Nash 存在定理为什么需要把纯策略扩展为混合策略。

习题 14.18. 概述 Nash 存在定理的 Kakutani 证明框架。

习题 14.19. 解释最佳反应对应为什么可能多值。

习题 14.20. 说明最佳反应集合为什么是凸的。

习题 14.21. Cournot 模型中 $P = a - b(q_1 + q_2)$, 边际成本 c 。推导企业 1 的最佳反应。

习题 14.22. 求对称 Cournot Nash 均衡产量。

习题 14.23. 在 Cournot 模型中解释为什么产量是战略替代。

习题 14.24. 若两个企业的最佳反应为 $q_1 = 3 - 0.5q_2$ 、 $q_2 = 3 - 0.5q_1$ ，求均衡。

习题 14.25. 定义战略互补。

习题 14.26. 解释为什么战略互补适合用 Tarski 定理。

习题 14.27. 给定二元行动 $s_i \in \{0, 1\}$ ，收益 $u_i(s_i, s_j) = s_i(1 + s_j)$ 。求最佳反应并判断是否战略互补。

习题 14.28. 说明多重均衡在协调博弈中的经济含义。

习题 14.29. 定义类型。

习题 14.30. 定义 Bayesian 策略。

习题 14.31. 定义 Bayesian Nash 均衡。

习题 14.32. 设玩家有两种类型 H, L ，概率各为 $1/2$ 。若行动 A 在 H 类型下收益 4、在 L 类型下收益 0，行动 B 两种类型收益都为 1，计算不知道类型时 A 与 B 的期望收益。

习题 14.33. 解释信息结构如何影响最佳反应。

习题 14.34. 比较竞争均衡和 Nash 均衡的共同点与差异。

习题 14.35. 说明 Ch13 如何为 Ch14 的动态规划做准备。

14.12 Solutions

本章题解的核心是“给定别人，自己最优”。矩阵题先列最佳反应；混合题先写无差异条件；存在性题要指出使用紧凸单纯形、连续收益、凸值最佳反应和 Kakutani 定理。

解答 14.1. 有限标准式博弈由

$$G = (N, (S_i)_{i=1}^N, (u_i)_{i=1}^N)$$

给出。其中 N 是玩家数， S_i 是玩家 i 的有限纯策略集合， $u_i : \prod_j S_j \rightarrow \mathbb{R}$ 是玩家 i 的收益函数。它描述的是所有玩家同时选择策略后，每个人得到多少收益。

解答 14.2. s_i 表示玩家 i 自己的策略； s_{-i} 表示除玩家 i 以外所有玩家的策略组合。因此完整策略组合可写成

$$s = (s_i, s_{-i}).$$

这种记号方便表达单方面偏离：只改变 s_i ，保持 s_{-i} 不变。

解答 14.3. 若对所有 s_{-i} ，都有

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}),$$

则 s_i 严格占优于 s'_i 。意思是无论别人怎么选， s_i 都比 s'_i 给玩家 i 更高收益。

解答 14.4. 给定其他玩家策略 s_{-i} ，最佳反应对应为

$$B_i(s_{-i}) = \arg \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}).$$

它可能是集合而不是单点，因为多个策略可能给出相同最大收益。

解答 14.5. 纯策略组合 s^* 是 Nash 均衡，如果对每个玩家 i 和任意单方面偏离 s_i ，都有

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*).$$

也就是说，在别人保持均衡策略时，没有任何玩家愿意单独改变自己的策略。

解答 14.6. 若 s^* 是 Nash 均衡，则对所有 s_i ，

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*),$$

所以 s_i^* 最大化 $u_i(\cdot, s_{-i}^*)$ ，即 $s_i^* \in B_i(s_{-i}^*)$ 。反过来，若每个 $s_i^* \in B_i(s_{-i}^*)$ ，则每个玩家都没有有利的单方面偏离，正是 Nash 均衡。

解答 14.7. 列最佳反应。若玩家 2 选 L ，玩家 1 在 U, D 下收益为 3, 1，最佳反应是 U 。若玩家 2 选 R ，玩家 1 收益为 0, 2，最佳反应是 D 。若玩家 1 选 U ，玩家 2 在 L, R 下收益为 2, 0，最佳反应是 L 。若玩家 1 选 D ，玩家 2 收益为 1, 3，最佳反应是 R 。共同最佳反应为 (U, L) 和 (D, R) 。

解答 14.8. 没有严格占优策略。对玩家 1，若玩家 2 选 L ， U 优于 D ；若玩家 2 选 R ， D 优于 U 。所以没有一个策略在所有情况下都更好。玩家 2 同理，面对 U 时选 L ，面对 D 时选 R 。

解答 14.9. 囚徒困境中，对每个玩家而言，无论对方合作还是背叛，背叛都给出更高收益，所以 (D, D) 是占优策略均衡，也必然是 Nash 均衡。但 (C, C) 给两人的收益为 (2, 2)，总收益为 4，高于 (D, D) 的总收益 2。因此 Nash 均衡体现个体稳定性，不一定最大化总收益。

解答 14.10. 混合策略是纯策略集合上的概率分布。若 $S_i = \{A, B\}$, 一个混合策略可写为 $(p, 1-p)$, 表示以概率 p 选 A 、以概率 $1-p$ 选 B 。

解答 14.11. 有限博弈中, 混合策略组合 σ 下玩家 i 的期望收益为

$$U_i(\sigma) = \sum_{s \in S} u_i(s) \prod_{j=1}^N \sigma_j(s_j).$$

每个纯策略组合 s 出现的概率是各玩家选择对应纯策略概率的乘积。

解答 14.12. $\Delta(S_i)$ 是所有非负概率向量且分量和为 1 的集合。若 $\sigma, \tau \in \Delta(S_i)$, 对 $\lambda \in [0, 1]$,

$$\lambda\sigma + (1-\lambda)\tau$$

仍非负, 且分量和仍为 1。因此它仍是概率分布, $\Delta(S_i)$ 是凸集。

解答 14.13. 设玩家 1 选 H 的概率为 p , 玩家 2 选 H 的概率为 q 。玩家 1 选 H 的收益为 $2q-1$, 选 T 的收益为 $1-2q$ 。混合要求无差异:

$$2q-1 = 1-2q,$$

得 $q = 1/2$ 。玩家 2 同理得到 $p = 1/2$ 。所以混合均衡为双方各以 $1/2$ 概率选择 H 。

解答 14.14. 设玩家 1 选 U 的概率为 p 。玩家 2 选 L 的期望收益为

$$p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p.$$

选 R 的期望收益为

$$p \cdot 0 + (1-p) \cdot 2 = 2(1-p).$$

无差异要求

$$p = 2(1-p),$$

所以 $p = 2/3$ 。

解答 14.15. 设玩家 2 选 L 的概率为 q 。玩家 1 选 U 的期望收益为

$$2q + 0(1-q) = 2q.$$

选 D 的期望收益为

$$0q + 1(1-q) = 1-q.$$

无差异要求

$$2q = 1-q,$$

所以 $q = 1/3$ 。混合均衡为玩家 1 以 $2/3$ 选 U , 玩家 2 以 $1/3$ 选 L 。

解答 14.16. 若某个支持集内纯策略给出更低期望收益，玩家就会把该策略的概率移到收益更高的纯策略上，从而提高期望收益。因此在最优混合策略中，所有被赋予正概率的纯策略必须给出相同的最大期望收益。

解答 14.17. 有些有限博弈没有纯策略 Nash 均衡，例如匹配硬币。扩展到混合策略后，每个玩家的策略集合变成非空、紧、凸的概率单纯形，收益函数连续且线性，最佳反应对应满足 Kakutani 条件。这样可以保证至少存在混合均衡。

解答 14.18. 证明框架如下：第一，混合策略集合 $\Delta = \prod_i \Delta(S_i)$ 非空、紧、凸。第二，给定他人混合策略，每个玩家最大化连续线性期望收益，最佳反应非空、紧、凸。第三，由最大值定理，最佳反应对应上半连续。第四，联合最佳反应 $B(\sigma) = \prod_i B_i(\sigma_{-i})$ 满足 Kakutani 条件，所以有固定点 $\sigma^* \in B(\sigma^*)$ ，即 Nash 均衡。

解答 14.19. 最佳反应可能多值，因为多个策略可能给出同样最高收益。例如给定对手混合策略时，玩家对 A 和 B 的期望收益都等于 3，并且高于其他策略，那么 A 、 B 以及它们的任意混合都是最佳反应。

解答 14.20. 在混合策略空间中，期望收益关于自己的混合策略是线性的。若 σ_i 和 τ_i 都是最佳反应，给出相同最大值 M ，则

$$U_i(\lambda\sigma_i + (1-\lambda)\tau_i, \sigma_{-i}) = \lambda M + (1-\lambda)M = M.$$

所以任意凸组合也是最佳反应，最佳反应集合是凸的。

解答 14.21. 企业 1 利润为

$$\pi_1(q_1, q_2) = (a - b(q_1 + q_2) - c)q_1.$$

展开为

$$\pi_1 = (a - c - bq_2)q_1 - bq_1^2.$$

对 q_1 求一阶条件：

$$a - c - bq_2 - 2bq_1 = 0.$$

因此内点最佳反应为

$$q_1 = \frac{a - c - bq_2}{2b}.$$

考虑非负约束时取

$$B_1(q_2) = \max \left\{ 0, \frac{a - c - bq_2}{2b} \right\}.$$

解答 14.22. 对称均衡中 $q_1 = q_2 = q^*$ 。代入最佳反应：

$$q^* = \frac{a - c - bq^*}{2b}.$$

整理得

$$3bq^* = a - c,$$

所以

$$q^* = \frac{a - c}{3b}.$$

解答 14.23. Cournot 最佳反应为

$$B_i(q_j) = \frac{a - c}{2b} - \frac{1}{2}q_j.$$

它随 q_j 增加而下降。对手产量越高，市场价格越低，自己增加产量的边际收益越低，因此自己最优产量下降。这就是战略替代。

解答 14.24. 解方程组

$$q_1 = 3 - 0.5q_2, \quad q_2 = 3 - 0.5q_1.$$

对称性给出 $q_1 = q_2 = q$ ，于是

$$q = 3 - 0.5q,$$

所以 $1.5q = 3$ ，得 $q = 2$ 。均衡为 $(2, 2)$ 。

解答 14.25. 战略互补指他人行动越高，自己选择更高行动的相对收益越大。数学上通常由 increasing differences 表示： $u_i(s_i, s_{-i})$ 在 s_i 和 s_{-i} 之间具有递增差分。

解答 14.26. 战略互补使最佳反应具有单调性。若策略集合具有格结构，单调最佳反应映射就可以用 Tarski 固定点定理得到固定点。固定点正是每个玩家都在最佳反应上的 Nash 均衡。Tarski 方法还常给出最小和最大均衡。

解答 14.27. 若 $s_i = 0$ ，收益为 0；若 $s_i = 1$ ，收益为 $1 + s_j$ 。无论 $s_j = 0$ 还是 1，选择 1 都严格更好，所以最佳反应恒为 1。由于对手行动升高时选择高行动的收益差从 1 增加到 2，它具有战略互补。

解答 14.28. 协调博弈中的多重均衡表示经济可能稳定在不同自我实现状态。例如所有人都采用新技术时，采用是最优；所有人都不采用时，不采用也可能是最优。均衡选择可能依赖历史、预期、政策协调或焦点。

解答 14.29. 类型是玩家的私人信息变量，通常表示估值、成本、质量、风险偏好或信号。记作 $\theta_i \in \Theta_i$ 。其他玩家可能不知道 θ_i ，只知道其分布或条件分布。

解答 14.30. Bayesian 策略是从类型到行动的函数：

$$s_i : \Theta_i \rightarrow A_i.$$

它规定玩家在每一种可能类型下采取什么行动。因此策略不是一个单一动作，而是一整套类型依赖的行动计划。

解答 14.31. Bayesian Nash 均衡是一个策略函数组合 s^* ，使得对每个玩家 i 和每个类型 θ_i ，行动 $s_i^*(\theta_i)$ 在给定信念和他人策略函数时最大化条件期望收益。它是“不完全信息下的逐类型最佳反应”。

解答 14.32. 行动 A 的期望收益为

$$\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 2.$$

行动 B 的期望收益为

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1.$$

如果玩家不知道类型且只最大化期望收益，则选择 A 。但若玩家观察自己的类型，策略可能规定 H 类型选 A ， L 类型选 B 。

解答 14.33. 信息结构决定玩家在选择时条件化在哪些信息上。若玩家知道自己的类型，就按类型计算条件期望收益；若还能观察信号，就按信号更新信念。信息越精细，最佳反应越能针对真实状态调整，因此均衡策略也会改变。

解答 14.34. 共同点是二者都要求个体最优和整体自洽。竞争均衡中，给定价格，每个消费者或企业最优，市场清算；Nash 均衡中，给定他人策略，每个玩家最优，策略组合自洽。差异是竞争均衡通过价格协调匿名市场互动，而 Nash 均衡直接处理策略之间的相互依赖。

解答 14.35. Ch13 引入了策略作为条件化规则的思想：在博弈中，策略可以依赖他人行动、类型或信息。Ch14 的动态规划会把策略写成状态的函数，并用 Bellman 方程刻画最优状态依赖决策。因此 Ch13 是从静态最优反应走向状态依赖递归决策的桥梁。

14.13 Computation Lab

14.13.1 矩阵博弈最佳反应枚举

给定两个 $m \times n$ 收益矩阵 A, B ，其中 A_{ij} 是玩家 1 选第 i 行、玩家 2 选第 j 列时玩家 1 的收益， B_{ij} 是玩家 2 的收益。计算纯策略 Nash 均衡的步骤：

1. 对每一列 j , 找出使 A_{ij} 最大的行 i 。
2. 对每一行 i , 找出使 B_{ij} 最大的列 j 。
3. 同时被标记为双方最佳反应的格子就是纯策略 Nash 均衡。

14.13.2 二乘二混合均衡求解

设玩家 1 收益矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

玩家 2 收益矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

令玩家 1 选第一行概率为 p , 玩家 2 选第一列概率为 q 。玩家 1 无差异条件为

$$qa + (1 - q)b = qc + (1 - q)d.$$

玩家 2 无差异条件为

$$pe + (1 - p)g = pf + (1 - p)h.$$

解这两个线性方程并检查 $p, q \in [0, 1]$, 即可得到完全混合均衡候选。

14.13.3 最佳反应动态

对 2×2 博弈, 可以从任意初始混合概率 (p_0, q_0) 出发, 令每个玩家在下一期选择对当前对手混合策略的一个最佳反应。记录序列

$$(p_t, q_t)_{t \geq 0}.$$

在协调博弈中, 动态可能收敛到某个纯均衡; 在匹配硬币中, 动态可能循环。这说明 Nash 均衡存在不等于简单最佳反应动态一定收敛。

14.13.4 Cournot 数值迭代

设 $a = 10$ 、 $b = 1$ 、 $c = 1$ 。最佳反应为

$$B_i(q_j) = \max\{0, 4.5 - 0.5q_j\}.$$

从 $(q_1^0, q_2^0) = (0, 0)$ 出发同步迭代:

$$q_1^{t+1} = B_1(q_2^t), \quad q_2^{t+1} = B_2(q_1^t).$$

理论均衡为

$$q_1^* = q_2^* = 3.$$

比较同步迭代和交替迭代的收敛路径。

14.13.5 Bayesian 收益计算

设玩家 1 的类型 $\theta_1 \in \{H, L\}$, 概率分别为 π 和 $1 - \pi$ 。给定玩家 1 的类型策略 $s_1(H), s_1(L)$ 和玩家 2 的行动 a_2 , 玩家 2 的期望收益为

$$\pi u_2(s_1(H), a_2, H) + (1 - \pi) u_2(s_1(L), a_2, L).$$

改变 π , 观察玩家 2 的最佳反应如何变化。这是信息结构影响行为的最小数值实验。

14.13.6 Recommended Checks

1. 随机生成 2×2 收益矩阵, 枚举纯策略 Nash 均衡。
2. 对没有纯均衡的矩阵, 尝试计算混合均衡。
3. 比较协调博弈与零和博弈中的最佳反应动态。
4. 在 Cournot 模型中改变 a, b, c , 观察均衡产量如何变化。
5. 在 Bayesian 收益计算中改变先验概率, 画出最佳反应切换阈值。

第十五章 有限状态动态规划与有限状态资产定价

15.1 从静态选择到递归选择

前面章节的选择问题大多是静态的：给定预算、技术、价格或他人策略，主体选择一次。动态经济学把选择放进时间中。今天的行动影响明天的状态，明天的状态又影响后天的选择。递归方法的核心思想是：如果状态变量已经包含了所有与未来有关的信息，那么从今天开始的问题和从明天开始的问题具有同样形式。

本章只处理有限状态和有限行动。这样所有对象都可以写成向量和矩阵：值函数是有限维向量，转移规律是矩阵，Bellman 算子是向量空间上的映射。这个有限版本足以展示动态规划和资产定价的骨架。

15.2 有限状态 Markov 链

定义 15.1 (有限状态 Markov 链). 设状态集合为

$$S = \{1, \dots, n\}.$$

若

$$\Pr(s_{t+1} = j \mid s_t = i, s_{t-1}, \dots, s_0) = \Pr(s_{t+1} = j \mid s_t = i) = P_{ij},$$

则称 (s_t) 是有限状态 Markov 链。矩阵 $P = (P_{ij})$ 称为转移矩阵。

转移矩阵每一行都是概率分布：

$$P_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n P_{ij} = 1.$$

命题 15.1 (转移矩阵保持概率单纯形). 若 μ 是状态上的概率行向量，且 P 是转移矩阵，则

$$\mu' = \mu P$$

仍是概率向量。

证明. 非负性来自 $\mu_i \geq 0$ 和 $P_{ij} \geq 0$ 。总和为

$$\sum_j \mu'_j = \sum_j \sum_i \mu_i P_{ij} = \sum_i \mu_i \sum_j P_{ij} = \sum_i \mu_i = 1.$$

所以 μP 仍在概率单纯形中。 $\square$

例 15.1 (两状态收入过程). 设状态 1 表示低收入, 状态 2 表示高收入, 转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

若今天低收入, 则明天仍低收入的概率为 0.8, 转为高收入的概率为 0.2。若今天高收入, 则明天转为低收入的概率为 0.3, 仍高收入的概率为 0.7。若初始分布为 $\mu = (1, 0)$, 下一期分布为

$$\mu P = (0.8, 0.2).$$

再下一期为

$$(0.8, 0.2)P = (0.7, 0.3).$$

这展示了矩阵乘法如何描述状态分布演化。

15.3 有限状态动态规划问题

设状态为 $s \in S$, 行动集合为 $A(s)$, 当期收益为 $u(s, a)$, 折现因子为 $\beta \in (0, 1)$ 。行动 a 影响下一期状态分布 $P(s'|s, a)$ 。目标是最大化

$$\mathbb{E} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(s_t, a_t).$$

定义 15.2 (策略). 策略是从状态到行动的函数

$$\pi : S \rightarrow A, \quad \pi(s) \in A(s).$$

它规定每个状态下采取什么行动。

定义 15.3 (值函数). 值函数 $V : S \rightarrow \mathbb{R}$ 给出从每个状态出发能够达到的最大折现收益:

$$V(s) = \sup_{\pi} \mathbb{E} \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(s_t, \pi(s_t)) \mid s_0 = s \right].$$

定义 15.4 (Bellman 算子). Bellman 算子 T 作用在函数 $V : S \rightarrow \mathbb{R}$ 上:

$$(TV)(s) = \max_{a \in A(s)} \left\{ u(s, a) + \beta \sum_{s' \in S} P(s'|s, a) V(s') \right\}.$$

例 15.2 (两状态储蓄问题的 Bellman 方程). 设状态是财富 $s \in \{1, 2\}$, 行动是消费 $c \in \{0, 1\}$, 且必须满足 $c \leq s$. 当期效用为 $u(c) = c$, 下一期财富为

$$s' = \min\{2, s - c + 1\}.$$

Bellman 方程为

$$V(s) = \max_{c \in \{0, 1\}, c \leq s} \{c + \beta V(\min\{2, s - c + 1\})\}.$$

这不是一次性最大化, 而是把“今天消费”和“留下明天状态的价值”放在一起比较。有限状态下, $V(1)$ 和 $V(2)$ 是两个未知数。

15.4 Bellman 算子的压缩性

令 $\mathcal{V}$ 是所有有界函数 $V : S \rightarrow \mathbb{R}$ 。有限状态下它就是 $\mathbb{R}^n$, 配以上确界范数

$$\|V - W\|_{\infty} = \max_{s \in S} |V(s) - W(s)|.$$

命题 15.2 (Bellman 算子的单调性). 若 $V(s) \leq W(s)$ 对所有 s 成立, 则

$$TV(s) \leq TW(s)$$

对所有 s 成立。

证明. 对任意行动 a , 有

$$\sum_{s'} P(s'|s, a) V(s') \leq \sum_{s'} P(s'|s, a) W(s').$$

加上同一个 $u(s, a)$ 并乘以 $\beta > 0$, 不等式保持。再对 a 取最大值, 得到 $TV(s) \leq TW(s)$ 。□

定理 15.1 (Bellman 算子是压缩映射). 若 $\beta \in (0, 1)$, 则

$$\|TV - TW\|_{\infty} \leq \beta \|V - W\|_{\infty}.$$

因此 Bellman 方程 $V = TV$ 有唯一解, 并且值函数迭代 $V_{k+1} = TV_k$ 从任意初值收敛。

证明. 固定状态 s . 令 a_V 是 $TV(s)$ 的一个最大化行动。则

$$TV(s) - TW(s) \leq u(s, a_V) + \beta \sum_{s'} P(s'|s, a_V) V(s') - u(s, a_V) - \beta \sum_{s'} P(s'|s, a_V) W(s').$$

所以

$$TV(s) - TW(s) \leq \beta \sum_{s'} P(s'|s, a_V) (V(s') - W(s')) \leq \beta \|V - W\|_\infty.$$

交换 V, W 得到反向不等式, 故

$$|TV(s) - TW(s)| \leq \beta \|V - W\|_\infty.$$

对 s 取最大值得到结论。由 Banach 压缩映射定理, 固定点唯一且迭代收敛。 $\square$

例 15.3 (值函数迭代). 设只有一个状态, 两个行动 $a = 0, 1$ 。收益为 $u(0) = 0$ 、 $u(1) = 1$, 状态永远不变, $\beta = 0.9$ 。Bellman 方程是

$$V = \max\{0 + 0.9V, 1 + 0.9V\} = 1 + 0.9V.$$

解得

$$V = 10.$$

若从 $V_0 = 0$ 开始迭代,

$$V_1 = 1, \quad V_2 = 1.9, \quad V_3 = 2.71.$$

它按压缩映射定理收敛到 10。这个例子极简单, 但已经包含动态规划的核心: 当前收益加折现后的未来价值。

15.5 给定策略的值与策略改进

给定策略 π , 定义当期收益向量

$$u_\pi(s) = u(s, \pi(s)),$$

以及转移矩阵

$$P_\pi(s, s') = P(s'|s, \pi(s)).$$

策略 π 的值函数满足

$$V_\pi = u_\pi + \beta P_\pi V_\pi.$$

因此

$$V_\pi = (I - \beta P_\pi)^{-1} u_\pi.$$

例 15.4 (固定策略值函数). 设

$$u_\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_\pi = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}, \quad \beta = 0.5.$$

策略值函数解

$$(I - 0.5P_\pi)V_\pi = u_\pi.$$

矩阵为

$$I - 0.5P_\pi = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.1 \\ -0.05 & 0.55 \end{pmatrix}.$$

解这个二元线性方程即可得到该策略从两个状态出发的折现价值。这里没有再优化，只是在评价一条给定规则。

定义 15.5 (贪婪策略). 给定候选值函数 V ，若策略 π 满足

$$\pi(s) \in \arg \max_{a \in A(s)} \left\{ u(s, a) + \beta \sum_{s'} P(s'|s, a) V(s') \right\},$$

则称 π 是相对于 V 的贪婪策略。

策略迭代的思想是：先评价一个策略 V_π ，再对 V_π 做贪婪改进。有限状态有限行动下，这个过程通常比单纯值函数迭代更快。

例 15.5 (策略改进的读法). 若在某状态 s ，旧策略选择 a ，但用 V_π 评估后发现另一个行动 b 满足

$$u(s, b) + \beta \mathbb{E}[V_\pi(s')|s, b] > u(s, a) + \beta \mathbb{E}[V_\pi(s')|s, a],$$

那么把状态 s 的行动从 a 改成 b 会改善策略。策略改进不是凭直觉改，而是用旧策略的未来价值来比较不同当前行动。

15.6 Euler 方程的有限状态版本

Bellman 方程适合递归计算。若行动连续且内部最优，可以用一阶条件得到 Euler 方程。以储蓄问题为例，状态为资产 a 和收入状态 s ，选择下一期资产 a' ，消费为

$$c = Ra + y(s) - a'.$$

Bellman 方程为

$$V(a, s) = \max_{a'} \left\{ u(Ra + y(s) - a') + \beta \sum_{s'} P_{ss'} V(a', s') \right\}.$$

内点一阶条件给出

$$u'(c) = \beta \sum_{s'} P_{ss'} V_a(a', s').$$

结合包络条件 $V_a(a, s) = Ru'(c)$, 得到 Euler 方程

$$u'(c_t) = \beta R \mathbb{E}_t[u'(c_{t+1})].$$

例 15.6 (确定性 Euler 方程). 若没有不确定性, 且 $u(c) = \log c$, Euler 方程为

$$\frac{1}{c_t} = \beta R \frac{1}{c_{t+1}}.$$

所以

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \beta R.$$

若 $\beta R = 1$, 最优消费保持平稳; 若 $\beta R > 1$, 未来回报较高, 消费倾向于增长; 若 $\beta R < 1$, 消费倾向于下降。

15.7 有限状态资产定价

动态资产定价也可以从有限状态开始。设明天有 n 个状态。一个资产的明天支付向量为

$$x = (x_1, \dots, x_n)^\top.$$

今天价格为 q 。若存在状态价格向量 $\psi \in \mathbb{R}_+^n$, 则

$$q = \sum_{s'=1}^n \psi_{s'} x_{s'} = \psi \cdot x.$$

$\psi_{s'}$ 是“明天状态 s' 下一单位消费”的今天价格。

定义 15.6 (Arrow 证券). Arrow 证券 e_j 在状态 j 支付 1, 在其他状态支付 0。其价格就是状态价格 ψ_j 。

例 15.7 (Arrow 证券价格). 若两种明天状态的状态价格为

$$\psi = (0.4, 0.5),$$

支付向量 $x = (10, 0)$ 的资产价格为

$$q = 0.4 \cdot 10 + 0.5 \cdot 0 = 4.$$

支付向量 $y = (1, 1)$ 的无风险债券价格为

$$q_f = 0.4 + 0.5 = 0.9.$$

因此无风险总回报为 $R_f = 1/0.9$ 。状态价格不仅给出资产价格, 也隐含无风险利率。

15.8 支付矩阵、完备市场与无套利

设有 m 个资产和 n 个明天状态。令支付矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix},$$

其中第 k 行是资产 k 在各状态的支付。资产价格向量为 $q \in \mathbb{R}^m$ 。若状态价格为 ψ ，则

$$q = Q\psi.$$

定义 15.7 (市场完备, 有限状态). 若 $m = n$ 且支付矩阵 Q 可逆, 则任意状态依赖支付都能由资产组合复制, 称市场完备。

例 15.8 (由资产价格反推状态价格). 设两个状态、两个资产, 支付矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

价格为

$$q = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.3 \end{pmatrix}.$$

状态价格满足

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.3 \end{pmatrix}.$$

两式相减得 $\psi_2 = 0.4$, 再由第一式得 $\psi_1 = 0.5$ 。所以

$$\psi = (0.5, 0.4).$$

状态价格严格为正, 说明每个状态中的一单位支付都有正价值。

定义 15.8 (无套利, 有限状态直觉). 若不存在资产组合 θ 使其今天成本非正、明天每个状态支付非负, 并且至少一个状态严格正, 则称市场无套利。

有限状态中, 一个核心结论是: 若存在严格正状态价格 $\psi \gg 0$ 使 $q = Q\psi$, 则无套利。因为任意组合 θ 的价格为

$$\theta \cdot q = \theta \cdot Q\psi = (Q^\top \theta) \cdot \psi.$$

若组合在所有状态支付非负且至少一处严格正, 那么右侧严格为正, 不可能成本非正。

例 15.9 (套利检查). 若某资产价格为 1, 明天两个状态都支付 2, 则它支配一只价格为 1、支付为 1 的无风险债券。若无风险债券价格也是 1, 则买入高支付资产、卖出无风险债券, 今天成本为 0, 明天每个状态净支付为 1, 构成套利。无套利要求更高支付必须有更高价格, 或者价格系统能由正状态价格解释。

15.9 随机贴现因子与风险中性概率

若真实概率为 $p_s > 0$, 状态价格可以写成

$$\psi_s = \beta p_s M_s,$$

其中 M_s 称为随机贴现因子。于是资产价格为

$$q = \beta \mathbb{E}[Mx].$$

在代表性消费者模型中, 常见形式是

$$M_{t+1} = \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}.$$

这把资产定价和动态消费选择连接起来。

例 15.10 (消费增长与资产价格). 若 $u(c) = \log c$, 则边际效用为 $u'(c) = 1/c$ 。随机贴现因子为

$$M_{t+1} = \frac{1/c_{t+1}}{1/c_t} = \frac{c_t}{c_{t+1}}.$$

若某状态中未来消费较低, 则 c_{t+1} 小, M_{t+1} 高。该状态下支付更有价值, 因为它在边际效用高的坏状态中提供消费。这是风险溢价的最小数学原型。

若把状态价格归一化, 可以得到风险中性概率。令无风险债券价格为

$$q_f = \sum_s \psi_s.$$

定义

$$\tilde{p}_s = \frac{\psi_s}{q_f}.$$

则 $\tilde{p}_s \geq 0$, 且 $\sum_s \tilde{p}_s = 1$ 。资产价格可写为

$$q = q_f \sum_s \tilde{p}_s x_s.$$

例 15.11 (风险中性概率). 若 $\psi = (0.2, 0.3)$, 则无风险债券价格为 $q_f = 0.5$, 风险中性概率为

$$\tilde{p} = (0.4, 0.6).$$

支付 $x = (1, 3)$ 的资产价格为

$$q = 0.5[0.4 \cdot 1 + 0.6 \cdot 3] = 1.1.$$

这里的 $\tilde{p}$ 不一定等于真实概率。它是把折现和风险调整合并后的定价概率。

15.10 递归资产定价

若资产每期支付红利 $d(s)$ ，且状态按 Markov 矩阵 P 转移，价格函数 $p(s)$ 满足递归定价方程

$$p(s) = \beta \sum_{s'} P_{ss'} M(s, s') [d(s') + p(s')].$$

在风险中性且 $M \equiv 1$ 的简化情形下，

$$p = \beta P(d + p).$$

整理得

$$(I - \beta P)p = \beta Pd,$$

因此

$$p = (I - \beta P)^{-1} \beta Pd.$$

例 15.12 (两状态红利资产). 设

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \beta = 0.9.$$

风险中性定价方程是

$$p = 0.9P(d + p).$$

这是两个线性方程。矩阵形式为

$$(I - 0.9P)p = 0.9Pd.$$

解出 p 后， p_1 是低状态下资产价格， p_2 是高状态下资产价格。高状态更持久、红利更高时，通常 $p_2 > p_1$ 。

15.11 卷一小结与通向卷二

卷一从证明语言、线性代数、拓扑、最大值定理、凸性和 KKT 出发，进入消费者、企业、固定点、一般均衡和博弈。Ch14 把这些有限维工具放入时间中：状态空间仍有限，值函数仍是向量，Bellman 算子仍是压缩映射，资产定价仍是线性代数。

卷二将放松这些有限性假设。状态空间会变成一般可测空间，期望需要 Lebesgue 积分，信息会变成过滤，价格泛函会进入 L^p 空间，动态规划也会面对连续状态和可测选择。本章的有限状态版本就是那条更深路线的地图。

15.12 Exercises

习题 15.1. 定义有限状态 Markov 链。

习题 15.2. 判断

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

是否为转移矩阵。

习题 15.3. 若初始分布 $\mu = (1, 0)$, 计算上一题中下一期分布。

习题 15.4. 证明转移矩阵把概率向量映为概率向量。

习题 15.5. 解释 Markov 性为什么是状态变量充分性的数学表达。

习题 15.6. 定义动态规划中的策略。

习题 15.7. 定义值函数。

习题 15.8. 写出有限状态有限行动下的 Bellman 算子。

习题 15.9. 说明 Bellman 方程 $V = TV$ 的经济含义。

习题 15.10. 证明 Bellman 算子的单调性。

习题 15.11. 证明 Bellman 算子在上确界范数下是 β -压缩。

习题 15.12. 说明为什么 $\beta < 1$ 对压缩性重要。

习题 15.13. 单状态问题中 $u(0) = 0, u(1) = 2, \beta = 0.5$, 状态不变。求值函数。

习题 15.14. 从 $V_0 = 0$ 开始, 对上一题做三步值函数迭代。

习题 15.15. 给定策略 π , 写出 V_π 的矩阵方程。

习题 15.16. 证明 $V_\pi = (I - \beta P_\pi)^{-1} u_\pi$ 。

习题 15.17. 设

$$u_\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = 0.9.$$

求 V_π 。

习题 15.18. 定义相对于值函数 V 的贪婪策略。

习题 15.19. 解释策略评价和策略改进的区别。

习题 15.20. 写出储蓄问题中的 Bellman 方程。

习题 15.21. 从储蓄问题的一阶条件推出 Euler 方程的基本形式。

习题 15.22. 若 $u(c) = \log c$, 推导确定性 Euler 方程下的消费增长率。

习题 15.23. 定义 Arrow 证券。

习题 15.24. 若状态价格 $\psi = (0.3, 0.4)$, 求支付 $x = (2, 5)$ 的资产价格。

习题 15.25. 若无风险债券在两个状态都支付 1, 状态价格为 $(0.3, 0.4)$, 求无风险债券价格和总回报。

习题 15.26. 定义有限状态下的市场完备。

习题 15.27. 设

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1.4 \end{pmatrix}.$$

求状态价格。

习题 15.28. 判断上一题中的状态价格是否排除套利。

习题 15.29. 解释正状态价格为什么能排除套利。

习题 15.30. 给出一个简单套利例子。

习题 15.31. 定义随机贴现因子。

习题 15.32. 若真实概率为 $p = (0.5, 0.5)$ 、 $\beta = 0.95$ 、 $M = (1.2, 0.8)$, 求状态价格。

习题 15.33. 若 $u(c) = \log c$, 写出消费增长对应的随机贴现因子。

习题 15.34. 解释为什么坏状态中的支付通常更有价值。

习题 15.35. 由状态价格 $\psi = (0.2, 0.3)$ 计算风险中性概率。

习题 15.36. 用风险中性概率给支付 $x = (1, 4)$ 定价, 其中 $\psi = (0.2, 0.3)$ 。

习题 15.37. 写出有限状态红利资产的递归定价方程。

习题 15.38. 在风险中性且 $M = 1$ 时, 把递归定价方程写成矩阵形式。

习题 15.39. 设只有一个状态, 红利恒为 $d = 2$, $\beta = 0.8$ 。求永续资产价格。

习题 15.40. 解释值函数迭代和资产价格递归方程的共同结构。

习题 15.41. 说明有限状态假设在本章中带来了哪些简化。

习题 15.42. 说明 Ch14 如何连接到卷二的测度与概率。

习题 15.43. 说明 Ch14 如何连接到卷二的资产定价章节。

习题 15.44. 比较 Bellman 固定点和 Nash 固定点。

习题 15.45. 总结卷一中固定点方法出现的三个位置。

15.13 Solutions

本章题解围绕两个固定点展开：动态规划中的 $V = TV$ ，以及资产定价中的价格递归方程。做计算题时先写状态、行动、转移和收益，再写矩阵方程；金融题先判断支付矩阵、状态价格和无套利条件。

解答 15.1. 有限状态 Markov 链是在有限集合 $S = \{1, \dots, n\}$ 上取值的随机过程，满足

$$\Pr(s_{t+1} = j \mid s_t = i, s_{t-1}, \dots, s_0) = \Pr(s_{t+1} = j \mid s_t = i).$$

也就是说，给定当前状态后，过去历史不再影响下一期状态分布。

解答 15.2. 矩阵每个元素非负，且第一行和为 $0.7 + 0.3 = 1$ ，第二行和为 $0.2 + 0.8 = 1$ 。因此它是转移矩阵。

解答 15.3. 下一期分布为

$$\mu P = (1, 0) \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = (0.7, 0.3).$$

这表示从状态 1 出发，下一期在两个状态的概率分别为 0.7 和 0.3。

解答 15.4. 若 $\mu_i \geq 0$ 、 $\sum_i \mu_i = 1$ ，则 $(\mu P)_j = \sum_i \mu_i P_{ij} \geq 0$ 。并且

$$\sum_j (\mu P)_j = \sum_i \mu_i \sum_j P_{ij} = \sum_i \mu_i = 1.$$

所以 μP 仍是概率向量。

解答 15.5. Markov 性说明当前状态已经包含预测未来所需的信息。只要知道 s_t ，过去的 $s_{t-1}, \dots, s_0$ 不再改变 s_{t+1} 的条件分布。这正是递归方法需要的状态充分性。

解答 15.6. 策略是从状态到可行动作的函数：

$$\pi(s) \in A(s).$$

它告诉决策者在每个可能状态下采取什么行动。动态规划中的策略不是单个动作，而是一套状态依赖规则。

解答 15.7. 值函数 $V(s)$ 是从状态 s 出发能够达到的最大折现收益：

$$V(s) = \sup_{\pi} \mathbb{E} \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(s_t, \pi(s_t)) \mid s_0 = s \right].$$

它把未来所有最优选择的价值压缩成当前状态的一个数。

解答 15.8. 有限状态有限行动下，

$$(TV)(s) = \max_{a \in A(s)} \left\{ u(s, a) + \beta \sum_{s'} P(s'|s, a) V(s') \right\}.$$

括号内是选择 a 的当前收益加折现后的未来期望价值。

解答 15.9. Bellman 方程 $V = TV$ 表示最优值函数等于“今天最优选择带来的当前收益加未来最优价值”。它把无限期问题改写为递归的一期问题，是动态规划的核心。

解答 15.10. 若 $V \leq W$ ，则对任意 a ，

$$\sum_{s'} P(s'|s, a) V(s') \leq \sum_{s'} P(s'|s, a) W(s').$$

加上 $u(s, a)$ 并乘以 $\beta > 0$ 后仍成立。对 a 取最大值，得到 $TV(s) \leq TW(s)$ 。

解答 15.11. 对任意 s ，用最大化行动比较可得

$$|TV(s) - TW(s)| \leq \beta \max_{s'} |V(s') - W(s')|.$$

对 s 取最大值，

$$\|TV - TW\|_{\infty} \leq \beta \|V - W\|_{\infty}.$$

因为 $\beta < 1$ ，Bellman 算子是压缩映射。

解答 15.12. 压缩映射要求 Lipschitz 常数严格小于 1。Bellman 算子的常数正是折现因子 β 。若 $\beta = 1$ ，未来价值差异不会被缩小，Banach 定理不能直接保证唯一固定点和迭代收敛。

解答 15.13. Bellman 方程为

$$V = \max\{0 + 0.5V, 2 + 0.5V\} = 2 + 0.5V.$$

所以

$$0.5V = 2, \quad V = 4.$$

最优行动是选择收益为 2 的行动。

解答 15.14. 从 $V_0 = 0$ 开始:

$$V_1 = 2 + 0.5 \cdot 0 = 2,$$

$$V_2 = 2 + 0.5 \cdot 2 = 3,$$

$$V_3 = 2 + 0.5 \cdot 3 = 3.5.$$

序列收敛到固定点 4。

解答 15.15. 给定策略 π , 收益向量为 u_π , 转移矩阵为 P_π 。值函数满足

$$V_\pi = u_\pi + \beta P_\pi V_\pi.$$

这是线性方程, 不再包含最大化。

解答 15.16. 从

$$V_\pi = u_\pi + \beta P_\pi V_\pi$$

移项得

$$(I - \beta P_\pi)V_\pi = u_\pi.$$

当 $\beta < 1$ 且 P_π 是转移矩阵时, $I - \beta P_\pi$ 可逆, 因此

$$V_\pi = (I - \beta P_\pi)^{-1}u_\pi.$$

解答 15.17. 因为 $P_\pi = I$, 方程为

$$V_\pi = u_\pi + 0.9V_\pi.$$

所以

$$0.1V_\pi = u_\pi, \quad V_\pi = 10u_\pi = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

解答 15.18. 给定 V , 贪婪策略在每个状态选择最大化

$$u(s, a) + \beta \sum_{s'} P(s'|s, a)V(s')$$

的行动。它是“如果未来价值由 V 描述, 今天应该选什么”的策略。

解答 15.19. 策略评价是在给定策略 π 时计算 V_π 。策略改进是用 V_π 重新选择每个状态下的更优行动。前者解线性方程，后者做逐状态最大化。

解答 15.20. 若状态为资产 a 和收入状态 s ，选择下一期资产 a' ，消费为 $c = Ra + y(s) - a'$ ，Bellman 方程是

$$V(a, s) = \max_{a'} \left\{ u(Ra + y(s) - a') + \beta \sum_{s'} P_{ss'} V(a', s') \right\}.$$

解答 15.21. 内点一阶条件为

$$u'(c_t) = \beta \mathbb{E}_t[V_a(a_{t+1}, s_{t+1})].$$

包络条件给出 $V_a(a_t, s_t) = Ru'(c_t)$ 。代入下一期包络条件，得到

$$u'(c_t) = \beta R \mathbb{E}_t[u'(c_{t+1})].$$

解答 15.22. 若 $u(c) = \log c$ ，则 $u'(c) = 1/c$ 。确定性 Euler 方程为

$$\frac{1}{c_t} = \beta R \frac{1}{c_{t+1}}.$$

整理得

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \beta R.$$

解答 15.23. Arrow 证券是在某个特定状态支付 1、其他状态支付 0 的证券。若状态 j 的 Arrow 证券价格为 ψ_j ，则 ψ_j 就是状态 j 的状态价格。

解答 15.24. 资产价格为状态价格和支付的内积：

$$q = \psi \cdot x = 0.3 \cdot 2 + 0.4 \cdot 5 = 0.6 + 2 = 2.6.$$

解答 15.25. 无风险债券价格为

$$q_f = 0.3 + 0.4 = 0.7.$$

每期支付 1 的总回报为

$$R_f = \frac{1}{q_f} = \frac{1}{0.7}.$$

解答 15.26. 有限状态下，若有 n 个状态，资产支付矩阵的秩为 n ，则任意状态依赖支付都能由资产组合复制，称市场完备。若资产数等于状态数，这等价于支付矩阵可逆。

解答 15.27. 状态价格满足

$$\psi_1 + \psi_2 = 0.8, \quad \psi_1 + 3\psi_2 = 1.4.$$

两式相减得 $2\psi_2 = 0.6$, 所以 $\psi_2 = 0.3$ 。再得 $\psi_1 = 0.5$ 。因此

$$\psi = (0.5, 0.3).$$

解答 15.28. 状态价格 $(0.5, 0.3)$ 严格为正。若资产价格可写为 $q = Q\psi$ 且 $\psi \gg 0$, 则任何非负且某状态严格正的支付组合都有正价格。因此它排除套利。

解答 15.29. 若组合未来支付 $x \geq 0$ 且 $x \neq 0$, 严格正状态价格给出

$$\psi \cdot x > 0.$$

因此该非负支付不可能今天价格非正。套利要求非正成本获得非负且某处严格正支付, 所以正状态价格排除了套利。

解答 15.30. 若一项资产今天价格为 0, 明天所有状态支付 1, 则买入该资产成本为 0, 未来每个状态收益为 1。这是套利。更一般地, 非正成本和非负正概率支付同时出现就构成套利。

解答 15.31. 随机贴现因子 M 是把未来状态支付折现并风险调整到今天价格的随机变量。若真实概率为 p_s , 价格可写为

$$q = \beta \mathbb{E}[Mx] = \sum_s \beta p_s M_s x_s.$$

所以状态价格为 $\psi_s = \beta p_s M_s$ 。

解答 15.32. 状态价格为

$$\psi_s = \beta p_s M_s.$$

因此

$$\psi_1 = 0.95 \cdot 0.5 \cdot 1.2 = 0.57,$$

$$\psi_2 = 0.95 \cdot 0.5 \cdot 0.8 = 0.38.$$

解答 15.33. 若 $u(c) = \log c$, 则 $u'(c) = 1/c$ 。随机贴现因子为

$$M_{t+1} = \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} = \frac{1/c_{t+1}}{1/c_t} = \frac{c_t}{c_{t+1}}.$$

解答 15.34. 坏状态通常是未来消费低、边际效用高的状态。若资产在坏状态支付，它能在最需要消费的时候提供资源，因此状态价格或随机贴现因子较高。这样的资产更有保险价值。

解答 15.35. 无风险债券价格为

$$q_f = 0.2 + 0.3 = 0.5.$$

风险中性概率为

$$\tilde{p} = \left(\frac{0.2}{0.5}, \frac{0.3}{0.5} \right) = (0.4, 0.6).$$

解答 15.36. 直接用状态价格：

$$q = 0.2 \cdot 1 + 0.3 \cdot 4 = 1.4.$$

或用风险中性概率和 $q_f = 0.5$ ：

$$q = 0.5(0.4 \cdot 1 + 0.6 \cdot 4) = 1.4.$$

解答 15.37. 若红利为 $d(s')$ ，价格为 $p(s)$ ，则递归定价方程为

$$p(s) = \beta \sum_{s'} P_{ss'} M(s, s') [d(s') + p(s')].$$

它说明价格等于未来红利加转售价格的折现风险调整期望。

解答 15.38. 若 $M = 1$ ，矩阵形式为

$$p = \beta P(d + p).$$

移项得

$$(I - \beta P)p = \beta P d.$$

因此

$$p = (I - \beta P)^{-1} \beta P d.$$

解答 15.39. 单状态下方程为

$$p = \beta(d + p).$$

代入 $d = 2, \beta = 0.8$,

$$p = 0.8(2 + p) = 1.6 + 0.8p.$$

所以 $0.2p = 1.6$, $p = 8$ 。

解答 15.40. 二者都是固定点方程。值函数迭代中 $V = TV$ ，当前收益加未来价值决定今天价值；资产定价中 $p = \beta P(d + p)$ ，未来红利加未来价格决定今天价格。两者都用递归结构压缩无限期问题。

解答 15.41. 有限状态使值函数成为有限维向量，转移规律成为矩阵，期望成为有限求和，Bellman 算子成为 $\mathbb{R}^n$ 上的映射，资产支付成为有限维向量。这避免了测度、可测选择和函数空间技术。

解答 15.42. 卷二会把有限状态推广到一般状态空间。此时概率不再只是有限向量，期望需要 Lebesgue 积分，事件结构需要 σ -代数，转移矩阵会变成 Markov kernel。Ch14 是这些对象的有限版本。

解答 15.43. Ch14 的状态价格、随机贴现因子和递归定价方程会在卷二的离散时间资产定价中扩展。后续会加入过滤、鞅、条件期望、完备市场和不完全市场等更一般工具。

解答 15.44. Bellman 固定点是值函数满足 $V = TV$ ，给出跨期最优递归。Nash 固定点是策略组合满足每个玩家都在最佳反应上。二者都表达自洽性，但 Bellman 是单个决策者跨时间的自洽，Nash 是多个玩家之间的自洽。

解答 15.45. 卷一中固定点至少出现在三处：Ch11 作为数学工具系统讲解；Ch12 用于一般均衡价格存在性；Ch13 用于 Nash 均衡存在性；Ch14 又把压缩映射用于 Bellman 方程。这说明固定点是均衡和递归的共同语言。

15.14 Computation Lab

15.14.1 有限 Markov 链模拟

取

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

从状态 1 出发，用随机数模拟 10,000 期状态路径。统计状态 1 和状态 2 出现的频率，并与反复计算 $\mu_{t+1} = \mu_t P$ 得到的长期分布比较。

15.14.2 值函数迭代

设状态 $S = \{1, 2\}$ ，行动 $A = \{0, 1\}$ 。收益和转移为

$$u(s, a) = s + a,$$

若 $a = 0$ ，下一期保持原状态；若 $a = 1$ ，下一期进入状态 2。折现因子取 $\beta = 0.9$ 。从 $V_0 = (0, 0)$ 开始迭代

$$V_{k+1} = TV_k.$$

记录 $\|V_{k+1} - V_k\|_\infty$ ，观察收敛速度。

15.14.3 策略评价和策略改进

给定策略 $\pi(1) = 0, \pi(2) = 1$ ，构造 u_π 和 P_π ，解

$$(I - \beta P_\pi)V_\pi = u_\pi.$$

然后对每个状态计算

$$u(s, a) + \beta \sum_{s'} P(s'|s, a) V_\pi(s')$$

并选择最大行动，得到改进策略。比较新旧策略是否相同。

15.14.4 状态价格求解

给定支付矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

和价格

$$q = \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1.35 \end{pmatrix}.$$

求解线性方程 $q = Q\psi$ 。检查 $\psi \gg 0$ 是否成立，并计算无风险总回报 $R_f = 1/(\psi_1 + \psi_2)$ 。

15.14.5 递归红利资产定价

设

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \beta = 0.95.$$

在风险中性简化下，解

$$(I - \beta P)p = \beta Pd.$$

比较 p_1 和 p_2 ，并解释哪个状态资产价格更高。

15.14.6 Recommended Checks

1. 改变 β ，观察值函数迭代和资产价格对折现因子的敏感性。
2. 改变转移矩阵的持久性，比较高红利状态价格变化。
3. 构造一个含负状态价格的例子，检查是否可形成套利。
4. 用风险中性概率重算资产价格，确认与状态价格内积一致。
5. 比较值函数迭代、策略迭代和直接解线性方程的速度。

第二部分

风险、函数空间与连续状态随机动态

第十六章 测度空间与概率空间

16.1 为什么有限状态概率不够

卷一中，我们主要使用有限状态空间。状态集合是 $\{1, \dots, n\}$ ，事件只是状态的子集，概率可以写成一个向量。这种设定非常清楚，也足以解释有限状态动态规划和有限状态资产定价。

但许多经济和金融模型需要连续或无限状态：收入可能取连续值，资产收益率不是有限个数，消费者类型可以分布在区间上，宏观状态可能是一个分布本身。此时不能只说“给每个状态一个概率”，因为单个点的概率可能全是零。我们需要先说明哪些集合是事件，才能再给这些事件赋予概率。

本章的主线是：

样本空间 $\rightarrow$ 事件的 σ -代数 $\rightarrow$ 测度与概率 $\rightarrow$ 随机变量与分布.

16.2 样本空间、事件与事件代数

定义 16.1 (样本空间). 样本空间 Ω 是所有可能结果的集合。元素 $\omega \in \Omega$ 称为样本点或状态。

定义 16.2 (事件). 事件是样本空间的子集。若真实状态 $\omega \in A \subseteq \Omega$ ，则说事件 A 发生。

在有限状态模型中，可以把所有子集都当成事件。但在不可数空间中，把所有子集都纳入概率体系会导致技术和逻辑上的困难。测度论的做法是指定一个足够丰富、又对概率运算封闭的事件族。

定义 16.3 (σ -代数). 给定 Ω 。集合族 $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ 称为 Ω 上的 σ -代数，如果：

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. 若 $A \in \mathcal{F}$ ，则 $A^c \in \mathcal{F}$;

3. 若 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ 。

由补集和可数并封闭可推出, $\mathcal{F}$ 也对可数交封闭, 因为

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c.$$

例 16.1 (有限状态上的完整事件族). 设 $\Omega = \{L, H\}$, 其中 L 表示低收入, H 表示高收入。完整事件族为

$$2^\Omega = \{\emptyset, \{L\}, \{H\}, \Omega\}.$$

它是一个 σ -代数: 包含全集; 任一事件的补集仍在其中; 任意可数并也只能得到这四个集合之一。有限状态概率模型默认使用的正是这个完整事件族。

例 16.2 (由一个事件生成的信息). 设 $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, 事件 $E = \{1, 2\}$ 。若一个观察者只知道 E 是否发生, 那么他能区分的事件族是

$$\sigma(E) = \{\emptyset, E, E^c, \Omega\} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \Omega\}.$$

他不能区分状态 1 和 2, 也不能区分状态 3 和 4。因此 σ -代数可以表示信息粗细: 事件族越大, 主体能描述和区分的事件越多。

16.3 生成事件族与 Borel 集

定义 16.4 (生成的 σ -代数). 给定集合族 $\mathcal{C} \subseteq 2^\Omega$ 。包含 $\mathcal{C}$ 的最小 σ -代数称为由 $\mathcal{C}$ 生成的 σ -代数, 记为

$$\sigma(\mathcal{C}).$$

“最小”表示我们只加入为了满足补集、可数并和可数交封闭而必须加入的事件, 不额外加入没有必要的集合。

定义 16.5 (Borel σ -代数). 在拓扑空间 X 上, 由所有开集生成的 σ -代数称为 Borel σ -代数, 记为 $\mathcal{B}(X)$ 。在 $X = \mathbb{R}$ 时, 常写作 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 。

例 16.3 (区间是 Borel 事件). 在 $\mathbb{R}$ 上, 开区间 (a, b) 是开集, 所以属于 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 。闭区间 $[a, b]$ 也是 Borel 集, 因为

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right),$$

右侧是开区间的可数交。经济模型中说“收入落在 $[a, b]$ ”是一个可测事件, 背后的数学原因就是 $[a, b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 。

例 16.4 (价格阈值事件). 设资产收益率 $R: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. 若 R 是可测随机变量, 则事件

$$\{\omega : R(\omega) \leq r\} = R^{-1}((-\infty, r])$$

属于 $\mathcal{F}$. 这使我们可以讨论“收益率不超过 r ”的概率。阈值事件是金融中分布函数、风险价值和违约概率的基本构件。

16.4 测度与概率测度

定义 16.6 (可测空间). 一对 $(\Omega, \mathcal{F})$ 称为可测空间, 其中 Ω 是样本空间, $\mathcal{F}$ 是 Ω 上的 σ -代数。

定义 16.7 (测度). 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 是可测空间。函数 $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ 是测度, 如果:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. 对任意两两不交的 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, 有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

定义 16.8 (概率空间). 若测度 $\mathbb{P}$ 满足 $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, 则称 $\mathbb{P}$ 为概率测度, 三元组 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 称为概率空间。

例 16.5 (计数测度与概率测度). 设 $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$. 计数测度定义为

$$\mu(A) = \#A.$$

则 $\mu(\Omega) = 3$, 所以它不是概率测度。若定义

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{3},$$

则 $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, 这是等概率模型。计数测度回答“有多少个状态”, 概率测度回答“这些状态总概率是多少”。

例 16.6 (有限状态概率向量诱导概率测度). 设 $\Omega = \{1, 2, 3\}$, 概率向量为 $p = (0.2, 0.5, 0.3)$ 。对任意事件 $A \subseteq \Omega$, 定义

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$

例如

$$\mathbb{P}(\{1, 3\}) = 0.2 + 0.3 = 0.5.$$

这把卷一中的概率向量写成了概率测度的形式。有限状态模型并没有离开测度论, 它只是测度论最简单的特例。

16.5 测度的基本性质

命题 16.1 (单调性). 若 $A, B \in \mathcal{F}$ 且 $A \subseteq B$, 则

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

证明. 因为 $B = A \cup (B \setminus A)$, 且两者不交, 所以

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

□

命题 16.2 (次可加性). 对任意 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, 有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

证明. 令

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \quad n \geq 2.$$

则 B_n 两两不交, 且 $\bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n$, 并且 $B_n \subseteq A_n$. 因此

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(B_n) \leq \sum_n \mu(A_n).$$

□

命题 16.3 (从下连续性). 若 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, 则

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

证明. 令 $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. 则 B_n 两两不交, 且

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

于是

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mu(B_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(A_N).$$

□

命题 16.4 (从上连续性). 若 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, 且 $\mu(A_1) < \infty$, 则

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

证明. 令 $C_n = A_1 \setminus A_n$. 则 $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \cdots$, 且

$$\bigcup_n C_n = A_1 \setminus \bigcap_n A_n.$$

由从下连续性,

$$\mu\left(A_1 \setminus \bigcap_n A_n\right) = \lim_n \mu(A_1 \setminus A_n).$$

由于 $\mu(A_1) < \infty$, 可写为

$$\mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_n \{\mu(A_1) - \mu(A_n)\},$$

整理即得结论. □

例 16.7 (从下连续性的概率读法). 设 A_n 表示“资产价格在前 n 天内至少一次跌破警戒线”。则

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots.$$

事件 $\bigcup_n A_n$ 表示“某一天最终跌破警戒线”。从下连续性给出

$$\mathbb{P}(\text{最终跌破}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\text{前 } n \text{ 天内跌破}).$$

有限期限风险概率的极限就是无限期限事件的概率。

例 16.8 (从上连续性的违约读法). 令 A_n 表示“债务人在前 n 期后仍未违约”。则

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots.$$

事件 $\bigcap_n A_n$ 表示“永不违约”。由于概率测度有限, 从上连续性给出

$$\mathbb{P}(\text{永不违约}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\text{前 } n \text{ 期后仍未违约}).$$

这类极限事件在资产定价和信用风险模型中经常出现。

16.6 可测函数与随机变量

定义 16.9 (可测函数). 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 和 $(S, \mathcal{S})$ 是可测空间. 函数 $X: \Omega \rightarrow S$ 是可测的, 如果对任意 $B \in \mathcal{S}$, 都有

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

定义 16.10 (随机变量). 若 $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 对 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可测, 则称 X 为实值随机变量。

可测性的经济含义是: 关于 X 的每个可观察问题都对应一个原始状态空间中的事件。例如“收入是否低于某个阈值”“资产支付是否为正”“消费是否超过 c ”都必须是概率可以评价的事件。

例 16.9 (有限状态随机变量的可测性). 设 $\Omega = \{L, H\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, 收入随机变量为

$$Y(L) = 1, \quad Y(H) = 3.$$

对任意 Borel 集 $B \subseteq \mathbb{R}$, $Y^{-1}(B)$ 只能是 $\emptyset, \{L\}, \{H\}, \Omega$ 之一, 所以属于 $\mathcal{F}$ 。因此 Y 是随机变量。有限状态完整信息模型中, 任何实值函数都是可测的。

例 16.10 (信息太粗时不可测). 设 $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \Omega\}$ 。定义

$$X(1) = 1, \quad X(2) = 2, \quad X(3) = 3, \quad X(4) = 4.$$

事件 $\{X = 1\} = X^{-1}(\{1\}) = \{1\}$ 不属于 $\mathcal{F}$, 所以 X 不是 $\mathcal{F}$ -可测。直觉上, 当前信息只能区分 $\{1, 2\}$ 和 $\{3, 4\}$, 不能单独识别状态 1。

16.7 分布与推前测度

定义 16.11 (分布). 设 $X: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (S, \mathcal{S})$ 是可测函数. X 的分布或 law 是 S 上的概率测度 $\mathbb{P}_X$, 定义为

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{S}.$$

这也称为把 $\mathbb{P}$ 通过 X 推到 S 上的推前测度。分布只记录 X 取值的概率, 不记录背后样本空间的具体名字。

例 16.11 (Bernoulli 分布作为推前概率). 设 $\Omega = \{u, d\}$, $\mathbb{P}(\{u\}) = p$, $\mathbb{P}(\{d\}) = 1 - p$ 。定义

$$X(u) = 1, \quad X(d) = 0.$$

则 X 在 $\{0, 1\}$ 上的分布为

$$\mathbb{P}_X(\{1\}) = p, \quad \mathbb{P}_X(\{0\}) = 1 - p.$$

这就是 Bernoulli 分布。原始状态可以叫“上涨/下跌”，随机变量的取值可以叫“成功/失败”；分布只关心 0 和 1 的概率。

例 16.12 (资产支付的分布). 设三种状态概率为 $p = (0.2, 0.5, 0.3)$ ，资产支付为

$$X(1) = 0, \quad X(2) = 1, \quad X(3) = 1.$$

则

$$\mathbb{P}_X(\{0\}) = 0.2, \quad \mathbb{P}_X(\{1\}) = 0.8.$$

虽然原始状态有三个，支付分布只有两个支付水平。资产定价常常关心支付和随机贴现因子的联合分布，而不一定关心状态标签本身。

16.8 乘积空间与独立性的入口

多期模型需要把多个时期的不确定性放在一起。若第一期状态在 Ω_1 ，第二期状态在 Ω_2 ，那么两期历史在乘积空间 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 中。

定义 16.12 (独立事件). 在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 中，事件 $A, B \in \mathcal{F}$ 独立，如果

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

定义 16.13 (独立随机变量，有限直觉). 有限取值随机变量 X, Y 独立，如果对所有取值 x, y ，都有

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y).$$

例 16.13 (两次抛硬币的乘积概率). 令 $\Omega = \{H, T\} \times \{H, T\}$ ，每个结果概率为 $1/4$ 。事件 A 表示第一次为 H ，事件 B 表示第二次为 H 。则

$$A = \{(H, H), (H, T)\}, \quad B = \{(H, H), (T, H)\}.$$

有 $\mathbb{P}(A) = 1/2$ 、 $\mathbb{P}(B) = 1/2$ 、 $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$ ，所以

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

这就是独立性。后续过滤和鞅章节会把这种“新冲击与过去信息独立”的思想系统化。

16.9 事件代数作为信息

若 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ 也是 σ -代数, 则可以把 $\mathcal{G}$ 理解为较粗的信息。事件 $A \in \mathcal{G}$ 是在该信息下可以判断是否发生的事件; 若 $A \notin \mathcal{G}$, 则该信息不足以识别 A 。

例 16.14 (信息分割与可测支付). 设 $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, 信息分割为

$$\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}.$$

它生成的 σ -代数是

$$\mathcal{G} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \Omega\}.$$

支付 X 若满足

$$X(1) = X(2) = 5, \quad X(3) = X(4) = 1,$$

则 X 是 $\mathcal{G}$ -可测, 因为它在每个信息块内取常数。若另一个支付 Y 满足 $Y(1) \neq Y(2)$, 则 Y 不是 $\mathcal{G}$ -可测。经济上, 可测性表示该支付能否由当前信息判断。

16.10 与下一章的连接

本章只定义了“哪些集合可以谈概率”和“哪些函数可以称为随机变量”。下一步是把函数加总或平均, 也就是积分。有限状态下, 期望写作

$$\mathbb{E}X = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}).$$

在一般空间中, 这个求和要被 Lebesgue 积分替代。Ch16 将从简单函数开始, 定义非负函数积分、一般可积函数积分, 并证明单调收敛、Fatou 引理和控制收敛等核心收敛定理。

16.11 本章小结

测度论把概率模型拆成三个层次: 样本空间 Ω 、事件 σ -代数 $\mathcal{F}$ 、概率测度 $\mathbb{P}$ 。 σ -代数规定哪些事件可被讨论, 测度给这些事件赋予大小, 概率测度是总质量为 1 的测度。随机变量是从样本空间到数值空间的 σ -可测函数, 分布是原始概率通过随机变量诱导出的概率测度。这个语言将支撑后续积分、条件期望、过滤、鞅和连续状态动态经济学。

16.12 Exercises

习题 16.1. 定义样本空间和事件。

习题 16.2. 定义 σ -代数。

习题 16.3. 证明 σ -代数包含空集。

习题 16.4. 证明 σ -代数对可数交封闭。

习题 16.5. 设 $\Omega = \{1, 2, 3\}$ 。列出 2^Ω 的全部元素。

习题 16.6. 设 $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ 、 $E = \{1, 2\}$ 。写出 $\sigma(E)$ 。

习题 16.7. 解释为什么 σ -代数可以表示信息。

习题 16.8. 定义由集合族生成的 σ -代数。

习题 16.9. 定义 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 。

习题 16.10. 说明为什么闭区间 $[a, b]$ 是 Borel 集。

习题 16.11. 定义可测空间。

习题 16.12. 定义测度。

习题 16.13. 定义概率空间。

习题 16.14. 设 $\Omega = \{1, 2, 3\}$ ， $\mathbb{P}(\{1\}) = 0.2$ 、 $\mathbb{P}(\{2\}) = 0.5$ 、 $\mathbb{P}(\{3\}) = 0.3$ 。计算 $\mathbb{P}(\{1, 3\})$ 。

习题 16.15. 证明测度的单调性。

习题 16.16. 证明若 $A \subseteq B$ 且 $\mu(B) < \infty$ ，则 $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ 。

习题 16.17. 证明测度的次可加性。

习题 16.18. 证明从下连续性。

习题 16.19. 证明从上连续性，并说明为什么需要 $\mu(A_1) < \infty$ 。

习题 16.20. 设 $A_n = (0, 1 - 1/n) \subset \mathbb{R}$ 。求 $\bigcup_n A_n$ 。

习题 16.21. 设 $A_n = (0, 1/n) \subset \mathbb{R}$ 。求 $\bigcap_n A_n$ 。

习题 16.22. 定义可测函数。

习题 16.23. 定义实值随机变量。

习题 16.24. 设 $\Omega = \{L, H\}$ 、 $\mathcal{F} = 2^\Omega$ 、 $Y(L) = 1, Y(H) = 3$ 。证明 Y 可测。

习题 16.25. 设 $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ 、 $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \Omega\}$ 。判断 $X(1) = X(2) = 0, X(3) = X(4) = 1$ 是否可测。

习题 16.26. 在上一题的 $\mathcal{F}$ 下, 判断 $Y(i) = i$ 是否可测。

习题 16.27. 定义随机变量的分布。

习题 16.28. 设 $\mathbb{P}(\{u\}) = p$ 、 $X(u) = 1, X(d) = 0$ 。求 X 的分布。

习题 16.29. 设三状态概率为 $(0.2, 0.5, 0.3)$, 支付 $X = (0, 1, 1)$ 。求 X 的分布。

习题 16.30. 定义独立事件。

习题 16.31. 掷两次公平硬币。证明“第一次为正面”和“第二次为正面”独立。

习题 16.32. 给出一个不独立的事件例子。

习题 16.33. 解释为什么资产支付可以看作随机变量。

习题 16.34. 解释为什么 Ch16 需要先建立本章的可测性语言。

习题 16.35. 用一句话区分概率测度和随机变量的分布。

16.13 Solutions

本章解答的重点是把集合语言和概率语言对齐。遇到“可测”问题时, 先写出逆像; 遇到“测度性质”问题时, 先把集合拆成不交并。

解答 16.1. 样本空间 Ω 是所有可能结果的集合。事件是 Ω 的子集 $A \subseteq \Omega$ 。若真实结果 $\omega \in A$, 则事件 A 发生。

解答 16.2. Ω 上的 σ -代数 $\mathcal{F}$ 是满足三条封闭性的集合族: $\Omega \in \mathcal{F}$; 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $A^c \in \mathcal{F}$; 若 $A_n \in \mathcal{F}$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ 。

解答 16.3. 因为 $\Omega \in \mathcal{F}$, 且 $\mathcal{F}$ 对补集封闭, 所以

$$\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{F}.$$

解答 16.4. 若 $A_n \in \mathcal{F}$, 则 $A_n^c \in \mathcal{F}$ 。由可数并封闭, $\bigcup_n A_n^c \in \mathcal{F}$ 。再取补集,

$$\bigcap_n A_n = \left(\bigcup_n A_n^c \right)^c \in \mathcal{F}.$$

解答 16.5.

$$2^\Omega = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

三元素集合共有 $2^3 = 8$ 个子集。

解答 16.6.

$$\sigma(E) = \{\emptyset, E, E^c, \Omega\} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

它是包含 E 的最小 σ -代数。

解答 16.7. σ -代数列出主体能够判断的事件。若 $A \in \mathcal{F}$, 主体的信息足以判断 A 是否发生; 若 $A \notin \mathcal{F}$, 该事件在当前信息下不可识别。因此较大的 σ -代数表示更细的信息。

解答 16.8. 给定 $\mathcal{C} \subseteq 2^\Omega$, $\sigma(\mathcal{C})$ 是包含 $\mathcal{C}$ 的最小 σ -代数。等价地, 它是所有包含 $\mathcal{C}$ 的 σ -代数的交。

解答 16.9. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 是由 $\mathbb{R}$ 上所有开集生成的 σ -代数, 称为实线上的 Borel σ -代数。

解答 16.10. 因为

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right),$$

右侧每个集合都是开集, 属于 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 。Borel σ -代数对可数交封闭, 所以 $[a, b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 。

解答 16.11. 可测空间是一对 $(\Omega, \mathcal{F})$, 其中 Ω 是样本空间, $\mathcal{F}$ 是 Ω 上的 σ -代数。

解答 16.12. 测度是函数 $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$, 满足 $\mu(\emptyset) = 0$, 并且对两两不交的 $A_n \in \mathcal{F}$ 有

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n).$$

解答 16.13. 概率空间是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, 其中 $(\Omega, \mathcal{F})$ 是可测空间, $\mathbb{P}$ 是测度, 并且 $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ 。

解答 16.14. 由有限可加性,

$$\mathbb{P}(\{1, 3\}) = \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{3\}) = 0.2 + 0.3 = 0.5.$$

解答 16.15. 若 $A \subseteq B$, 则

$$B = A \cup (B \setminus A),$$

且二者不交。由可加性,

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

解答 16.16. 由上一题的分解,

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A).$$

若 $\mu(B) < \infty$, 则 $\mu(A) \leq \mu(B) < \infty$, 可以相减, 得到

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

解答 16.17. 令 $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k < n} A_k$. 则 B_n 两两不交, $\bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n$, 且 $B_n \subseteq A_n$. 因此

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(B_n) \leq \sum_n \mu(A_n).$$

解答 16.18. 令 $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. 这些集合两两不交, 且 $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$. 于是

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(B_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mu(B_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(A_N).$$

解答 16.19. 令 $C_n = A_1 \setminus A_n$, 则 C_n 递增, 且

$$\bigcup_n C_n = A_1 \setminus \bigcap_n A_n.$$

由从下连续性,

$$\mu(A_1) - \mu(\bigcap_n A_n) = \lim_n \{\mu(A_1) - \mu(A_n)\}.$$

需要 $\mu(A_1) < \infty$, 因为这里使用了有限数相减; 若初始测度无限, $\infty - \infty$ 没有定义。

解答 16.20. 随着 n 增大, 端点 $1 - 1/n$ 上升到 1。因此

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (0, 1 - 1/n) = (0, 1).$$

注意 1 从未包含在任何 A_n 中。

解答 16.21. 若 $x \in (0, 1/n)$ 对所有 n 成立, 则 $x > 0$ 且 $x < 1/n$ 对所有 n 。不存在这样的正数 x 。因此

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1/n) = \emptyset.$$

解答 16.22. 函数 $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (S, \mathcal{S})$ 可测, 是指对每个 $B \in \mathcal{S}$, 逆像 $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ 。

解答 16.23. 实值随机变量是可测函数 $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 。

解答 16.24. 对任意 Borel 集 B , $Y^{-1}(B)$ 只能是 $\emptyset, \{L\}, \{H\}, \Omega$ 四者之一。由于 $\mathcal{F} = 2^\Omega$, 这些集合都属于 $\mathcal{F}$, 所以 Y 可测。

解答 16.25. X 在信息块 $\{1, 2\}$ 上取常数 0, 在 $\{3, 4\}$ 上取常数 1。例如

$$X^{-1}(\{0\}) = \{1, 2\}, \quad X^{-1}(\{1\}) = \{3, 4\},$$

都属于 $\mathcal{F}$ 。所有 Borel 逆像都由这些块组成, 所以 X 可测。

解答 16.26.

$$Y^{-1}(\{1\}) = \{1\}.$$

但 $\{1\} \notin \mathcal{F}$, 所以 Y 不可测。它要求的信息比分割 $\{1, 2\}, \{3, 4\}$ 更细。

解答 16.27. 若 $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (S, \mathcal{S})$ 可测, 则 X 的分布 $\mathbb{P}_X$ 定义为

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{S}.$$

解答 16.28.

$$\mathbb{P}_X(\{1\}) = \mathbb{P}(\{u\}) = p, \quad \mathbb{P}_X(\{0\}) = \mathbb{P}(\{d\}) = 1 - p.$$

因此 X 服从参数为 p 的 Bernoulli 分布。

解答 16.29. 支付 0 只在状态 1 出现, 支付 1 在状态 2, 3 出现。因此

$$\mathbb{P}_X(\{0\}) = 0.2, \quad \mathbb{P}_X(\{1\}) = 0.5 + 0.3 = 0.8.$$

解答 16.30. 事件 A, B 独立, 是指

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

这表示一个事件发生不会改变另一个事件的概率。

解答 16.31. 样本空间为 $\{H, T\}^2$, 每个结果概率 $1/4$ 。令 A 为第一次为 H , B 为第二次为 H 。则 $\mathbb{P}(A) = 1/2$, $\mathbb{P}(B) = 1/2$, 且 $A \cap B = \{(H, H)\}$, 概率 $1/4$ 。所以

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4 = (1/2)(1/2).$$

解答 16.32. 掷一次公平硬币, 令 $A = \{H\}$, $B = \{H\}$ 。则 $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$, 但

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{H\}) = 1/2 \neq 1/4.$$

所以 A 和 B 不独立。事实上它们是同一个事件。

解答 16.33. 资产支付把每个状态 ω 映射为一个实数 $X(\omega)$ ，即该状态下的现金流。如果对每个 Borel 集 B ，事件 $\{X \in B\}$ 可测，那么 X 就是随机变量。

解答 16.34. 积分要给函数的“平均值”赋予定义。只有当函数是可测的，集合 $\{X \in B\}$ 才有概率，才能稳定地近似、分层和取极限。因此 Ch16 的 Lebesgue 积分必须建立在本章的可测空间和可测函数语言上。

解答 16.35. 概率测度 $\mathbb{P}$ 定义在原始样本空间的事件上；随机变量的分布 $\mathbb{P}_X$ 是 $\mathbb{P}$ 通过 X 推到取值空间后的概率测度。

16.14 Computation Lab

本章计算实验只使用有限近似，目标是让读者把 σ -代数、概率测度、随机变量和分布落实为可检查的数据结构。

Lab 1: 有限事件族检查

给定 $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ 和集合族

$$\mathcal{G} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \Omega\}.$$

检查它是否包含全集、是否对补集封闭、是否对有限并封闭。由于空间有限，有限并检查已经足以判断它是否为有限空间上的 σ -代数。

Lab 2: 概率测度检查

输入状态概率向量 $p = (p_1, \dots, p_n)$ 。检查：

$$p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1.$$

然后对事件 $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ 计算

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in A} p_i.$$

Lab 3: 随机变量和经验分布

给定状态概率 p 和支付向量 $X = (X_1, \dots, X_n)$ ，把相同支付值的状态概率加总，得到 X 的分布。这个实验是有限状态推前测度的直接实现。

Lab 4: 乘积概率表

给定两个独立 Bernoulli 随机变量，参数分别为 p 和 q 。构造 2×2 联合概率表：

	$Y = 1$	$Y = 0$
$X = 1$	pq	$p(1 - q)$
$X = 0$	$(1 - p)q$	$(1 - p)(1 - q)$

检查行边际和列边际是否分别等于 X 和 Y 的分布。

第十七章 Lebesgue 积分与收敛定理

17.1 从有限求和到一般积分

有限状态模型中的期望是加权求和：

$$\mathbb{E}X = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}).$$

如果状态空间是区间、路径空间或分布空间，单点概率可能全为零，这个公式就不能直接使用。Lebesgue 积分的思想是：不先把空间切成点，而是先看函数在哪些可测集合上取哪些值，再用这些集合的测度加权。

本章的主线是：

指示函数 $\longrightarrow$ 简单函数 $\longrightarrow$ 非负可测函数 $\longrightarrow$ 一般可积函数 $\longrightarrow$ 收敛定理.

17.2 指示函数与简单函数

定义 17.1 (指示函数). 给定事件 $A \in \mathcal{F}$ ，其指示函数定义为

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

定义 17.2 (简单函数). 可测函数 $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 称为简单函数，如果它只取有限多个值。非负简单函数可写为

$$s = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{1}_{A_i},$$

其中 $a_i \geq 0$ ， $A_i \in \mathcal{F}$ ，且通常取 A_i 两两不交。

定义 17.3 (非负简单函数的积分). 若

$$s = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{1}_{A_i}$$

为非负简单函数, 且 A_i 两两不交, 则定义

$$\int s \, d\mu = \sum_{i=1}^m a_i \mu(A_i).$$

例 17.1 (指示函数的积分就是概率). 在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上, 事件 A 的指示函数为 $\mathbf{1}_A$ 。由定义,

$$\int \mathbf{1}_A \, d\mathbb{P} = 1 \cdot \mathbb{P}(A) + 0 \cdot \mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(A).$$

因此概率本身就是最简单的期望:

$$\mathbb{E}\mathbf{1}_A = \mathbb{P}(A).$$

在经济学中, “违约是否发生” “是否进入失业状态” “资产是否上涨” 这类二元变量的期望就是相应事件的概率。

例 17.2 (有限状态支付的积分). 设三种状态概率为 $p = (0.2, 0.5, 0.3)$, 资产支付为

$$X(1) = 0, \quad X(2) = 1, \quad X(3) = 4.$$

把 X 写成简单函数:

$$X = 0 \cdot \mathbf{1}_{\{1\}} + 1 \cdot \mathbf{1}_{\{2\}} + 4 \cdot \mathbf{1}_{\{3\}}.$$

因此

$$\mathbb{E}X = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0.3 = 1.7.$$

这说明有限状态求和是 Lebesgue 积分在有限空间上的特例。

例 17.3 (分层收入的期望). 设收入 Y 只取三档: 低收入 1、中收入 2、高收入 5。对应事件分别为 A_L, A_M, A_H , 概率为 0.3, 0.5, 0.2。则

$$Y = \mathbf{1}_{A_L} + 2\mathbf{1}_{A_M} + 5\mathbf{1}_{A_H},$$

所以

$$\mathbb{E}Y = 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.5 + 5 \cdot 0.2 = 2.3.$$

这里重要的不是每个个体是谁, 而是每个收入层对应的事件及其概率。

17.3 非负可测函数的积分

简单函数只能取有限多个值。一般非负可测函数可能取连续多个值。Lebesgue 积分通过从下方用简单函数逼近来定义。

定义 17.4 (非负可测函数的积分). 若 $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ 可测, 则定义

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int s d\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ 为简单函数} \right\}.$$

这个定义允许积分值为 $+\infty$ 。它的经济含义是：先用有限档收入、有限档支付或有限档效用从下方近似真实变量，再取所有下方近似的最优上界。

例 17.4 (连续收入的分档近似). 设收入 Y 是非负随机变量。定义分档近似

$$s_n(\omega) = \frac{k}{2^n} \quad \text{若} \quad \frac{k}{2^n} \leq Y(\omega) < \frac{k+1}{2^n},$$

并在很大收入处截断。每个 s_n 是简单函数，且 $s_n \leq Y$ 。随着 n 增大，收入档距变细，简单函数越来越贴近 Y 。Lebesgue 积分把这些有限档近似的期望推到极限。

例 17.5 (非负无界支付可以有无穷期望). 令 $\Omega = \mathbb{N}$, 并令 $\mathbb{P}(\{n\}) = 2^{-n}$ 。设支付 $X(n) = 2^n$ 。则

$$\mathbb{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

每个状态支付有限，但期望可以无穷大。金融模型中，这提醒我们不能只看逐状态现金流，还要检查尾部概率和支付增长速度。

17.4 一般实值函数的积分

一般实值函数可能有正值和负值。积分定义通过正部和负部分解完成。

定义 17.5 (正部与负部). 给定实值可测函数 f , 定义

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = \max\{-f, 0\}.$$

则

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

定义 17.6 (可积函数). 若

$$\int f^+ d\mu < \infty \quad \text{且} \quad \int f^- d\mu < \infty,$$

则称 f 可积，并定义

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

等价地， f 可积当且仅当 $\int |f| d\mu < \infty$ 。

定义 17.7 (期望). 在概率空间上, 随机变量 X 的期望定义为

$$\mathbb{E}X = \int X d\mathbb{P},$$

只要右侧有意义。

例 17.6 (有收益也有损失的资产支付). 设资产支付 X 在三种状态下分别为 $-2, 1, 4$, 概率为 $0.2, 0.5, 0.3$ 。则

$$X^+ = (0, 1, 4), \quad X^- = (2, 0, 0).$$

于是

$$\mathbb{E}X^+ = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0.3 = 1.7,$$

$$\mathbb{E}X^- = 2 \cdot 0.2 = 0.4.$$

所以

$$\mathbb{E}X = 1.7 - 0.4 = 1.3.$$

正部和负部分开计算, 可以避免把 $\infty - \infty$ 误当作一个数。

例 17.7 (期望效用的积分形式). 若消费 $C \geq 0$ 是随机变量, 效用函数为 $u(c) = \sqrt{c}$, 则期望效用写作

$$\mathbb{E}u(C) = \int \sqrt{C(\omega)} d\mathbb{P}(\omega).$$

有限状态下这是求和; 连续状态下它是 Lebesgue 积分。消费者理论中的风险厌恶比较, 真正比较的是不同随机消费的效用积分。

例 17.8 (随机贴现因子的定价公式). 若 $M \geq 0$ 是随机贴现因子, 资产下一期支付为 X , 则价格常写为

$$q = \mathbb{E}[MX] = \int M(\omega)X(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

这个公式要求 MX 可积。有限状态下可积性自动容易检查; 一般状态下, 必须控制尾部, 避免 MX 的期望不存在。

17.5 几乎处处与几乎必然

定义 17.8 (零测集). 若 $N \in \mathcal{F}$ 且 $\mu(N) = 0$, 则称 N 为零测集。

定义 17.9 (几乎处处). 若某个性质在 $\Omega \setminus N$ 上成立, 且 $\mu(N) = 0$, 则说该性质几乎处处成立。在概率空间中, 也说几乎必然成立。

积分不关心零测集上的函数取值。若两个函数只在零测集上不同, 它们的积分相同。

例 17.9 (单点差异不改变连续分布下的期望). 设 Y 在 $[0, 1]$ 上服从均匀分布. 定义

$$f(y) = y, \quad g(y) = \begin{cases} 100, & y = 1/2, \\ y, & y \neq 1/2. \end{cases}$$

因为单点集合 $\{1/2\}$ 的概率为 0, 所以 $f = g$ 几乎处处, 进而

$$\int f d\mathbb{P} = \int g d\mathbb{P}.$$

连续状态模型中, 改变单个状态的支付通常不会改变期望价格。

17.6 单调收敛定理

定理 17.1 (单调收敛定理). 若 $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$, 且 $f_n(\omega) \uparrow f(\omega)$, 则

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

证明. 由 $f_n \leq f$, 单调性给出

$$\int f_n d\mu \leq \int f d\mu,$$

所以 $\lim_n \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$.

反向不等式的思想是: 取任意简单函数 $0 \leq s \leq f$, 再取 $0 < c < 1$. 集合

$$A_n = \{\omega : f_n(\omega) \geq cs(\omega)\}$$

递增并覆盖 Ω 中 $s > 0$ 的部分. 由测度从下连续性可推出

$$\int f_n d\mu \geq \int_{A_n} cs d\mu \longrightarrow c \int s d\mu.$$

令 $c \uparrow 1$, 再对所有 $s \leq f$ 取上确界, 得到

$$\lim_n \int f_n d\mu \geq \int f d\mu.$$

两边合并即得结论. □

例 17.10 (截断收入的期望极限). 设 $Y \geq 0$ 是收入, 定义截断变量

$$Y_n = \min\{Y, n\}.$$

则

$$0 \leq Y_1 \leq Y_2 \leq \cdots, \quad Y_n \uparrow Y.$$

由单调收敛定理,

$$\mathbb{E}Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\min\{Y, n\}].$$

这说明可以先计算有上界收入的期望, 再让上界趋于无穷。

例 17.11 (有限期限违约损失逼近无限期限损失). 令 D_t 表示第 t 期违约事件, 损失为

$$L_n = \sum_{t=1}^n \beta^t \mathbf{1}_{D_t}.$$

随着期限 n 增加, L_n 单调不减, 并收敛到

$$L = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \mathbf{1}_{D_t}.$$

单调收敛定理给出

$$\mathbb{E}L = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}L_n.$$

因此无限期限信用损失可以由有限期限损失期望的极限得到。

17.7 Fatou 引理

定理 17.2 (Fatou 引理). 若 $f_n \geq 0$, 则

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

证明. 令

$$g_n = \inf_{k \geq n} f_k.$$

则 g_n 单调不减, 且

$$g_n \uparrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

由单调收敛定理,

$$\int \liminf_n f_n d\mu = \lim_n \int g_n d\mu.$$

又因为 $g_n \leq f_k$ 对所有 $k \geq n$ 成立, 所以

$$\int g_n d\mu \leq \inf_{k \geq n} \int f_k d\mu.$$

两边取极限得到 Fatou 引理。 □

例 17.12 (Fatou 给出极限损失下界). 设 $L_n \geq 0$ 是第 n 个模型下的损失, 且 $L_n \rightarrow L$ 几乎处处。Fatou 引理给出

$$\mathbb{E}L \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}L_n.$$

如果一系列近似模型的预期损失都不超过某个数, 并不能直接推出极限损失更大; Fatou 告诉我们, 极限损失的期望不会超过预期损失的下极限。它是处理非负风险变量极限时最常用的保守工具。

17.8 控制收敛定理

定理 17.3 (控制收敛定理). 若 $f_n \rightarrow f$ 几乎处处, 且存在可积函数 g 使得

$$|f_n| \leq g, \quad \forall n,$$

则 f 可积, 并且

$$\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu.$$

证明. 因为 $|f_n| \leq g$ 且 $f_n \rightarrow f$, 有 $|f| \leq g$, 所以 f 可积. 对非负函数 $g + f_n$ 和 $g - f_n$ 分别应用 Fatou 引理:

$$\begin{aligned} \int (g + f) d\mu &\leq \liminf_n \int (g + f_n) d\mu, \\ \int (g - f) d\mu &\leq \liminf_n \int (g - f_n) d\mu. \end{aligned}$$

整理第一式得到

$$\int f d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

整理第二式得到

$$\limsup_n \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

因此上下极限相等, 积分收敛到 $\int f d\mu$. □

例 17.13 (有界效用下交换极限和期望). 设 $C_n \rightarrow C$ 几乎必然, 且效用函数 u 有界:

$$|u(c)| \leq M.$$

则

$$|u(C_n)| \leq M,$$

而常数函数 M 在概率空间上可积. 控制收敛定理给出

$$\mathbb{E}u(C_n) \rightarrow \mathbb{E}u(C).$$

这说明在有界效用环境中, 若消费计划逐状态收敛, 则期望效用也收敛。

例 17.14 (资产价格极限). 设资产支付 $X_n \rightarrow X$ 几乎必然, 随机贴现因子 $M \geq 0$, 且存在可积随机变量 G 使得

$$|MX_n| \leq G, \quad \forall n.$$

则由控制收敛定理,

$$\mathbb{E}[MX_n] \rightarrow \mathbb{E}[MX].$$

也就是说, 若贴现后支付有统一可积上界, 则近似资产的价格收敛到极限资产的价格。

例 17.15 (没有控制时结论失败). 令 $\Omega = (0, 1)$, 取均匀概率。定义

$$f_n(x) = n \mathbf{1}_{(0, 1/n)}(x).$$

则对每个 $x > 0$, 当 n 足够大时 $x \notin (0, 1/n)$, 所以 $f_n(x) \rightarrow 0$ 。但是

$$\int_0^1 f_n(x) dx = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

因此积分不收敛到 0。失败原因是没有一个可积函数 g 能同时控制所有尖峰 f_n 。这个例子是尾部风险和集中风险的数学原型。

17.9 收敛定理如何选择

如果函数列非负且单调递增, 优先使用单调收敛定理; 如果只有非负性但没有单调性, Fatou 引理通常给出不等式; 如果函数列逐点收敛, 并且有统一可积上界, 使用控制收敛定理得到积分收敛。

例 17.16 (三种工具的快速识别). 设 $X \geq 0$ 。若 $X_n = \min\{X, n\}$, 则 $X_n \uparrow X$, 用单调收敛定理。若 $X_n \geq 0$ 但上下波动, 只能先用 Fatou 得到

$$\mathbb{E}[\liminf X_n] \leq \liminf \mathbb{E}X_n.$$

若 $X_n \rightarrow X$ 且 $|X_n| \leq G$ 、 $\mathbb{E}G < \infty$, 用控制收敛定理得到 $\mathbb{E}X_n \rightarrow \mathbb{E}X$ 。判断工具的顺序是: 先看单调性, 再看非负性, 最后找控制函数。

17.10 本章小结

Lebesgue 积分从指示函数和简单函数出发, 把有限状态求和推广到一般测度空间。非负函数积分允许无穷值; 一般函数通过正部和负部分解定义; 概率空间上的积分就是期望。单调收敛定理、Fatou 引理和控制收敛定理是后续随机经济模型的三条基本通道: 它们告诉我们什么时候可以用有限近似逼近无限对象, 什么时候只能得到极限不等式, 以及什么时候可以安全地交换极限和期望。

17.11 Exercises

习题 17.1. 定义指示函数。

习题 17.2. 证明 $\int \mathbf{1}_A d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$ 。

习题 17.3. 定义非负简单函数。

习题 17.4. 设 $s = 2\mathbf{1}_A + 5\mathbf{1}_B$, $A \cap B = \emptyset$, $\mu(A) = 3$, $\mu(B) = 4$. 计算 $\int s d\mu$.

习题 17.5. 在三状态概率 $p = (0.2, 0.5, 0.3)$ 下, 支付 $X = (1, 2, 5)$. 计算 $\mathbb{E}X$.

习题 17.6. 定义非负可测函数的 Lebesgue 积分。

习题 17.7. 解释为什么非负函数积分可以为 $+\infty$ 。

习题 17.8. 定义 f^+ 和 f^- 。

习题 17.9. 证明 $f = f^+ - f^-$ 且 $|f| = f^+ + f^-$ 。

习题 17.10. 定义可积函数。

习题 17.11. 设 $X = (-2, 1, 4)$, 概率为 $(0.2, 0.5, 0.3)$. 计算 $\mathbb{E}X$ 。

习题 17.12. 说明为什么不能把 $\infty - \infty$ 当作积分值。

习题 17.13. 定义零测集和几乎处处。

习题 17.14. 说明为什么两个几乎处处相等的可积函数积分相同。

习题 17.15. 陈述单调收敛定理。

习题 17.16. 令 $Y_n = \min\{Y, n\}$, 其中 $Y \geq 0$. 证明 $Y_n \uparrow Y$ 。

习题 17.17. 用单调收敛定理证明 $\mathbb{E}Y = \lim_n \mathbb{E}[\min\{Y, n\}]$ 。

习题 17.18. 设 $A_n \uparrow A$. 用单调收敛定理证明 $\mathbb{P}(A_n) \rightarrow \mathbb{P}(A)$ 。

习题 17.19. 陈述 Fatou 引理。

习题 17.20. 说明 Fatou 引理为什么通常只给出不等式。

习题 17.21. 陈述控制收敛定理。

习题 17.22. 若 $f_n \rightarrow f$ 且 $|f_n| \leq 1$ 在概率空间上成立, 证明 $\int f_n d\mathbb{P} \rightarrow \int f d\mathbb{P}$ 。

习题 17.23. 给出控制收敛定理中控制函数的经济解释。

习题 17.24. 在例子 $f_n(x) = n\mathbf{1}_{(0, 1/n)}(x)$ 中, 证明 $f_n(x) \rightarrow 0$ 对所有 $x > 0$ 成立。

习题 17.25. 计算上一题中 $\int_0^1 f_n(x) dx$ 。

习题 17.26. 解释上一题为什么不违反控制收敛定理。

习题 17.27. 若 $X_n \rightarrow X$ 且 $|X_n| \leq G$ 、 $\mathbb{E}G < \infty$ ，证明 $\mathbb{E}X_n \rightarrow \mathbb{E}X$ 。

习题 17.28. 设 $M \geq 0$ 、 $X_n \rightarrow X$ 、 $|MX_n| \leq G$ 、 $\mathbb{E}G < \infty$ 。证明资产价格 $\mathbb{E}[MX_n] \rightarrow \mathbb{E}[MX]$ 。

习题 17.29. 比较单调收敛定理和控制收敛定理的假设。

习题 17.30. 比较 Fatou 引理和控制收敛定理的结论。

习题 17.31. 设 $X_n = \mathbf{1}_{[0,1/n]}$ 在 $[0,1]$ 上。判断 X_n 是否单调，并求积分极限。

习题 17.32. 设 $X_n = \mathbf{1}_{[0,1-1/n]}$ 在 $[0,1]$ 上。判断 X_n 是否单调，并求积分极限。

习题 17.33. 解释期望效用为什么是 Lebesgue 积分。

习题 17.34. 解释为什么尾部风险会影响可积性。

习题 17.35. 用一句话说明本章三大收敛工具在后续经济学中的作用。

17.12 Solutions

本章解答的核心习惯是：先判断函数是否非负、是否单调、是否有统一可积控制，再决定使用哪条收敛定理。

解答 17.1. 事件 A 的指示函数为

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

解答 17.2. $\mathbf{1}_A = 1 \cdot \mathbf{1}_A + 0 \cdot \mathbf{1}_{A^c}$ 。因此

$$\int \mathbf{1}_A d\mathbb{P} = 1 \cdot \mathbb{P}(A) + 0 \cdot \mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(A).$$

解答 17.3. 非负简单函数是只取有限多个非负值的可测函数，通常写作

$$s = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{1}_{A_i},$$

其中 $a_i \geq 0$ 、 $A_i \in \mathcal{F}$ ，并可取 A_i 两两不交。

解答 17.4. 因为 A 和 B 不交，

$$\int s d\mu = 2\mu(A) + 5\mu(B) = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 26.$$

解答 17.5.

$$\mathbb{E}X = 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.5 + 5 \cdot 0.3 = 0.2 + 1 + 1.5 = 2.7.$$

解答 17.6. 若 $f \geq 0$ 可测, 则

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int s d\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ 为简单函数} \right\}.$$

解答 17.7. 非负函数的积分是所有下方简单函数积分的上确界。这个上确界可能没有有限上界, 因此积分可以为 $+\infty$ 。例如某些尾部很厚的非负随机变量有无穷期望。

解答 17.8.

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = \max\{-f, 0\}.$$

f^+ 记录正值部分, f^- 记录负值绝对值。

解答 17.9. 若 $f(\omega) \geq 0$, 则 $f^+ = f$ 、 $f^- = 0$ 。若 $f(\omega) < 0$, 则 $f^+ = 0$ 、 $f^- = -f$ 。两种情形都给出

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

解答 17.10. 实值可测函数 f 可积, 是指

$$\int f^+ d\mu < \infty, \quad \int f^- d\mu < \infty.$$

此时定义 $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$ 。

解答 17.11. 正部为 $(0, 1, 4)$, 负部为 $(2, 0, 0)$ 。因此

$$\mathbb{E}X^+ = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0.3 = 1.7,$$

$$\mathbb{E}X^- = 2 \cdot 0.2 = 0.4.$$

所以 $\mathbb{E}X = 1.7 - 0.4 = 1.3$ 。

解答 17.12. 若 $\int f^+ = \infty$ 且 $\int f^- = \infty$, 则形式差 $\infty - \infty$ 没有确定意义。它可能因截断方式不同得到不同极限。因此一般实值函数必须要求正部和负部至少不能同时无穷。

解答 17.13. 零测集是测度为 0 的可测集合。若某性质只在一个零测集上失败, 则称它几乎处处成立; 在概率空间中称为几乎必然成立。

解答 17.14. 若 $f = g$ 除了零测集 N 外处处相等, 则 $|f - g| = 0$ 在 N^c 上成立, 而 N 对积分没有贡献。因此

$$\int |f - g| d\mu = 0,$$

从而 $\int f d\mu = \int g d\mu$ 。

解答 17.15. 若 $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$, 且 $f_n \uparrow f$, 则

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

解答 17.16. 对每个 ω , $\min\{Y(\omega), n\}$ 随 n 不减。若 $Y(\omega) < \infty$, 当 $n \geq Y(\omega)$ 后截断值等于 $Y(\omega)$; 若 $Y(\omega) = \infty$, 截断值趋于 ∞ 。所以 $Y_n \uparrow Y$ 。

解答 17.17. 由上一题 $Y_n = \min\{Y, n\}$ 非负且单调递增到 Y 。单调收敛定理直接给出

$$\mathbb{E}Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}Y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\min\{Y, n\}].$$

解答 17.18. 若 $A_n \uparrow A$, 则 $\mathbf{1}_{A_n} \uparrow \mathbf{1}_A$ 。由单调收敛定理,

$$\mathbb{P}(A) = \int \mathbf{1}_A d\mathbb{P} = \lim_n \int \mathbf{1}_{A_n} d\mathbb{P} = \lim_n \mathbb{P}(A_n).$$

解答 17.19. 若 $f_n \geq 0$, 则

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

解答 17.20. Fatou 引理只要求非负性, 不要求单调性, 也不要求统一控制函数。条件较弱, 所以一般只能得到下半连续型不等式, 而不能得到积分极限等于极限函数积分。

解答 17.21. 若 $f_n \rightarrow f$ 几乎处处, 且存在可积 g 使 $|f_n| \leq g$, 则

$$\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu.$$

解答 17.22. 概率空间上常数函数 1 可积, 因为 $\int 1 d\mathbb{P} = 1$ 。若 $|f_n| \leq 1$ 且 $f_n \rightarrow f$, 则由控制收敛定理,

$$\int f_n d\mathbb{P} \rightarrow \int f d\mathbb{P}.$$

解答 17.23. 控制函数是一个统一的、期望有限的上界。经济上, 它限制所有近似模型中的支付、效用或损失不会在尾部爆炸, 从而允许把极限和期望交换。

解答 17.24. 固定 $x > 0$ 。当 $n > 1/x$ 时, 有 $1/n < x$, 所以 $x \notin (0, 1/n)$ 。因此对足够大的 n , $f_n(x) = 0$, 从而 $f_n(x) \rightarrow 0$ 。

解答 17.25.

$$\int_0^1 n \mathbf{1}_{(0, 1/n)}(x) dx = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

所以积分恒等于 1。

解答 17.26. 控制收敛定理需要存在可积 g 使 $f_n \leq g$ 对所有 n 成立。这里 f_n 在越来越小的区间上越来越高, 形成尖峰; 没有统一可积上界。因此定理条件不满足。

解答 17.27. 由 $|X_n| \leq G$ 、 $\mathbb{E}G < \infty$ 和 $X_n \rightarrow X$, 直接应用控制收敛定理, 得到

$$\mathbb{E}X_n \rightarrow \mathbb{E}X.$$

解答 17.28. 令 $Y_n = MX_n$ 、 $Y = MX$ 。因为 $X_n \rightarrow X$, 有 $Y_n \rightarrow Y$ 。又 $|Y_n| = |MX_n| \leq G$, 且 $\mathbb{E}G < \infty$ 。由控制收敛定理,

$$\mathbb{E}[MX_n] = \mathbb{E}Y_n \rightarrow \mathbb{E}Y = \mathbb{E}[MX].$$

解答 17.29. 单调收敛定理要求 $f_n \geq 0$ 且 f_n 单调递增, 不需要上界。控制收敛定理不求单调, 也允许正负值, 但要求存在统一可积控制函数。

解答 17.30. Fatou 引理在非负性下给出

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n,$$

通常是不等式。控制收敛定理在逐点收敛和统一可积控制下给出

$$\int f_n \rightarrow \int f,$$

是等式型收敛结论。

解答 17.31. 区间 $[0, 1/n]$ 随 n 缩小, 所以 X_n 单调不增。积分为

$$\int_0^1 X_n dx = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

点态极限除 0 外为 0, 而单点不影响积分。

解答 17.32. 区间 $[0, 1 - 1/n]$ 随 n 增大而扩大, 所以 X_n 单调不减, 并且趋向 $\mathbf{1}_{[0,1)}$ 。积分为

$$\int_0^1 X_n dx = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1.$$

这也可由单调收敛定理得到。

解答 17.33. 期望效用是随机效用 $u(C(\omega))$ 对概率测度的积分:

$$\mathbb{E}u(C) = \int u(C(\omega)) d\mathbb{P}(\omega).$$

有限状态时是加权求和, 一般状态时就是 Lebesgue 积分。

解答 17.34. 尾部风险指低概率但高损失或高支付的状态。如果支付增长快于尾部概率衰减, $\mathbb{E}|X|$ 可能为无穷, 从而 X 不可积。可积性正是在检查尾部是否足够薄。

解答 17.35. 单调收敛、Fatou 引理和控制收敛分别支撑无限期限近似、极限风险不等式以及价格和期望的极限交换, 是随机经济模型中处理极限的基础工具。

17.13 Computation Lab

本章计算实验仍采用有限近似，但目标已经从“事件概率”转向“积分和极限”。

Lab 1: 简单函数积分

输入一组状态概率 p_i 和函数值 x_i ，计算

$$\sum_i x_i p_i.$$

然后把相同函数值的状态合并，检查按事件分层计算得到同一结果。

Lab 2: 截断期望

给定一组模拟收入样本 $Y_1, \dots, Y_N$ ，计算

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \min\{Y_i, n\}$$

随截断点 n 的变化。观察截断点上升时样本均值如何逼近未截断均值。

Lab 3: 尖峰函数反例

在网络上模拟

$$f_n(x) = n \mathbf{1}_{(0, 1/n)}(x).$$

检查它在大多数固定点上趋于 0，但面积近似保持为 1。这说明点态收敛本身不足以推出积分收敛。

Lab 4: 资产价格近似

给定随机贴现因子样本 M_i 和一系列支付样本 $X_{n,i}$ ，计算

$$q_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M_i X_{n,i}.$$

检查是否存在统一上界样本 G_i 使 $|M_i X_{n,i}| \leq G_i$ ，并比较 q_n 与极限支付价格的差距。

第十八章 随机变量、分布与条件期望

18.1 从随机变量到信息下的预测

Ch15 告诉我们随机变量是可测函数，Ch16 告诉我们期望是 Lebesgue 积分。本章把这两个对象放进经济模型最常用的形式：分布、联合分布、条件概率和条件期望。

在经济和金融中，我们很少只关心一个无条件平均数。消费者观察到收入信号后会更新消费计划，投资者看到价格历史后会更新收益预测，动态规划中的状态变量正是对未来有用的信息。条件期望提供了统一语言：

信息 $\longrightarrow$ 条件分布 $\longrightarrow$ 条件期望 $\longrightarrow$ 预测、定价和递归。

18.2 分布与分布函数

定义 18.1 (分布). 设 $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 是随机变量。 X 的分布是 $\mathbb{R}$ 上的概率测度 $\mathbb{P}_X$ ，定义为

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

定义 18.2 (分布函数). 随机变量 X 的分布函数定义为

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

命题 18.1 (分布函数的基本性质). 分布函数 F_X 单调不减、右连续，并满足

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1.$$

证明. 若 $x \leq y$ ，则 $\{X \leq x\} \subseteq \{X \leq y\}$ ，由概率单调性得 $F_X(x) \leq F_X(y)$ 。极限性质来自事件 $\{X \leq x\}$ 随 $x \rightarrow -\infty$ 递减到空集、随 $x \rightarrow \infty$ 递增到全集。右连续性是概率测度从上连续性的应用，可由事件 $\{X \leq x + 1/n\} \downarrow \{X \leq x\}$ 得到。□

例 18.1 (两点分布的分布函数). 设 X 只取 0 和 1，且

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

则

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - p, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

分布函数在取值点发生跳跃，跳跃大小正是该点的概率质量。

例 18.2 (资产收益的阈值概率). 若 R 是资产收益率，则 $F_R(0) = \mathbb{P}(R \leq 0)$ 是非正收益概率， $F_R(-0.1) = \mathbb{P}(R \leq -0.1)$ 是损失超过 10% 的概率。分布函数把所有阈值风险都组织在同一个函数中。

18.3 离散分布、密度与矩

定义 18.3 (离散分布). 若随机变量 X 只取可数多个值 x_i ，则其概率质量函数为

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i),$$

并满足 $p_i \geq 0$ 、 $\sum_i p_i = 1$ 。

若 X 的分布可由非负函数 f_X 表示为

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X(x) dx,$$

则称 f_X 为密度。本章只使用密度作为计算桥梁；严格的测度分解留给后续更高阶讨论。

定义 18.4 (矩、方差与协方差). 若相关期望存在，定义

$$\mathbb{E}X = \int X d\mathbb{P}, \quad \text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2],$$

并定义

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)].$$

例 18.3 (离散分布的均值和方差). 设 X 取 0, 1, 2，概率分别为 0.2, 0.5, 0.3。则

$$\mathbb{E}X = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.3 = 1.1.$$

又

$$\mathbb{E}X^2 = 0^2 \cdot 0.2 + 1^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.3 = 1.7,$$

所以

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = 1.7 - 1.21 = 0.49.$$

方差衡量随机变量围绕均值的分散程度。

例 18.4 (均匀分布的期望). 若 X 在 $[0, 1]$ 上均匀分布, 则密度为 $f_X(x) = 1$ 。因此

$$\mathbb{E}X = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2},$$

并且

$$\mathbb{E}X^2 = \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3},$$

所以 $\text{Var}(X) = 1/3 - 1/4 = 1/12$ 。

18.4 联合分布与边际分布

定义 18.5 (联合分布). 随机向量 (X, Y) 的联合分布定义为

$$\mathbb{P}_{X,Y}(B) = \mathbb{P}((X, Y) \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

定义 18.6 (边际分布). 由联合分布得到 X 的边际分布:

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}((X, Y) \in A \times \mathbb{R}).$$

类似地可得到 Y 的边际分布。

例 18.5 (联合概率表与边际概率). 设就业状态 $E \in \{0, 1\}$ 和高收入状态 $H \in \{0, 1\}$ 的联合分布为

	$H = 0$	$H = 1$
$E = 0$	0.2	0.1
$E = 1$	0.3	0.4

则

$$\mathbb{P}(E = 1) = 0.3 + 0.4 = 0.7,$$

$$\mathbb{P}(H = 1) = 0.1 + 0.4 = 0.5.$$

边际分布通过对联合表的一行或一列求和得到。经济上, 联合分布包含就业和收入的共同信息, 边际分布只保留单个变量的信息。

例 18.6 (协方差的联合分布计算). 继续上一例。先计算

$$\mathbb{E}E = 0.7, \quad \mathbb{E}H = 0.5.$$

因为 $EH = 1$ 只在 $(E, H) = (1, 1)$ 时发生, 所以

$$\mathbb{E}[EH] = 0.4.$$

于是

$$\text{Cov}(E, H) = \mathbb{E}[EH] - \mathbb{E}E \mathbb{E}H = 0.4 - 0.35 = 0.05.$$

正协方差表示就业和高收入在该分布下正相关。

18.5 独立性

定义 18.7 (随机变量独立). 随机变量 X, Y 独立, 如果对任意 Borel 集 A, B , 有

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B).$$

在有限取值情形, 只需检查所有取值组合:

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y).$$

命题 18.2 (独立性与乘积期望, 有限情形). 若有限取值随机变量 X, Y 独立, 则

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}X \mathbb{E}Y.$$

证明. 设 X 取值 x_i , Y 取值 y_j . 由独立性,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY] &= \sum_i \sum_j x_i y_j \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\ &= \sum_i \sum_j x_i y_j \mathbb{P}(X = x_i) \mathbb{P}(Y = y_j) \\ &= \left(\sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i) \right) \left(\sum_j y_j \mathbb{P}(Y = y_j) \right) \\ &= \mathbb{E}X \mathbb{E}Y. \end{aligned}$$

□

例 18.7 (检查独立性). 若两枚公平硬币独立, 令 X 表示第一枚是否正面, Y 表示第二枚是否正面。则

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 1/4,$$

而

$$\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

其他取值组合也类似, 所以 X, Y 独立。

例 18.8 (不独立的收入与就业). 在前面的联合表中,

$$\mathbb{P}(E = 1, H = 1) = 0.4,$$

但

$$\mathbb{P}(E = 1)\mathbb{P}(H = 1) = 0.7 \cdot 0.5 = 0.35.$$

二者不相等, 所以就业和高收入不独立。观察就业状态会改变对高收入事件的概率判断。

18.6 条件概率与 Bayes 公式

定义 18.8 (条件概率). 若 $\mathbb{P}(B) > 0$, 定义

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

命题 18.3 (Bayes 公式). 若 $\mathbb{P}(A) > 0$ 、 $\mathbb{P}(B) > 0$, 则

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(B | A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

证明. 由条件概率定义,

$$\mathbb{P}(B | A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B).$$

再除以 $\mathbb{P}(B)$, 得到结论。 □

例 18.9 (就业条件下的高收入概率). 由联合表,

$$\mathbb{P}(H = 1 | E = 1) = \frac{\mathbb{P}(H = 1, E = 1)}{\mathbb{P}(E = 1)} = \frac{0.4}{0.7} = \frac{4}{7}.$$

无条件高收入概率是 0.5, 条件概率约为 0.571。就业信息提高了对高收入的预测。

例 18.10 (Bayes 更新信号). 设经济状态 G 表示高增长, 先验概率 $\mathbb{P}(G) = 0.4$ 。信号 S 出现的概率满足

$$\mathbb{P}(S | G) = 0.8, \quad \mathbb{P}(S | G^c) = 0.2.$$

则

$$\mathbb{P}(S) = 0.8 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.6 = 0.44.$$

Bayes 公式给出

$$\mathbb{P}(G | S) = \frac{0.8 \cdot 0.4}{0.44} = \frac{8}{11}.$$

信号把高增长概率从 0.4 更新到约 0.727。

18.7 给定事件和分割的条件期望

定义 18.9 (给定事件的条件期望). 若 $\mathbb{P}(B) > 0$, 定义

$$\mathbb{E}[X | B] = \frac{\mathbb{E}[X \mathbf{1}_B]}{\mathbb{P}(B)}.$$

定义 18.10 (给定有限分割的条件期望). 设 $\{B_1, \dots, B_m\}$ 是 Ω 的有限可测分割, 且 $\mathbb{P}(B_i) > 0$. 给定该分割的条件期望是随机变量

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}](\omega) = \mathbb{E}[X \mid B_i], \quad \omega \in B_i,$$

其中 $\mathcal{G} = \sigma(B_1, \dots, B_m)$ 。

例 18.11 (分割下的条件期望). 设 $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, 每个状态概率为 $1/4$, 随机收入为

$$X = (1, 3, 4, 8).$$

信息分割为

$$B_1 = \{1, 2\}, \quad B_2 = \{3, 4\}.$$

则

$$\mathbb{E}[X \mid B_1] = \frac{1+3}{2} = 2, \quad \mathbb{E}[X \mid B_2] = \frac{4+8}{2} = 6.$$

因此

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = (2, 2, 6, 6).$$

条件期望在每个信息块内取常数, 因为在该信息下无法区分同一块内的状态。

例 18.12 (条件期望是信息下的预测). 继续上一例. 若主体只知道状态属于 B_1 或 B_2 , 那么在 B_1 中预测收入为 2, 在 B_2 中预测收入为 6. 若后来知道精确状态, 预测才更新为 1, 3, 4, 8. 条件期望是当前信息下对 X 的平均预测。

命题 18.4 (全期望公式, 有限分割). 若 $\{B_i\}_{i=1}^m$ 是有限可测分割, 且 $\mathbb{P}(B_i) > 0$, 则

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^m \mathbb{E}[X \mid B_i] \mathbb{P}(B_i).$$

证明. 因为 Ω 被 B_i 不交分割,

$$\mathbb{E}X = \sum_i \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{B_i}].$$

由 $\mathbb{E}[X \mid B_i] = \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{B_i}] / \mathbb{P}(B_i)$, 得

$$\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{B_i}] = \mathbb{E}[X \mid B_i] \mathbb{P}(B_i).$$

代回即得结论。 □

18.8 给定事件代数的条件期望

有限分割给出直观公式。一般情况下，信息由子 σ -代数 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ 表示。

定义 18.11 (条件期望). 设 X 可积, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ 是子 σ -代数. 给定 $\mathcal{G}$ 的条件期望 $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ 是满足以下条件的随机变量 Z :

1. Z 是 $\mathcal{G}$ -可测;
2. 对所有 $G \in \mathcal{G}$, 有

$$\int_G Z d\mathbb{P} = \int_G X d\mathbb{P}.$$

条件期望只在几乎必然意义下唯一。第一条说预测只能使用 $\mathcal{G}$ 中的信息；第二条说在任何可由当前信息识别的事件上，预测的总量和真实变量的总量一致。

例 18.13 (平凡信息和完整信息). 若 $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, 则 $\mathcal{G}$ -可测随机变量只能是常数, 所以

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = \mathbb{E}X.$$

若 $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, 则 X 本身已经可测, 并且

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{F}] = X.$$

因此条件期望从“只知道无条件均值”连续过渡到“知道全部状态”。

例 18.14 (资产定价中的条件价格). 设 M_{t+1} 是下一期随机贴现因子, X_{t+1} 是下一期支付, 当前信息为 $\mathcal{F}_t$. 动态资产定价常写为

$$q_t = \mathbb{E}[M_{t+1}X_{t+1} | \mathcal{F}_t].$$

这表示价格 q_t 必须是当前信息可测的随机变量, 并且在当前信息能够识别的每个事件上, 它匹配未来贴现支付的条件平均。

18.9 条件期望的基本性质

下面性质在可积性条件满足时成立。

命题 18.5 (线性性). 对常数 a, b , 有

$$\mathbb{E}[aX + bY | \mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y | \mathcal{G}].$$

命题 18.6 (取出已知量). 若 Y 是 $\mathcal{G}$ -可测且 YX 可积, 则

$$\mathbb{E}[YX \mid \mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}].$$

命题 18.7 (迭代期望法则). 若 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, 则

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{H}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}].$$

特别地,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]] = \mathbb{E}X.$$

证明. 给出定义式证明思路. 令 $Z = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$. 对任意 $H \in \mathcal{H}$, 因为 $H \in \mathcal{G}$, 有

$$\int_H Z d\mathbb{P} = \int_H X d\mathbb{P}.$$

$\mathbb{E}[Z \mid \mathcal{H}]$ 是 $\mathcal{H}$ -可测, 并在每个 $H \in \mathcal{H}$ 上与 Z 积分相同, 因此也与 X 积分相同. 由条件期望的唯一性, 得到结论. $\square$

例 18.15 (迭代期望的分割计算). 设完整状态为 $\{1, 2, 3, 4\}$, 等概率, 收入 $X = (1, 3, 4, 8)$. 粗信息 $\mathcal{H}$ 是平凡信息, 只知道全集; 细信息 $\mathcal{G}$ 是分割 $\{1, 2\}, \{3, 4\}$. 前面算得

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = (2, 2, 6, 6).$$

再对平凡信息取条件期望:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{H}] = \frac{2 + 2 + 6 + 6}{4} = 4.$$

而

$$\mathbb{E}X = \frac{1 + 3 + 4 + 8}{4} = 4.$$

先按细信息预测再取无条件平均, 等于直接取无条件平均。

例 18.16 (取出已知工资冲击). 设 Y 是当前已知的就业状态, 因而 $\mathcal{G}$ -可测; X 是未来收入冲击. 则

$$\mathbb{E}[YX \mid \mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}].$$

如果当前已经知道是否就业, 那么就业状态可以从条件期望中取出; 仍需预测的是未来收入冲击。

18.10 条件期望与最小二乘预测

在平方损失下，条件期望是使用给定信息预测 X 的最佳预测。有限分割情形中，若预测 Z 必须在每个信息块 B_i 上取常数 z_i ，则最小化

$$\mathbb{E}[(X - Z)^2]$$

的 z_i 是

$$z_i = \mathbb{E}[X \mid B_i].$$

例 18.17 (平方损失下的最佳分块预测). 状态等概率，收入 $X = (1, 3, 4, 8)$ ，信息块仍为 $B_1 = \{1, 2\}$ 、 $B_2 = \{3, 4\}$ 。若在 B_1 上预测常数 z_1 ，则局部平方损失为

$$(1 - z_1)^2 + (3 - z_1)^2.$$

一阶条件给出

$$-2(1 - z_1) - 2(3 - z_1) = 0,$$

所以 $z_1 = 2$ 。同理 $z_2 = 6$ 。这正是 $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ 。条件期望不是任意平均，而是当前信息下的最小均方误差预测。

18.11 本章小结

随机变量的分布把状态空间上的概率推到数值空间；联合分布描述多个变量的共同不确定性，边际分布和独立性从中读出。条件概率是事件层面的更新，条件期望是随机变量层面的更新。给定信息 $\mathcal{G}$ 的条件期望是 $\mathcal{G}$ -可测的最佳预测，并在所有 $\mathcal{G}$ -事件上保持积分一致。后续过滤、鞅、动态资产价格和递归经济模型都将反复使用这一对象。

18.12 Exercises

习题 18.1. 定义随机变量的分布。

习题 18.2. 定义分布函数。

习题 18.3. 证明分布函数单调不减。

习题 18.4. 设 X 取 $0, 1$ ，且 $\mathbb{P}(X = 1) = p$ 。写出 F_X 。

习题 18.5. 定义离散分布的概率质量函数。

习题 18.6. 设 X 取 $0, 1, 2$, 概率为 $0.2, 0.5, 0.3$ 。计算 $\mathbb{E}X$ 。

习题 18.7. 计算上一题中的 $\text{Var}(X)$ 。

习题 18.8. 定义联合分布。

习题 18.9. 定义边际分布。

习题 18.10. 给定联合表

	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	0.1	0.2
$X = 1$	0.3	0.4

求 X 和 Y 的边际分布。

习题 18.11. 定义随机变量独立性。

习题 18.12. 检查上一题联合表中的 X, Y 是否独立。

习题 18.13. 证明有限取值独立随机变量满足 $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$ 。

习题 18.14. 定义协方差。

习题 18.15. 用联合表计算 $\text{Cov}(X, Y)$ 。

习题 18.16. 定义条件概率。

习题 18.17. 证明 Bayes 公式。

习题 18.18. 设 $\mathbb{P}(G) = 0.4$ 、 $\mathbb{P}(S | G) = 0.8$ 、 $\mathbb{P}(S | G^c) = 0.2$ 。计算 $\mathbb{P}(G | S)$ 。

习题 18.19. 定义给定事件 B 的条件期望。

习题 18.20. 设 $X = (1, 3, 4, 8)$, 四状态等概率。求 $\mathbb{E}[X | \{1, 2\}]$ 。

习题 18.21. 在上一题中, 分割为 $\{1, 2\}$ 、 $\{3, 4\}$ 。求给定分割的条件期望。

习题 18.22. 定义给定子 σ -代数 $\mathcal{G}$ 的条件期望。

习题 18.23. 解释条件期望定义中的 $\mathcal{G}$ -可测性。

习题 18.24. 解释条件期望定义中的积分匹配条件。

习题 18.25. 若 $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, 求 $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ 。

习题 18.26. 若 $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, 求 $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ 。

习题 18.27. 陈述条件期望的线性性。

习题 18.28. 陈述取出已知量规则。

习题 18.29. 陈述迭代期望法则。

习题 18.30. 用有限分割证明全期望公式。

习题 18.31. 在四状态等概率例子中验证 $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]] = \mathbb{E}X$ 。

习题 18.32. 解释条件期望为什么是信息下的预测。

习题 18.33. 证明在两点信息块上, 平方损失最小预测是块内平均。

习题 18.34. 解释条件期望在资产定价公式 $q_t = \mathbb{E}[M_{t+1}X_{t+1} | \mathcal{F}_t]$ 中的含义。

习题 18.35. 用一句话区分条件概率和条件期望。

18.13 Solutions

本章解答的主线是: 先从联合分布表读概率, 再把信息表示为事件、分割或子 σ -代数, 最后用条件期望的定义检查可测性和积分匹配。

解答 18.1. 随机变量 X 的分布是取值空间上的概率测度

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B),$$

其中 B 是取值空间中的可测集合。

解答 18.2. 分布函数定义为

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

它记录随机变量落在阈值 x 以下的概率。

解答 18.3. 若 $x \leq y$, 则事件 $\{X \leq x\} \subseteq \{X \leq y\}$ 。由概率的单调性,

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \leq \mathbb{P}(X \leq y) = F_X(y).$$

解答 18.4.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - p, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

在 0 处跳跃 $1 - p$, 在 1 处跳跃 p 。

解答 18.5. 若 X 取可数多个值 x_i , 概率质量函数为

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i),$$

并满足 $p_i \geq 0$ 、 $\sum_i p_i = 1$ 。

解答 18.6.

$$\mathbb{E}X = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.3 = 1.1.$$

解答 18.7.

$$\mathbb{E}X^2 = 0^2 \cdot 0.2 + 1^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.3 = 1.7.$$

因此

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = 1.7 - 1.21 = 0.49.$$

解答 18.8. 随机向量 (X, Y) 的联合分布是 $\mathbb{R}^2$ 上的概率测度

$$\mathbb{P}_{X,Y}(B) = \mathbb{P}((X, Y) \in B).$$

解答 18.9. 边际分布是从联合分布中只保留一个坐标得到的分布。例如

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}((X, Y) \in A \times \mathbb{R}).$$

有限表中就是对另一个变量求和。

解答 18.10. 对 X 求边际:

$$\mathbb{P}(X = 0) = 0.1 + 0.2 = 0.3, \quad \mathbb{P}(X = 1) = 0.3 + 0.4 = 0.7.$$

对 Y 求边际:

$$\mathbb{P}(Y = 0) = 0.1 + 0.3 = 0.4, \quad \mathbb{P}(Y = 1) = 0.2 + 0.4 = 0.6.$$

解答 18.11. 随机变量 X, Y 独立, 是指对任意 Borel 集 A, B ,

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B).$$

有限取值时检查每个取值组合即可。

解答 18.12. 检查 $(X, Y) = (0, 0)$:

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 0.1,$$

而

$$\mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12.$$

不相等, 所以 X, Y 不独立。

解答 18.13. 设 X 取 x_i , Y 取 y_j 。独立性给出

$$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j).$$

因此

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_i \sum_j x_i y_j \mathbb{P}(X = x_i) \mathbb{P}(Y = y_j) = \mathbb{E}X \mathbb{E}Y.$$

解答 18.14. 协方差定义为

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)].$$

等价地, 在二阶矩存在时,

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X \mathbb{E}Y.$$

解答 18.15. 由前面计算 $\mathbb{E}X = 0.7$ 、 $\mathbb{E}Y = 0.6$ 。又 $XY = 1$ 只在 $(1, 1)$ 处, 所以

$$\mathbb{E}[XY] = 0.4.$$

因此

$$\text{Cov}(X, Y) = 0.4 - 0.7 \cdot 0.6 = -0.02.$$

解答 18.16. 若 $\mathbb{P}(B) > 0$, 条件概率定义为

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

解答 18.17. 由

$$\mathbb{P}(B | A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

可得

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B | A) \mathbb{P}(A).$$

代入 $\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A \cap B) / \mathbb{P}(B)$, 得到 Bayes 公式。

解答 18.18.

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S | G) \mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(S | G^c) \mathbb{P}(G^c) = 0.8 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.6 = 0.44.$$

因此

$$\mathbb{P}(G | S) = \frac{0.8 \cdot 0.4}{0.44} = \frac{8}{11}.$$

解答 18.19. 若 $\mathbb{P}(B) > 0$,

$$\mathbb{E}[X | B] = \frac{\mathbb{E}[X \mathbf{1}_B]}{\mathbb{P}(B)}.$$

有限等概率情形下, 它就是事件 B 内的平均值。

解答 18.20. 事件 $\{1, 2\}$ 内收入为 1, 3, 且两状态条件概率相同, 所以

$$\mathbb{E}[X | \{1, 2\}] = \frac{1+3}{2} = 2.$$

解答 18.21. 在 $\{1, 2\}$ 上条件均值为 2, 在 $\{3, 4\}$ 上条件均值为

$$\frac{4+8}{2} = 6.$$

因此条件期望随机变量为

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = (2, 2, 6, 6).$$

解答 18.22. 给定子 σ -代数 $\mathcal{G}$, $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ 是随机变量 Z , 满足: Z 是 $\mathcal{G}$ -可测; 对所有 $G \in \mathcal{G}$,

$$\int_G Z d\mathbb{P} = \int_G X d\mathbb{P}.$$

解答 18.23. $\mathcal{G}$ -可测性表示 Z 只能使用 $\mathcal{G}$ 中包含的信息。有限分割中, 这等价于 Z 在每个信息块内为常数。

解答 18.24. 积分匹配条件表示: 在任何当前信息可以识别的事件 G 上, 预测 Z 的总和或平均与真实变量 X 的总和或平均一致。这保证预测不系统性偏离真实变量。

解答 18.25. 若 $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{G}$ -可测随机变量只能是常数。积分匹配要求该常数为 $\mathbb{E}X$, 所以

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = \mathbb{E}X.$$

解答 18.26. 若 $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, 则 X 本身已经 $\mathcal{F}$ -可测, 并且对所有 $G \in \mathcal{F}$,

$$\int_G X d\mathbb{P} = \int_G X d\mathbb{P}.$$

所以

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{F}] = X.$$

解答 18.27. 线性性为

$$\mathbb{E}[aX + bY | \mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y | \mathcal{G}].$$

解答 18.28. 若 Y 是 $\mathcal{G}$ -可测且 YX 可积, 则

$$\mathbb{E}[YX \mid \mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}].$$

直觉是: 当前信息已经知道的量可以从条件期望中取出。

解答 18.29. 若 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, 则

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{H}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}].$$

特别地, 取 $\mathcal{H}$ 为平凡信息, 得到 $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]] = \mathbb{E}X$ 。

解答 18.30. 若 $\{B_i\}$ 是有限分割, 则

$$\mathbb{E}X = \sum_i \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{B_i}].$$

又

$$\mathbb{E}[X \mid B_i] = \frac{\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{B_i}]}{\mathbb{P}(B_i)},$$

所以

$$\mathbb{E}X = \sum_i \mathbb{E}[X \mid B_i] \mathbb{P}(B_i).$$

解答 18.31.

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = (2, 2, 6, 6).$$

四状态等概率, 所以

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]] = \frac{2 + 2 + 6 + 6}{4} = 4.$$

而

$$\mathbb{E}X = \frac{1 + 3 + 4 + 8}{4} = 4.$$

二者相等。

解答 18.32. 条件期望必须是当前信息可测的随机变量, 因此它只使用当前信息; 同时它在所有当前可识别事件上匹配 X 的积分。因此它是当前信息下对 X 的无偏平均预测。

解答 18.33. 在两点 x_1, x_2 上预测常数 z , 平方损失为

$$(x_1 - z)^2 + (x_2 - z)^2.$$

一阶条件为

$$-2(x_1 - z) - 2(x_2 - z) = 0,$$

所以

$$z = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

这就是块内平均, 也就是等概率条件期望。

解答 18.34. 公式

$$q_t = \mathbb{E}[M_{t+1}X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]$$

表示当前价格只能依赖当前信息 $\mathcal{F}_t$ ，并且等于未来贴现支付在当前信息下的条件平均。它是动态资产定价中“价格是条件期望”的基本形式。

解答 18.35. 条件概率更新事件发生的概率；条件期望更新随机变量在给定信息下的平均预测。

18.14 Computation Lab

本章计算实验围绕联合分布表和信息分割展开，所有任务都可以用电子表格或几行代码完成。

Lab 1: 联合表边缘化

输入一个 $m \times n$ 的联合概率表 P_{ij} 。检查

$$P_{ij} \geq 0, \quad \sum_i \sum_j P_{ij} = 1.$$

然后计算行边际和列边际：

$$p_i = \sum_j P_{ij}, \quad q_j = \sum_i P_{ij}.$$

Lab 2: 独立性检查

对每个格点检查

$$P_{ij} = p_i q_j$$

是否成立。若所有格点都成立，则两个有限变量独立；否则不独立。

Lab 3: Bayes 更新

输入先验概率 $\mathbb{P}(G)$ 和信号似然 $\mathbb{P}(S \mid G)$ 、 $\mathbb{P}(S \mid G^c)$ ，计算

$$\mathbb{P}(G \mid S) = \frac{\mathbb{P}(S \mid G)\mathbb{P}(G)}{\mathbb{P}(S \mid G)\mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(S \mid G^c)\mathbb{P}(G^c)}.$$

Lab 4: 条件期望的分割计算

输入状态概率 p_i 、随机变量值 X_i 、以及一个状态分割。对每个信息块 B ，计算

$$\mathbb{E}[X \mid B] = \frac{\sum_{i \in B} X_i p_i}{\sum_{i \in B} p_i}.$$

再把该数值赋给块内所有状态，得到 $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ 。

Lab 5: 最小均方预测

在每个信息块内比较不同常数预测 z 的加权平方损失

$$\sum_{i \in B} (X_i - z)^2 p_i.$$

验证最小点等于条件期望。

第十九章 风险、彩票与随机支配

19.1 从随机变量到风险选择

前面三章建立了概率空间、积分和条件期望。本章把这些工具用于风险选择。经济主体面对的不确定对象可以是未来消费、收入、财富、资产收益或政策结果。数学上，它们都是随机变量；经济上，它们是彩票。

本章的主线是：

彩票 $\rightarrow$ 期望效用 $\rightarrow$ 风险厌恶 $\rightarrow$ 风险溢价 $\rightarrow$ 随机支配.

19.2 彩票与期望效用

定义 19.1 (彩票). 彩票是结果集合上的概率分布。若结果是财富或消费，则彩票可表示为随机变量 X ，其分布描述不同结果发生的概率。

定义 19.2 (期望效用). 给定效用函数 u 和彩票 X ，期望效用定义为

$$\mathbb{E}u(X) = \int u(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega),$$

只要积分存在。

在期望效用模型中，彩票 X 至少和彩票 Y 一样好，当且仅当

$$\mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y).$$

例 19.1 (两种彩票的期望效用比较). 令效用 $u(c) = \sqrt{c}$ 。彩票 X 以一半概率给 1，一半概率给 9；彩票 Y 确定给 4。则

$$\mathbb{E}u(X) = \frac{1}{2}\sqrt{1} + \frac{1}{2}\sqrt{9} = 2,$$

而

$$\mathbb{E}u(Y) = \sqrt{4} = 2.$$

在这个效用函数下，消费者对 X 和 Y 无差异。注意 X 的期望财富为 5，高于 Y 的 4，但风险使其期望效用被压低。

例 19.2 (风险中性只看期望). 若 $u(c) = c$ ，则

$$\mathbb{E}u(X) = \mathbb{E}X.$$

对上一个彩票 X ，有 $\mathbb{E}X = 5$ ；对确定彩票 $Y = 4$ ，有 $\mathbb{E}Y = 4$ 。风险中性主体偏好 X 。线性效用不惩罚波动，只比较平均支付。

19.3 风险厌恶与 Jensen 不等式

定义 19.3 (风险厌恶). 若消费者对任意彩票 X 都弱偏好其期望值对应的确定消费：

$$u(\mathbb{E}X) \geq \mathbb{E}u(X),$$

则称该消费者风险厌恶。

命题 19.1 (凹效用与风险厌恶). 若 u 是凹函数，则消费者风险厌恶：

$$u(\mathbb{E}X) \geq \mathbb{E}u(X).$$

证明. 这正是 Jensen 不等式对凹函数的应用。有限状态下，若 X 取值 x_i ，概率为 p_i ，则

$$u\left(\sum_i p_i x_i\right) \geq \sum_i p_i u(x_i).$$

一般情形由 Ch16 的积分极限工具推广得到。 □

例 19.3 (凹效用下的风险厌恶). 令 $u(c) = \log c$ 。彩票 X 以一半概率给 1，一半概率给 9。其期望为 5。有

$$\begin{aligned} u(\mathbb{E}X) &= \log 5, \\ \mathbb{E}u(X) &= \frac{1}{2} \log 1 + \frac{1}{2} \log 9 = \log 3. \end{aligned}$$

因为 $\log 5 > \log 3$ ，消费者严格偏好确定的 5 而不是风险彩票 X 。这就是凹性带来的风险厌恶。

定义 19.4 (风险中性与风险偏好). 若 u 线性，则主体风险中性；若 u 凸，则主体风险偏好，因为 Jensen 不等式方向反过来：

$$\mathbb{E}u(X) \geq u(\mathbb{E}X).$$

19.4 确定性等价与风险溢价

定义 19.5 (确定性等价). 彩票 X 的确定性等价 $CE(X)$ 是使消费者在确定消费和彩票之间无差异的数:

$$u(CE(X)) = \mathbb{E}u(X).$$

定义 19.6 (风险溢价). 风险溢价定义为

$$\pi(X) = \mathbb{E}X - CE(X).$$

它表示消费者愿意放弃多少期望财富来消除风险。

命题 19.2 (风险厌恶下确定性等价不超过均值). 若 u 严格递增且凹, 则

$$CE(X) \leq \mathbb{E}X.$$

证明. 由 Jensen 不等式,

$$\mathbb{E}u(X) \leq u(\mathbb{E}X).$$

又 $u(CE(X)) = \mathbb{E}u(X)$, 所以

$$u(CE(X)) \leq u(\mathbb{E}X).$$

由于 u 递增, 得到 $CE(X) \leq \mathbb{E}X$. □

例 19.4 (确定性等价的计算). 令 $u(c) = \sqrt{c}$, 彩票 X 以一半概率给 1, 一半概率给 9。已经有

$$\mathbb{E}u(X) = 2.$$

确定性等价满足

$$\sqrt{CE} = 2,$$

所以 $CE = 4$ 。由于 $\mathbb{E}X = 5$, 风险溢价为

$$\pi(X) = 5 - 4 = 1.$$

消费者愿意放弃 1 单位期望财富, 把彩票换成确定的 4。

例 19.5 (保险的风险溢价解释). 一个家庭财富为 100。有 10% 概率损失 40, 没有保险时财富彩票为

$$X = \begin{cases} 60, & 0.1, \\ 100, & 0.9. \end{cases}$$

若效用凹, 家庭的确定性等价低于 $\mathbb{E}X = 96$ 。它愿意支付的最高全额保险保费等于

$$100 - CE(X),$$

其中公平保费是预期损失 4。风险厌恶使最高愿付保费通常高于公平保费。

19.5 Arrow-Pratt 风险厌恶系数

定义 19.7 (绝对风险厌恶系数). 若 u 二阶可微、严格递增且凹, Arrow-Pratt 绝对风险厌恶系数定义为

$$A(c) = -\frac{u''(c)}{u'(c)}.$$

命题 19.3 (小风险溢价近似). 设彩票为 $c + \varepsilon$, 其中 $\mathbb{E}\varepsilon = 0$ 、 $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2$, 且风险很小。风险溢价近似为

$$\pi \approx \frac{1}{2}A(c)\sigma^2.$$

证明. 令确定性等价 $c - \pi$ 。用二阶 Taylor 展开:

$$u(c - \pi) \approx u(c) - u'(c)\pi,$$

而

$$\mathbb{E}u(c + \varepsilon) \approx u(c) + u'(c)\mathbb{E}\varepsilon + \frac{1}{2}u''(c)\mathbb{E}\varepsilon^2 = u(c) + \frac{1}{2}u''(c)\sigma^2.$$

令两者相等, 得到

$$-u'(c)\pi \approx \frac{1}{2}u''(c)\sigma^2,$$

即

$$\pi \approx -\frac{1}{2} \frac{u''(c)}{u'(c)} \sigma^2 = \frac{1}{2}A(c)\sigma^2.$$

□

例 19.6 (对数效用的风险厌恶). 若 $u(c) = \log c$, 则

$$u'(c) = \frac{1}{c}, \quad u''(c) = -\frac{1}{c^2}.$$

因此

$$A(c) = -\frac{-1/c^2}{1/c} = \frac{1}{c}.$$

财富越高, 绝对风险厌恶越低。同样大小的货币风险, 对高财富主体的风险溢价更小。

例 19.7 (指数效用的常绝对风险厌恶). 令

$$u(c) = -e^{-ac}, \quad a > 0.$$

则

$$u'(c) = ae^{-ac}, \quad u''(c) = -a^2e^{-ac}.$$

所以

$$A(c) = a.$$

绝对风险厌恶不随财富变化, 因此称为常绝对风险厌恶效用。

19.6 均值保持扩散

定义 19.8 (均值保持扩散). 若随机变量 Y 可写为

$$Y = X + \varepsilon, \quad \mathbb{E}[\varepsilon | X] = 0,$$

则称 Y 是 X 的均值保持扩散。直觉上, Y 在保持条件均值的同时加入了额外噪声。

命题 19.4 (风险厌恶者不喜欢均值保持扩散). 若 $Y = X + \varepsilon$ 且 $\mathbb{E}[\varepsilon | X] = 0$, 并且 u 凹, 则

$$\mathbb{E}u(Y) \leq \mathbb{E}u(X).$$

证明. 由条件 Jensen 不等式,

$$\mathbb{E}[u(X + \varepsilon) | X] \leq u(\mathbb{E}[X + \varepsilon | X]) = u(X).$$

两边再取期望, 得到结论。 □

例 19.8 (给确定收入加入公平噪声). 设 $X = 10$ 为确定收入。令 ε 以一半概率为 2, 一半概率为 -2 。则

$$Y = 10 + \varepsilon$$

取 8 和 12, 均值仍为 10。对 $u(c) = \sqrt{c}$,

$$\mathbb{E}u(Y) = \frac{1}{2}\sqrt{8} + \frac{1}{2}\sqrt{12} < \sqrt{10} = u(X).$$

公平噪声降低了风险厌恶者的期望效用。

19.7 一阶随机支配

定义 19.9 (一阶随机支配). 设 X, Y 的分布函数分别为 F_X, F_Y 。若对所有 t ,

$$F_X(t) \leq F_Y(t),$$

则称 X 一阶随机支配 Y , 记为 $X \succeq_{FOSD} Y$ 。

直觉是: X 比 Y 更倾向于取较高值。因为在每个阈值 t 以下的概率都不大于 Y 。

命题 19.5 (一阶随机支配的效用含义, 有限情形). 若 $X \succeq_{FOSD} Y$, 则对所有递增函数 u ,

$$\mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y),$$

只要期望存在。

证明. 有限取值时, 可以把 X 和 Y 放在共同的分位数表示上. 令 U 在 $[0, 1]$ 上均匀分布, 定义分位数函数 $Q_X(U)$ 、 $Q_Y(U)$. 一阶随机支配等价于

$$Q_X(p) \geq Q_Y(p), \quad \forall p \in (0, 1).$$

若 u 递增, 则

$$u(Q_X(p)) \geq u(Q_Y(p)).$$

对 p 积分得到 $\mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y)$. □

例 19.9 (用分布函数检查一阶随机支配). 彩票 X 以一半概率给 2, 一半概率给 4; 彩票 Y 以一半概率给 1, 一半概率给 3. 显然 $X = Y + 1$ 在同概率状态下成立. 因此 X 一阶随机支配 Y . 对任何递增效用, 较高的每状态支付都会带来不低的期望效用。

例 19.10 (均值更高不代表一阶支配). 彩票 X 以 0.9 概率给 0, 以 0.1 概率给 100, 均值为 10. 彩票 Y 确定给 9. 虽然 $\mathbb{E}X > \mathbb{E}Y$, 但 X 不一阶随机支配 Y , 因为在阈值 $t = 1$ 处,

$$F_X(1) = 0.9 > 0 = F_Y(1).$$

高均值来自小概率大收益, 并不能保证所有递增偏好都喜欢 X 。

19.8 二阶随机支配

定义 19.10 (二阶随机支配). 设 X, Y 的分布函数为 F_X, F_Y . 若对所有 t ,

$$\int_{-\infty}^t F_X(s) ds \leq \int_{-\infty}^t F_Y(s) ds,$$

并且两者均值相同或 X 的均值不低于 Y , 则称 X 二阶随机支配 Y , 记为 $X \succeq_{SOSD} Y$ 。

二阶随机支配比较的是风险厌恶者的偏好。它允许 X 和 Y 的分布函数交叉, 但要求 X 在累计意义上更好。

命题 19.6 (二阶随机支配的效用含义). 若 $X \succeq_{SOSD} Y$, 则对所有递增且凹的效用函数 u ,

$$\mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y).$$

完整证明需要分布积分分部。本书在这里强调使用方式：二阶随机支配是“所有风险厌恶且喜欢更多的主体都弱偏好 X ”的分布层判据。

例 19.11 (确定均值支配公平风险). 令 $X = 10$ 为确定财富, Y 以一半概率为 8, 一半概率为 12。二者均值相同。由于 Y 是 X 加上公平噪声, X 二阶随机支配 Y 。因此对任意递增凹效用,

$$\mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y).$$

这正是风险厌恶者偏好确定均值的分布表达。

例 19.12 (二阶支配允许分布函数交叉). 令 X 确定为 10, Y 以一半概率为 8, 一半概率为 12。当 $t < 8$ 时两者分布函数都为 0; 当 $8 \leq t < 10$ 时, $F_X(t) = 0$ 、 $F_Y(t) = 1/2$; 当 $10 \leq t < 12$ 时, $F_X(t) = 1$ 、 $F_Y(t) = 1/2$ 。分布函数发生交叉, 所以没有一阶支配; 但 X 仍二阶支配 Y , 因为它去掉了均值不变的风险。

19.9 分位数与风险度量的入口

定义 19.11 (分位数). 随机变量 X 的 α -分位数可定义为

$$q_\alpha(X) = \inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\}.$$

金融中常用分位数描述尾部风险。例如损失变量 L 的 95% 分位数给出一个阈值, 使损失超过该阈值的概率不超过 5%。本书不在这里展开实证风险度量, 只把分位数作为分布语言的一个接口。

例 19.13 (离散损失的分位数). 损失 L 以概率 0.9 为 0, 以概率 0.1 为 100。则

$$F_L(0) = 0.9, \quad F_L(100) = 1.$$

因此

$$q_{0.95}(L) = 100.$$

虽然期望损失只有 10, 但 95% 分位数反映了尾部大损失。

19.10 本章小结

彩票是随机变量或分布, 期望效用用积分比较风险选择。凹效用刻画风险厌恶, 确定性等价和风险溢价把风险厌恶转化为货币度量, Arrow-Pratt 系数给出局部风险厌恶强度。均值保持扩散形式化“更风险”的概念。一阶随机支配对应所有递增偏好, 二阶随机支配对应所有递增凹偏好。下一步, Ch19-Ch20 将补充函数空间工具, 为把这些风险对象放进更一般的无限维分析框架做准备。

19.11 Exercises

习题 19.1. 定义彩票。

习题 19.2. 定义期望效用。

习题 19.3. 设 $u(c) = \sqrt{c}$, 彩票 X 以一半概率给 1, 一半概率给 9。计算 $\mathbb{E}u(X)$ 。

习题 19.4. 定义风险厌恶。

习题 19.5. 证明凹效用蕴含风险厌恶。

习题 19.6. 解释风险中性为什么只看期望。

习题 19.7. 定义确定性等价。

习题 19.8. 定义风险溢价。

习题 19.9. 证明风险厌恶下 $CE(X) \leq \mathbb{E}X$ 。

习题 19.10. 设 $u(c) = \sqrt{c}$, 彩票 X 以一半概率给 1, 一半概率给 9。计算 $CE(X)$ 和风险溢价。

习题 19.11. 定义 Arrow-Pratt 绝对风险厌恶系数。

习题 19.12. 计算 $u(c) = \log c$ 的绝对风险厌恶系数。

习题 19.13. 计算 $u(c) = -e^{-ac}$ 的绝对风险厌恶系数。

习题 19.14. 推导小风险溢价近似 $\pi \approx \frac{1}{2}A(c)\sigma^2$ 。

习题 19.15. 定义均值保持扩散。

习题 19.16. 证明风险厌恶者不喜欢均值保持扩散。

习题 19.17. 给出一个确定收入加入公平噪声的例子。

习题 19.18. 定义一阶随机支配。

习题 19.19. 解释 $F_X(t) \leq F_Y(t)$ 的直觉含义。

习题 19.20. 设 $X = Y + 1$ 。证明 X 一阶随机支配 Y 。

习题 19.21. 给出“均值更高但不一阶支配”的例子。

习题 19.22. 说明一阶随机支配对所有递增效用的含义。

习题 19.23. 定义二阶随机支配。

习题 19.24. 解释二阶随机支配和风险厌恶的关系。

习题 19.25. 设 $X = 10$, Y 以一半概率为 8, 一半概率为 12。说明 X 是否一阶随机支配 Y 。

习题 19.26. 在上一题中说明 X 是否二阶随机支配 Y 。

习题 19.27. 定义分位数。

习题 19.28. 损失 L 以 0.9 概率为 0, 以 0.1 概率为 100。求 $q_{0.95}(L)$ 。

习题 19.29. 解释为什么尾部风险可能不被均值充分反映。

习题 19.30. 比较确定性等价和分位数的含义。

习题 19.31. 设 $u(c) = c^2$ 。主体是风险厌恶、风险中性还是风险偏好?

习题 19.32. 设 $u(c) = c$ 。计算任意彩票的风险溢价。

习题 19.33. 说明保险需求与风险溢价的关系。

习题 19.34. 若 $X \succeq_{FOSD} Y$, 是否必然 $X \succeq_{SOSD} Y$? 说明直觉。

习题 19.35. 用一句话说明本章如何连接资产定价中的风险溢价。

19.12 Solutions

本章解答的关键是分清三种比较: 期望比较、所有递增效用的比较、所有递增凹效用的比较。它们分别对应均值、一阶随机支配和二阶随机支配。

解答 19.1. 彩票是结果集合上的概率分布。若结果是消费或财富, 可把彩票表示为随机变量 X , 其分布给出各结果的概率。

解答 19.2. 给定效用函数 u 和彩票 X , 期望效用为

$$\mathbb{E}u(X) = \int u(X) d\mathbb{P},$$

只要该积分存在。

解答 19.3.

$$\mathbb{E}u(X) = \frac{1}{2}\sqrt{1} + \frac{1}{2}\sqrt{9} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2.$$

解答 19.4. 风险厌恶是指对任意彩票 X ，主体弱偏好确定的均值：

$$u(\mathbb{E}X) \geq \mathbb{E}u(X).$$

解答 19.5. 若 u 凹，由 Jensen 不等式，

$$u(\mathbb{E}X) \geq \mathbb{E}u(X).$$

这正是风险厌恶定义。

解答 19.6. 风险中性对应线性效用 $u(c) = ac + b$ ，其中 $a > 0$ 。于是

$$\mathbb{E}u(X) = a\mathbb{E}X + b.$$

比较期望效用等价于比较 $\mathbb{E}X$ 。

解答 19.7. 确定性等价 $CE(X)$ 是满足

$$u(CE(X)) = \mathbb{E}u(X)$$

的确定消费或财富水平。

解答 19.8. 风险溢价为

$$\pi(X) = \mathbb{E}X - CE(X).$$

它表示主体愿意放弃多少期望财富来消除风险。

解答 19.9. 由凹性和 Jensen 不等式，

$$\mathbb{E}u(X) \leq u(\mathbb{E}X).$$

又 $u(CE(X)) = \mathbb{E}u(X)$ 。若 u 递增，则

$$CE(X) \leq \mathbb{E}X.$$

解答 19.10. 已知 $\mathbb{E}u(X) = 2$ 。确定性等价满足

$$\sqrt{CE} = 2,$$

所以 $CE = 4$ 。又

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 9 = 5.$$

风险溢价为

$$\pi = 5 - 4 = 1.$$

解答 19.11. 若 u 二阶可微、递增且凹，绝对风险厌恶系数为

$$A(c) = -\frac{u''(c)}{u'(c)}.$$

解答 19.12. 若 $u(c) = \log c$ ，则

$$u'(c) = 1/c, \quad u''(c) = -1/c^2.$$

因此

$$A(c) = -\frac{-1/c^2}{1/c} = \frac{1}{c}.$$

解答 19.13. 若 $u(c) = -e^{-ac}$ ，则

$$u'(c) = ae^{-ac}, \quad u''(c) = -a^2e^{-ac}.$$

所以

$$A(c) = -\frac{-a^2e^{-ac}}{ae^{-ac}} = a.$$

解答 19.14. 令彩票为 $c + \varepsilon$ ，其中 $\mathbb{E}\varepsilon = 0$ 、 $\mathbb{E}\varepsilon^2 = \sigma^2$ ，确定性等价于 $c - \pi$ 。Taylor 展开：

$$u(c - \pi) \approx u(c) - u'(c)\pi,$$

$$\mathbb{E}u(c + \varepsilon) \approx u(c) + \frac{1}{2}u''(c)\sigma^2.$$

令两者相等，得到

$$\pi \approx -\frac{1}{2} \frac{u''(c)}{u'(c)} \sigma^2 = \frac{1}{2} A(c) \sigma^2.$$

解答 19.15. 若

$$Y = X + \varepsilon, \quad \mathbb{E}[\varepsilon | X] = 0,$$

则 Y 是 X 的均值保持扩散。它在保持条件均值的同时加入额外噪声。

解答 19.16. 若 u 凹，

$$\mathbb{E}[u(Y) | X] = \mathbb{E}[u(X + \varepsilon) | X] \leq u(\mathbb{E}[X + \varepsilon | X]) = u(X).$$

两边取期望得

$$\mathbb{E}u(Y) \leq \mathbb{E}u(X).$$

解答 19.17. 令 $X = 10$ ， ε 以一半概率为 2，一半概率为 -2。则 $Y = 10 + \varepsilon$ 取 8, 12，且

$$\mathbb{E}[Y | X] = 10 = X.$$

所以 Y 是 X 的均值保持扩散。

解答 19.18. 若对所有 t ,

$$F_X(t) \leq F_Y(t),$$

则 X 一阶随机支配 Y , 记为 $X \succeq_{FOSD} Y$ 。

解答 19.19. $F_X(t) \leq F_Y(t)$ 表示在任意阈值 t 以下, X 落入低结果区域的概率不高于 Y 。因此 X 更倾向于取较高值。

解答 19.20. 若 $X = Y + 1$, 则对任意 t ,

$$\{X \leq t\} = \{Y + 1 \leq t\} = \{Y \leq t - 1\} \subseteq \{Y \leq t\}.$$

因此

$$F_X(t) \leq F_Y(t),$$

所以 X 一阶随机支配 Y 。

解答 19.21. 令 X 以 0.9 概率为 0, 以 0.1 概率为 100, 则 $\mathbb{E}X = 10$ 。令 $Y = 9$ 确定, 则 $\mathbb{E}Y = 9$ 。但在 $t = 1$ 处,

$$F_X(1) = 0.9 > 0 = F_Y(1).$$

所以 X 不一阶随机支配 Y 。

解答 19.22. 若 $X \succeq_{FOSD} Y$, 则所有递增效用函数都弱偏好 X :

$$\mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y).$$

它是“喜欢更多”的所有主体一致偏好的分布判据。

解答 19.23. 若对所有 t ,

$$\int_{-\infty}^t F_X(s) ds \leq \int_{-\infty}^t F_Y(s) ds,$$

并且 X 的均值不低于 Y , 则称 X 二阶随机支配 Y 。

解答 19.24. 二阶随机支配对应所有递增凹效用函数的偏好。如果 $X \succeq_{SOSD} Y$, 则所有风险厌恶且喜欢更多的主体都弱偏好 X 。

解答 19.25. $X = 10$ 确定, Y 取 8, 12。当 $8 \leq t < 10$ 时, $F_X(t) = 0 < F_Y(t) = 1/2$; 当 $10 \leq t < 12$ 时, $F_X(t) = 1 > F_Y(t) = 1/2$ 。分布函数交叉, 所以 X 不一阶随机支配 Y 。

解答 19.26. Y 是在确定均值 10 上加入公平噪声得到的均值保持扩散。因此风险厌恶者偏好 X , 即 X 二阶随机支配 Y 。

解答 19.27. α -分位数定义为

$$q_\alpha(X) = \inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\}.$$

解答 19.28. 损失分布满足 $F_L(0) = 0.9$ 、 $F_L(100) = 1$ 。因为 $0.95 > 0.9$ ，达到 0.95 的最小点是 100，所以

$$q_{0.95}(L) = 100.$$

解答 19.29. 均值把所有结果按概率加权为一个数，可能掩盖低概率大损失。尾部风险关注分布边缘的大损失区域，分位数等工具能显示均值看不到的风险集中。

解答 19.30. 确定性等价依赖效用函数，表示主体主观上愿意接受的确定金额；分位数只依赖分布，表示结果的概率阈值。前者是偏好对象，后者是统计对象。

解答 19.31. $u(c) = c^2$ 是凸函数，因此主体风险偏好。对公平风险，Jensen 不等式给出 $\mathbb{E}u(X) \geq u(\mathbb{E}X)$ 。

解答 19.32. 若 $u(c) = c$ ，则

$$CE(X) = \mathbb{E}X.$$

因此风险溢价

$$\pi(X) = \mathbb{E}X - CE(X) = 0.$$

风险中性主体不愿为消除纯风险支付额外溢价。

解答 19.33. 保险把风险彩票转化为较确定的财富。风险厌恶者的确定性等价低于期望财富，因此愿意支付超过公平保费的一部分金额；这部分超过公平保费的愿付额来自风险溢价。

解答 19.34. 是。若 X 一阶随机支配 Y ，则所有递增效用都弱偏好 X 。递增凹效用是递增效用的子类，因此所有风险厌恶且喜欢更多的主体也弱偏好 X 。所以一阶支配蕴含二阶支配。

解答 19.35. 资产风险溢价补偿投资者承担不能由均值单独概括的风险；期望效用、风险厌恶和随机支配提供了比较这些风险补偿的数学语言。

19.13 Computation Lab

本章计算实验使用有限彩票表和分布函数表，目标是把风险比较变成可复现的计算。

Lab 1: 期望效用和确定性等价

输入结果 x_i 、概率 p_i 和效用函数 u 。计算

$$\sum_i p_i u(x_i).$$

若 u 可反函数，计算

$$CE = u^{-1} \left(\sum_i p_i u(x_i) \right),$$

并求风险溢价 $\sum_i p_i x_i - CE$ 。

Lab 2: Arrow-Pratt 系数

给定效用函数 u ，用符号或数值导数计算

$$A(c) = -u''(c)/u'(c).$$

画出 $A(c)$ 随财富 c 的变化，比较对数效用和指数效用。

Lab 3: 一阶随机支配检查

对两个有限彩票，先排序所有可能结果，再计算每个阈值处的分布函数 $F_X(t)$ 和 $F_Y(t)$ 。若所有阈值上 $F_X(t) \leq F_Y(t)$ ，则 X 一阶随机支配 Y 。

Lab 4: 二阶随机支配检查

在同一阈值网格上累计分布函数面积：

$$S_X(t_k) = \sum_{j \leq k} F_X(t_j) \Delta t_j.$$

比较 $S_X(t_k) \leq S_Y(t_k)$ 是否对所有 k 成立，并检查均值条件。

Lab 5: 均值保持扩散模拟

从确定值 x 出发，加入均值为零的噪声 ε 。比较 $u(x)$ 和样本平均

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u(x + \varepsilon_i)$$

在凹效用下的大小。

第二十章 度量空间、赋范空间与函数空间

20.1 为什么要把函数当作点

卷一里，我们主要在有限维空间中研究选择、均衡和最优性。卷二进入概率、风险和动态问题后，一个新的对象反复出现：函数本身。例如，值函数 $V(k)$ 、价格函数 $p(s)$ 、需求函数 $x(p, w)$ 、策略函数 $g(s)$ 都不是一个数，而是一整张规则表。为了讨论这些对象是否收敛、是否连续、两个函数是否接近，我们需要把“函数集合”看作空间。

本章主线是：

距离 $\longrightarrow$ 收敛 $\longrightarrow$ 范数 $\longrightarrow$ 函数空间 $\longrightarrow$ 经济对象之间的误差。

20.2 度量空间

定义 20.1 (度量空间). 集合 X 上的函数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 称为度量，如果对任意 $x, y, z \in X$,

$$d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$d(x, y) = d(y, x),$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

二元组 (X, d) 称为度量空间。

度量把“接近”变成一个可计算的数。经济学中，接近可以是价格向量距离、分布距离、函数图像的最大误差，或两条时间路径之间的误差。

例 20.1 (欧氏距离是度量). 在 $\mathbb{R}^n$ 上定义

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

非负性和对称性直接来自平方和。若 $d(x, y) = 0$ ，则每个 $(x_i - y_i)^2 = 0$ ，所以 $x = y$ 。三角不等式来自向量范数的三角不等式。这个度量刻画有限维商品束、价格向量和参数向量之间的通常距离。

例 20.2 (离散度量). 任意集合 X 上定义

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

这也是度量。三角不等式的关键情形是 $x \neq z$, 左边为 1, 右边至少有一个距离为 1, 所以成立。离散度量说明: 度量不一定来自几何长度, 它也可以只表达“相同或不同”。

定义 20.2 (开球). 给定度量空间 (X, d) 、点 $x \in X$ 和半径 $r > 0$, 开球定义为

$$B_d(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

例 20.3 (价格向量的邻域). 若价格向量 $p = (1, 2)$, 用欧氏距离衡量价格误差, 则

$$B(p, 0.1) = \{q : \sqrt{(q_1 - 1)^2 + (q_2 - 2)^2} < 0.1\}.$$

这个集合包含所有离原价格足够近的价格。比较静态中说“当价格小幅变动时需求如何变化”, 数学上就是研究需求函数在这类邻域内的行为。

20.3 收敛、Cauchy 列与完备性

定义 20.3 (序列收敛). 在度量空间 (X, d) 中, 序列 (x_n) 收敛到 x , 记为 $x_n \rightarrow x$, 如果

$$d(x_n, x) \rightarrow 0.$$

定义 20.4 (Cauchy 列). 序列 (x_n) 是 Cauchy 列, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 使得任意 $m, n \geq N$ 时

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

定义 20.5 (完备性). 若度量空间中每个 Cauchy 列都收敛到该空间内某个点, 则称该空间完备。

命题 20.1 (收敛列一定是 Cauchy 列). 若 $x_n \rightarrow x$, 则 (x_n) 是 Cauchy 列。

证明. 给定 $\varepsilon > 0$ 。由于 $x_n \rightarrow x$, 存在 N , 使得 $n \geq N$ 时

$$d(x_n, x) < \varepsilon/2.$$

若 $m, n \geq N$, 由三角不等式,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon.$$

所以 (x_n) 是 Cauchy 列。 □

例 20.4 (有理数空间不完备). 把 $\mathbb{Q}$ 放在通常距离 $d(x, y) = |x - y|$ 下。用有理数小数截断近似 $\sqrt{2}$:

$$1, \quad 1.4, \quad 1.41, \quad 1.414, \quad \dots$$

这是 $\mathbb{Q}$ 中的 Cauchy 列，但它在 $\mathbb{Q}$ 中没有极限，因为极限 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ 。因此 $\mathbb{Q}$ 不完备。这个例子说明：Cauchy 性只说“内部越来越稳定”，完备性保证稳定对象没有跑出空间。

例 20.5 (递归算法为什么需要完备空间). 值函数迭代产生一系列函数

$$V_0, V_1, V_2, \dots$$

如果我们能证明这些函数在某个距离下是 Cauchy 列，但该函数空间不完备，那么极限函数可能不属于原空间，经济问题就没有在该空间内闭合。后续动态规划中选择完备的函数空间，是为了让“迭代收敛到值函数”这句话有数学落点。

20.4 范数与赋范空间

定义 20.6 (范数). 向量空间 V 上的函数 $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ 称为范数，如果对任意 $x, y \in V$ 和标量 a ,

$$\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$\|ax\| = |a|\|x\|,$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

带范数的向量空间称为赋范空间。

命题 20.2 (范数诱导度量). 若 V 是赋范空间，则

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

定义了 V 上的度量。

证明. 非负性和 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ 来自范数的正定性。对称性来自

$$\|x - y\| = \|(y - x)\| = |-1|\|y - x\| = \|y - x\|.$$

三角不等式来自

$$\|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|.$$

□

例 20.6 (三种常见向量范数). 在 $\mathbb{R}^n$ 上,

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_i x_i^2 \right)^{1/2},$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

若 $x = (1, -2, 3)$, 则

$$\|x\|_1 = 6, \quad \|x\|_2 = \sqrt{14}, \quad \|x\|_\infty = 3.$$

在有限维中, 这些范数给出的收敛概念相同; 但它们衡量误差的口径不同。

例 20.7 (资产组合权重的范数). 设两个投资组合权重为

$$w = (0.5, 0.3, 0.2), \quad v = (0.4, 0.4, 0.2).$$

则

$$\|w - v\|_1 = 0.2, \quad \|w - v\|_\infty = 0.1.$$

ℓ^1 范数衡量总调仓规模, ℓ^∞ 范数衡量单个资产最大权重变化。不同范数对应不同经济问题中的误差成本。

20.5 函数空间与上确界范数

定义 20.7 (有界函数空间). 给定集合 S , 令 $B(S)$ 表示所有有界实值函数 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ 的集合。

定义 20.8 (上确界范数). 对 $f \in B(S)$, 定义

$$\|f\|_\infty = \sup_{s \in S} |f(s)|.$$

例 20.8 (两个值函数之间的最大误差). 设状态 $S = \{0, 1, 2\}$, 两个近似值函数为

$$V = (1, 2, 4), \quad W = (1.1, 1.8, 4.3).$$

把它们看作 S 上的函数, 则

$$\|V - W\|_\infty = \max\{0.1, 0.2, 0.3\} = 0.3.$$

这表示无论在哪个状态, 近似误差都不超过 0.3。动态规划中常用这种“最坏状态误差”控制策略和价格函数。

例 20.9 (为什么只看平均误差不够). 令 $S = \{1, \dots, 100\}$. 函数 $f \equiv 0$, 而 $g(100) = 10$ 、其他点为 0. 平均绝对误差为

$$\frac{1}{100} \sum_{s=1}^{100} |g(s) - f(s)| = 0.1,$$

但

$$\|g - f\|_{\infty} = 10.$$

如果第 100 个状态对应危机状态或违约状态, 平均误差很小并不代表经济上可接受; 上确界范数会暴露最坏状态。

20.6 点态收敛与一致收敛

定义 20.9 (点态收敛). 函数列 $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ 点态收敛到 f , 如果对每个固定 $s \in S$,

$$f_n(s) \rightarrow f(s).$$

定义 20.10 (一致收敛). 函数列 $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ 一致收敛到 f , 如果

$$\|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0.$$

命题 20.3 (一致收敛蕴含点态收敛). 若 $f_n \rightarrow f$ 一致收敛, 则 $f_n \rightarrow f$ 点态收敛。

证明. 对任意固定 $s \in S$, 有

$$|f_n(s) - f(s)| \leq \sup_{t \in S} |f_n(t) - f(t)| = \|f_n - f\|_{\infty}.$$

若右边趋于 0, 则左边也趋于 0。 □

例 20.10 (点态收敛但不一致收敛). 在 $[0, 1]$ 上令

$$f_n(x) = x^n.$$

当 $0 \leq x < 1$ 时, $x^n \rightarrow 0$; 当 $x = 1$ 时, $x^n = 1$. 所以点态极限为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

但收敛不是一致的。因为对每个 n , 可取 x 足够接近 1, 使 x^n 接近 1, 而极限函数在 $x < 1$ 处为 0. 因此 $\|f_n - f\|_{\infty}$ 不趋于 0. 常见错误是只检查每个固定点, 而忘记“一致”要求同一个 N 同时控制所有点。

例 20.11 (一致收敛的简单例子). 在任意集合 S 上令

$$f_n(s) = f(s) + \frac{1}{n}.$$

则

$$\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

所以 f_n 一致收敛到 f 。这里误差与状态 s 无关，因此很容易得到全局误差界。

20.7 连续函数空间

定义 20.11 (连续函数空间). 若 K 是度量空间的子集, $C(K)$ 表示 K 上所有连续实值函数组成的空间。

定理 20.1 (一致极限保持连续性). 设 K 是度量空间, $f_n \in C(K)$, 且 f_n 一致收敛到 f 。则 $f \in C(K)$ 。

证明. 固定 $x \in K$ 和 $\varepsilon > 0$ 。由一致收敛, 存在 N , 使得对所有 $y \in K$,

$$|f_N(y) - f(y)| < \varepsilon/3.$$

由于 f_N 在 x 连续, 存在 $\delta > 0$, 使得 $d(x, y) < \delta$ 时

$$|f_N(y) - f_N(x)| < \varepsilon/3.$$

于是当 $d(x, y) < \delta$ 时,

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

所以 f 在 x 连续。由于 x 任意, f 连续。 □

例 20.12 (连续需求函数的极限). 设一系列近似需求函数 $x_n(p)$ 都连续, 并且在价格区间 $K = [1, 2]$ 上一致收敛到 $x(p)$ 。则 x 仍连续。经济含义是: 如果每一步近似都没有价格跳跃, 并且误差在整个价格区间上统一变小, 那么极限需求也不会突然跳跃。

例 20.13 (点态极限可能破坏连续性). 上一节的 $f_n(x) = x^n$ 在 $[0, 1]$ 上都连续, 但点态极限

$$f(x) = 0 \quad (x < 1), \quad f(1) = 1$$

不连续。这说明“每个近似函数连续”加上“点态收敛”不够。若要把连续性传给极限, 需要一致收敛这样的更强条件。

命题 20.4 (连续函数在上确界范数下闭合). 若 $f_n \in C(K)$ 且 $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$, 则 $f \in C(K)$ 。因此 $C(K)$ 在 $B(K)$ 的上确界范数下是闭的。

证明. 这正是一致极限保持连续性的直接应用。闭合性的意思是: $C(K)$ 内序列若在上确界范数下收敛到某个有界函数, 则极限仍属于 $C(K)$ 。□

20.8 序列空间与积分型函数空间

定义 20.12 (序列空间). 对 $1 \leq p < \infty$, ℓ^p 是满足

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$$

的实数序列 $x = (x_i)$ 的集合, 并配备范数

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

ℓ^∞ 是所有有界序列的集合, 范数为

$$\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|.$$

例 20.14 (一个在无穷维中区分范数的序列). 令

$$x_i = \frac{1}{i}.$$

则 $x \in \ell^\infty$, 因为 $\sup_i |x_i| = 1$ 。但 $x \notin \ell^1$, 因为调和级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$$

发散。这个例子提醒我们: 无限维空间中, 不同范数和不同空间真的会给出不同对象, 而不只是同一对象的不同尺子。

定义 20.13 (积分型函数空间入口). 给定测度空间 $(S, \mathcal{A}, \mu)$, 对 $1 \leq p < \infty$, L^p 表示满足

$$\int |f|^p d\mu < \infty$$

的函数类, 范数形式为

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

严格地说, L^p 中把几乎处处相等的函数视为同一个元素。

例 20.15 (上确界误差和均方误差). 设状态 $s \in [0, 1]$, 近似误差为 $e(s) = s$. 则

$$\|e\|_\infty = 1,$$

而相对于 Lebesgue 测度,

$$\|e\|_2 = \left(\int_0^1 s^2 ds \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

上确界范数关心最大误差, L^2 范数关心平方平均误差。计算近似、计量估计和动态规划会根据目标选择不同误差口径。

20.9 有限维和无限维的关键差别

命题 20.5 (有限维范数等价). 在 $\mathbb{R}^n$ 上, 任意两个范数 $\|\cdot\|_a$ 、 $\|\cdot\|_b$ 都存在常数 $m, M > 0$, 使得

$$m\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq M\|x\|_a, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

因此有限维中不同范数诱导相同的收敛概念。

证明. 证明思想是把问题限制在某个范数的单位球面上。有限维单位球面紧, 另一个范数作为连续函数在该球面上取得正的最小值和有限最大值。缩放任意非零向量即可得到不等式。完整紧致性细节见 Ch03。 $\square$

例 20.16 (有限维中最大误差控制平均误差). 若 $x \in \mathbb{R}^n$, 则

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$

第一边说明最大坐标误差不超过平方和误差; 第二边说明若每个坐标误差都不超过 $\|x\|_\infty$, 总平方误差最多是 $n\|x\|_\infty^2$ 。这类不等式在有限状态模型中很常用。

无限维空间中, 范数等价通常失败。一个函数列可能在均方意义下收敛, 却不在上确界范数下收敛; 也可能逐点收敛, 却没有统一误差控制。这就是后续章节必须小心指定函数空间和范数的原因。

20.10 经济学中的函数空间选择

在经济模型中, 选择空间不是纯数学装饰, 而是建模的一部分。

例 20.17 (值函数空间的选择). 在确定性增长模型中, 值函数 $V(k)$ 通常定义在资本区间 K 上。如果我们希望用最大值定理保证 Bellman 右端连续, 并用迭代保持连续性, 就自然选择 $C(K)$ 。如果只关心有界性和上确界误差, 则可先在 $B(K)$ 上工作。空间越大越容易容纳对象, 空间越小越容易保留经济结构。

例 20.18 (价格函数和状态分布). 资产定价中价格可能是状态 s 的函数 $p(s)$ 。若状态有限, 价格函数只是向量; 若状态连续, 价格就是函数。比较两个定价规则 p, q 时,

$$\|p - q\|_{\infty} < 0.01$$

表示每个状态下价格误差都小于 0.01。这比只比较平均价格误差更适合需要无套利或预算约束逐状态成立的问题。

20.11 本章小结

度量空间让我们讨论一般对象之间的距离; 赋范空间在此基础上加入线性结构; 函数空间则把值函数、需求函数、价格函数和策略函数作为点来研究。点态收敛只逐点检查, 一致收敛用上确界范数统一控制所有状态。连续函数的一致极限仍连续, 这是经济模型中保持结构的重要工具。下一章将正式进入 Banach 与 Hilbert 空间, 把完备赋范空间、线性算子和投影方法系统化。

20.12 Exercises

习题 20.1. 定义度量空间。

习题 20.2. 验证通常距离 $d(x, y) = |x - y|$ 是 $\mathbb{R}$ 上的度量。

习题 20.3. 定义开球 $B_d(x, r)$ 。

习题 20.4. 在离散度量下, 求 $B_d(x, 1/2)$ 和 $B_d(x, 2)$ 。

习题 20.5. 定义度量空间中的序列收敛。

习题 20.6. 定义 Cauchy 列。

习题 20.7. 证明收敛列一定是 Cauchy 列。

习题 20.8. 解释为什么 $\mathbb{Q}$ 在通常距离下不完备。

习题 20.9. 定义范数。

习题 20.10. 证明范数诱导的 $d(x, y) = \|x - y\|$ 是度量。

习题 20.11. 计算 $x = (2, -1, 2)$ 的 $\|x\|_1$ 、 $\|x\|_2$ 、 $\|x\|_{\infty}$ 。

习题 20.12. 设 $w = (0.2, 0.5, 0.3)$ 、 $v = (0.3, 0.4, 0.3)$ 。计算 $\|w - v\|_1$ 和 $\|w - v\|_{\infty}$ 。

习题 20.13. 定义有界函数空间 $B(S)$ 。

习题 20.14. 定义上确界范数。

习题 20.15. 设 $S = \{a, b, c\}$, $f = (1, 3, 2)$ 、 $g = (2, 1, 2.5)$ 。计算 $\|f - g\|_\infty$ 。

习题 20.16. 说明上确界范数为什么适合控制最坏状态误差。

习题 20.17. 定义点态收敛。

习题 20.18. 定义一致收敛。

习题 20.19. 证明一致收敛蕴含点态收敛。

习题 20.20. 给出一个点态收敛但不一致收敛的函数列。

习题 20.21. 设 $f_n(x) = x/n$ 在 $[0, 1]$ 上。证明 f_n 一致收敛到 0。

习题 20.22. 定义 $C(K)$ 。

习题 20.23. 证明连续函数的一致极限仍连续。

习题 20.24. 解释为什么点态极限可能不保持连续性。

习题 20.25. 说明 $C(K)$ 在上确界范数下闭合的含义。

习题 20.26. 定义 ℓ^p 空间。

习题 20.27. 判断序列 $x_i = 1/i$ 是否属于 ℓ^∞ 和 ℓ^1 。

习题 20.28. 判断序列 $x_i = 1/i^2$ 是否属于 ℓ^1 。

习题 20.29. 定义 L^p 空间的入口形式。

习题 20.30. 对 $e(s) = s$ 和 $s \in [0, 1]$, 计算 $\|e\|_\infty$ 与 $\|e\|_2$ 。

习题 20.31. 陈述有限维范数等价命题。

习题 20.32. 证明 $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$ 。

习题 20.33. 解释为什么无限维中范数选择会影响收敛概念。

习题 20.34. 说明值函数迭代为什么需要指定函数空间。

习题 20.35. 用一句话说明本章如何为动态规划做准备。

20.13 Solutions

本章解答的主线是：先用度量定义收敛，再用范数产生度量，最后把函数放进带范数的空间中比较。

解答 20.1. 度量空间是一个集合 X 和一个距离函数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 组成的二元组 (X, d) 。距离函数满足非负性、正定性、对称性和三角不等式。

解答 20.2. 对 $d(x, y) = |x - y|$ ，绝对值非负，且 $|x - y| = 0$ 当且仅当 $x = y$ 。对称性由 $|x - y| = |y - x|$ 得到。三角不等式为

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|.$$

所以它是 $\mathbb{R}$ 上的度量。

解答 20.3. 开球定义为

$$B_d(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\},$$

其中 x 是中心， $r > 0$ 是半径。

解答 20.4. 离散度量下，若 $y \neq x$ ，则 $d(x, y) = 1$ 。因此

$$B_d(x, 1/2) = \{x\}.$$

因为所有点到 x 的距离都小于 2，

$$B_d(x, 2) = X.$$

解答 20.5. 序列 (x_n) 在度量空间中收敛到 x ，是指

$$d(x_n, x) \rightarrow 0.$$

也就是任意小的半径最终都能包含所有后续项。

解答 20.6. (x_n) 是 Cauchy 列，是指对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 N ，使得 $m, n \geq N$ 时

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

它描述序列后段内部越来越接近。

解答 20.7. 若 $x_n \rightarrow x$ ，给定 $\varepsilon > 0$ ，取 N 使 $n \geq N$ 时 $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ 。若 $m, n \geq N$ ，则

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon.$$

所以 (x_n) 是 Cauchy 列。

解答 20.8. 在 $\mathbb{Q}$ 中, 可用有理数序列逼近 $\sqrt{2}$, 例如小数截断 $1, 1.4, 1.41, \dots$ 。该序列在通常距离下是 Cauchy 列, 但极限 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ 。因此这个 Cauchy 列不在 $\mathbb{Q}$ 中收敛, $\mathbb{Q}$ 不完备。

解答 20.9. 范数是向量空间 V 上的函数 $\|\cdot\|$, 满足正定性、齐次性和三角不等式:

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad \|ax\| = |a|\|x\|, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

解答 20.10. 令 $d(x, y) = \|x - y\|$ 。正定性给出 $d(x, y) \geq 0$, 且 $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x - y = 0$, 即 $x = y$ 。齐次性给出

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = \|y - x\| = d(y, x).$$

三角不等式给出

$$d(x, z) = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|.$$

所以 d 是度量。

解答 20.11. 对 $x = (2, -1, 2)$,

$$\|x\|_1 = 2 + 1 + 2 = 5,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3,$$

$$\|x\|_\infty = 2.$$

解答 20.12.

$$w - v = (-0.1, 0.1, 0).$$

因此

$$\|w - v\|_1 = 0.1 + 0.1 + 0 = 0.2,$$

$$\|w - v\|_\infty = 0.1.$$

解答 20.13. $B(S)$ 是集合 S 上所有有界实值函数 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ 组成的空间。有界的意思是存在 $M < \infty$, 使得对所有 $s \in S$, $|f(s)| \leq M$ 。

解答 20.14. 对有界函数 f , 上确界范数定义为

$$\|f\|_\infty = \sup_{s \in S} |f(s)|.$$

它记录函数在整个定义域上的最大绝对规模。

解答 20.15. 逐点差为

$$f - g = (-1, 2, -0.5).$$

所以

$$\|f - g\|_{\infty} = \max\{1, 2, 0.5\} = 2.$$

解答 20.16. 上确界范数取所有状态误差的最大值。如果 $\|f - g\|_{\infty} \leq \varepsilon$ ，则每个状态 s 都满足

$$|f(s) - g(s)| \leq \varepsilon.$$

因此它适合要求预算约束、价值误差或价格误差逐状态受控的问题。

解答 20.17. 点态收敛是指对每个固定 $s \in S$,

$$f_n(s) \rightarrow f(s).$$

这里允许不同的 s 需要不同的收敛速度。

解答 20.18. 一致收敛是指

$$\|f_n - f\|_{\infty} = \sup_{s \in S} |f_n(s) - f(s)| \rightarrow 0.$$

它要求同一个误差界同时控制所有状态。

解答 20.19. 若 $f_n \rightarrow f$ 一致收敛，则对任意固定 s ,

$$|f_n(s) - f(s)| \leq \sup_{t \in S} |f_n(t) - f(t)| = \|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0.$$

所以 $f_n(s) \rightarrow f(s)$ ，即点态收敛。

解答 20.20. 在 $[0, 1]$ 上令 $f_n(x) = x^n$ 。当 $x < 1$ 时 $f_n(x) \rightarrow 0$ ，当 $x = 1$ 时 $f_n(1) = 1$ 。所以点态极限在 1 处跳跃。收敛不是一致的，因为在靠近 1 的点上， x^n 仍可接近 1。

解答 20.21. 对 $x \in [0, 1]$,

$$|f_n(x) - 0| = \frac{x}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

所以

$$\|f_n - 0\|_{\infty} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

因此 f_n 一致收敛到 0。

解答 20.22. $C(K)$ 是集合 K 上所有连续实值函数组成的空间。若 K 是价格区间、状态空间或资本区间，则 $C(K)$ 中的元素就是连续的规则函数。

解答 20.23. 设 $f_n \in C(K)$ 且 $f_n \rightarrow f$ 一致。固定 x 和 $\varepsilon > 0$ 。先取 N , 使

$$|f_N(y) - f(y)| < \varepsilon/3$$

对所有 y 成立。再由 f_N 在 x 连续, 取 δ , 使 $d(x, y) < \delta$ 时

$$|f_N(y) - f_N(x)| < \varepsilon/3.$$

于是

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

所以 f 连续。

解答 20.24. 点态收敛只保证每个固定点上的函数值收敛, 不保证收敛速度在整个定义域上统一。例子 $f_n(x) = x^n$ 的点态极限在 $x = 1$ 处不连续, 说明连续性不能只靠点态收敛传递。

解答 20.25. $C(K)$ 在上确界范数下闭合, 意思是: 若连续函数列 $f_n \in C(K)$ 在 $\|\cdot\|_\infty$ 下收敛到某个有界函数 f , 则 f 仍连续, 因此仍属于 $C(K)$ 。

解答 20.26. 对 $1 \leq p < \infty$,

$$\ell^p = \left\{ x = (x_i) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}.$$

其范数为

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

解答 20.27. 序列 $x_i = 1/i$ 有界, 且最大值为 1, 所以 $x \in \ell^\infty$ 。但

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$$

发散, 所以 $x \notin \ell^1$ 。

解答 20.28.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

收敛, 因此 $x_i = 1/i^2$ 属于 ℓ^1 。

解答 20.29. 给定测度空间 $(S, \mathcal{A}, \mu)$, L^p 的入口形式是满足

$$\int |f|^p d\mu < \infty$$

的函数类, 并配备

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

严格处理中, 几乎处处相等的函数视为同一个元素。

解答 20.30. 对 $e(s) = s$,

$$\|e\|_\infty = \sup_{s \in [0,1]} s = 1.$$

同时

$$\|e\|_2 = \left(\int_0^1 s^2 ds \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{3} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

解答 20.31. 有限维范数等价命题说: 在 $\mathbb{R}^n$ 上, 任意两个范数 $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ 都存在 $m, M > 0$, 使得

$$m\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq M\|x\|_a$$

对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立。

解答 20.32. 因为

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \max_i x_i^2 = \|x\|_\infty^2,$$

所以 $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$ 。另一方面, 每个 $x_i^2 \leq \|x\|_\infty^2$, 因此

$$\|x\|_2^2 = \sum_i x_i^2 \leq n\|x\|_\infty^2.$$

取平方根得 $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$ 。

解答 20.33. 无限维中不存在统一的有限坐标数来控制所有方向。一个函数列可能在平均意义下误差趋于零, 但最大误差不趋于零; 也可能逐点收敛但不一致收敛。因此范数选择会真正改变收敛概念和极限可用性。

解答 20.34. 值函数迭代产生的是函数列。若不指定函数空间, 就无法说明这些函数是否有界、连续、是否收敛, 以及极限是否仍是允许的值函数。指定函数空间和范数, 是证明迭代收敛的前提。

解答 20.35. 本章为动态规划提供了“值函数之间的距离”和“函数列收敛”的语言, 后续才能用完备空间与压缩映射证明 Bellman 迭代收敛。

20.14 Computation Lab

本章计算实验不引入复杂代码，只说明如何把函数空间概念落到网格近似中。

Lab 1: 网格上的上确界误差

在状态网格

$$S_N = \{s_1, \dots, s_N\}$$

上，两个函数近似 f, g 可表示为两个向量。上确界误差近似为

$$\|f - g\|_{\infty, N} = \max_{1 \leq i \leq N} |f(s_i) - g(s_i)|.$$

用于检查值函数迭代时，每轮可记录

$$\max_i |V_{k+1}(s_i) - V_k(s_i)|.$$

Lab 2: 点态收敛和一致收敛的网格观察

对 $f_n(x) = x^n$ ，在固定网格上计算

$$\max_i |f_n(s_i) - f(s_i)|.$$

如果网格不够密，可能误以为收敛很快；当网格点更靠近 1 时，最大误差会重新变大。这说明数值网格可能掩盖非一致收敛。

Lab 3: 平均误差与最大误差

给定误差向量 $e_i = f(s_i) - g(s_i)$ ，比较

$$\max_i |e_i| \quad \text{和} \quad \left(\frac{1}{N} \sum_i e_i^2 \right)^{1/2}.$$

若误差集中在少数状态，均方误差可能较小，但上确界误差会提醒我们存在局部严重偏差。

Lab 4: 值函数迭代停止准则

在有限网格动态规划中，常用停止准则是

$$\|V_{k+1} - V_k\|_{\infty, N} < \varepsilon.$$

这不是完整的无限维证明，但它对应本章的上确界范数直觉：当每个网格状态上的值函数变化都很小时，迭代可以停止。

第二十一章 Banach 与 Hilbert 空间中的经济分析

21.1 从函数空间到算子方法

Ch19 说明了如何把函数作为空间中的点。本章进一步追问：如果空间里的点是函数，那么经济模型中的方程往往就是对函数的操作。例如 Bellman 方程写作

$$V = TV,$$

资产定价可写作价格函数到现金流函数的线性映射，最小二乘可写作把随机变量投影到解释变量张成的空间。为了让这些说法可证明，我们需要 Banach 空间、Hilbert 空间和线性算子。

本章主线是：

完备赋范空间 $\longrightarrow$ 线性算子 $\longrightarrow$ 不动点 $\longrightarrow$ 内积与投影 $\longrightarrow$ 经济近似与资产定价。

21.2 Banach 空间

定义 21.1 (Banach 空间). 赋范空间 X 若在由范数诱导的度量

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

下完备，则称 X 是 Banach 空间。

完备性保证 Cauchy 列不会“逃出空间”。在动态规划中，值函数迭代产生函数列；若所在空间是 Banach 空间，就有机会把 Cauchy 性转化为真实极限。

例 21.1 ($B(S)$ 是 Banach 空间的直觉). 设 $B(S)$ 是 S 上所有有界实值函数，范数为

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{s \in S} |f(s)|.$$

若 (f_n) 在上确界范数下是 Cauchy 列, 则对每个 s , 数列 $(f_n(s))$ 在 $\mathbb{R}$ 中 Cauchy, 因此有极限 $f(s)$ 。上确界 Cauchy 性还能给出统一有界性和一致收敛, 所以极限函数 f 仍有界, 且 $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ 。因此 $B(S)$ 是 Banach 空间。

例 21.2 ($C(K)$ 的 Banach 空间角色). 若 K 是紧致度量空间, 则 $C(K)$ 配备上确界范数是 Banach 空间。直觉来自 Ch19: 连续函数的一致极限仍连续, 而上确界范数收敛正是一致收敛。经济含义是, 如果值函数迭代始终产生连续函数, 并且在 sup norm 下收敛, 那么极限值函数仍连续。

例 21.3 (不完备空间带来的麻烦). 多项式空间 $P[0, 1]$ 在上确界范数下不是完备的。Weierstrass 逼近告诉我们, 可以用多项式一致逼近许多连续非多项式函数, 例如 e^x 。因此多项式列可能在上确界范数下收敛到 e^x , 但 $e^x \notin P[0, 1]$ 。如果把近似值函数空间强行限定为多项式, 而不允许极限离开, 就会失去完备性。

21.3 线性算子与有界性

定义 21.2 (线性算子). 设 X, Y 是向量空间。映射 $T: X \rightarrow Y$ 称为线性算子, 如果对任意 $x, z \in X$ 和标量 a, b ,

$$T(ax + bz) = aTx + bTz.$$

定义 21.3 (有界线性算子). 设 X, Y 是赋范空间。线性算子 $T: X \rightarrow Y$ 称为有界, 如果存在常数 $M < \infty$, 使得对所有 $x \in X$,

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

定义 21.4 (算子范数). 有界线性算子 $T: X \rightarrow Y$ 的算子范数定义为

$$\|T\|_{\text{op}} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y.$$

例 21.4 (矩阵是有限维线性算子). 矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 定义线性算子 $T(x) = Ax$ 。若使用欧氏范数, 算子范数为

$$\|A\|_{\text{op}} = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|Ax\|_2.$$

在有限维中, 每个线性算子都是有界的。经济模型中的投入产出矩阵、Markov 转移矩阵和线性近似系统都属于这一类。

例 21.5 (乘法算子). 在 $B(S)$ 上, 给定有界函数 $m: S \rightarrow \mathbb{R}$, 定义

$$(Tf)(s) = m(s)f(s).$$

则

$$\|Tf\|_\infty = \sup_s |m(s)f(s)| \leq \|m\|_\infty \|f\|_\infty.$$

所以 T 是有界线性算子, 且 $\|T\|_{\text{op}} \leq \|m\|_\infty$. 在资产定价中, 随机贴现因子乘以现金流就是这类乘法结构的概率版本。

命题 21.1 (有界线性算子连续). 若 $T: X \rightarrow Y$ 是有界线性算子, 则 T 连续。

证明. 若 $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$, 则对任意 $x, z \in X$,

$$\|Tx - Tz\|_Y = \|T(x - z)\|_Y \leq M\|x - z\|_X.$$

这说明 T 是 Lipschitz 连续, 因此连续。 □

命题 21.2 (连续线性算子有界). 若线性算子 $T: X \rightarrow Y$ 在 0 处连续, 则 T 有界。

证明. 由 0 处连续, 存在 $\delta > 0$, 使得 $\|x\|_X < \delta$ 时

$$\|Tx\|_Y < 1.$$

对任意 $x \neq 0$, 令

$$z = \frac{\delta}{2\|x\|_X} x.$$

则 $\|z\|_X = \delta/2 < \delta$, 所以 $\|Tz\|_Y < 1$. 由线性性,

$$Tz = \frac{\delta}{2\|x\|_X} Tx.$$

因此

$$\|Tx\|_Y < \frac{2}{\delta}\|x\|_X.$$

所以 T 有界。 □

例 21.6 (期望是有界线性泛函). 在概率空间上考虑 L^∞ , 定义

$$\varphi(X) = \mathbb{E}X.$$

线性性来自期望线性。并且

$$|\varphi(X)| = |\mathbb{E}X| \leq \mathbb{E}|X| \leq \|X\|_\infty.$$

所以 φ 是有界线性泛函, 算子范数不超过 1. 这说明“取期望”是一个连续操作: 若随机变量在上确界范数下接近, 期望也接近。

命题 21.3 (算子范数是范数). 从 X 到 Y 的有界线性算子集合记为 $\mathcal{L}(X, Y)$ 。若 Y 是赋范空间, 则 $\|\cdot\|_{\text{op}}$ 是 $\mathcal{L}(X, Y)$ 上的范数。

证明. 非负性显然。若 $\|T\|_{\text{op}} = 0$, 则所有 $\|x\| \leq 1$ 的 x 都有 $Tx = 0$, 由线性性任意 x 也有 $Tx = 0$ 。齐次性来自

$$\|aT\|_{\text{op}} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|aTx\| = |a|\|T\|_{\text{op}}.$$

三角不等式来自

$$\|(T + S)x\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \leq (\|T\|_{\text{op}} + \|S\|_{\text{op}})\|x\|.$$

对 $\|x\| \leq 1$ 取上确界即可。 □

21.4 压缩映射与 Bellman 算子

定义 21.5 (压缩映射). 赋范空间 X 上的映射 $T: X \rightarrow X$ 是压缩映射, 如果存在 $\beta \in [0, 1)$, 使得对所有 $x, y \in X$,

$$\|Tx - Ty\| \leq \beta\|x - y\|.$$

定理 21.1 (Banach 压缩映射定理). 若 X 是非空 Banach 空间, $T: X \rightarrow X$ 是压缩映射, 则 T 有唯一不动点 x^* , 且从任意 $x_0 \in X$ 出发的迭代

$$x_{n+1} = Tx_n$$

收敛到 x^* 。

证明. 证明思路如下。压缩性给出

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \beta^n \|x_1 - x_0\|.$$

于是 (x_n) 是 Cauchy 列。因为 X 完备, 它收敛到某个 $x^* \in X$ 。再由 T 连续, 有

$$Tx^* = T(\lim x_n) = \lim Tx_n = \lim x_{n+1} = x^*.$$

若 x^*, y^* 都是不动点, 则

$$\|x^* - y^*\| = \|Tx^* - Ty^*\| \leq \beta\|x^* - y^*\|.$$

由于 $\beta < 1$, 只能有 $x^* = y^*$ 。 □

例 21.7 (Bellman 算子的压缩性). 设

$$(TV)(s) = \max_{a \in A(s)} \{u(s, a) + \beta V(g(s, a))\}, \quad 0 < \beta < 1.$$

对任意两个有界值函数 V, W , 最大值不等式给出

$$|(TV)(s) - (TW)(s)| \leq \beta \sup_{s'} |V(s') - W(s')|.$$

因此

$$\|TV - TW\|_\infty \leq \beta \|V - W\|_\infty.$$

若 T 把 $B(S)$ 映到自身, 则 $B(S)$ 的完备性和压缩映射定理保证唯一值函数存在, 且值函数迭代收敛。

例 21.8 (贴现因子为什么必须小于一). 若 $\beta = 0.95$, 每轮 Bellman 迭代误差至多乘以 0.95, 长期会下降到零。若 $\beta = 1$, 上述不等式只能给出非扩张:

$$\|TV - TW\|_\infty \leq \|V - W\|_\infty,$$

不再保证收敛。经济上, 贴现让远期误差被折扣; 数学上, 贴现给出压缩常数。

21.5 Hilbert 空间与内积

定义 21.6 (内积空间). 实向量空间 H 上的函数 $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ 称为内积, 如果它对第一个变量线性、对称, 并且

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

内积诱导范数

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

定义 21.7 (Hilbert 空间). 若内积空间在内积诱导的范数下完备, 则称为 Hilbert 空间。

例 21.9 ($\mathbb{R}^n$ 是 Hilbert 空间). 在 $\mathbb{R}^n$ 上定义

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

诱导范数是欧氏范数。由于 $\mathbb{R}^n$ 完备, 所以它是 Hilbert 空间。普通最小二乘的几何图像就发生在这个空间中。

例 21.10 (L^2 的内积). 在概率空间上, 平方可积随机变量的空间 L^2 配备内积

$$\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}[XY].$$

诱导范数为

$$\|X\|_2 = (\mathbb{E}X^2)^{1/2}.$$

若把随机变量看作向量, 那么协方差、回归和投影都可以用内积语言表达。

定理 21.2 (Cauchy-Schwarz 不等式). 在内积空间中,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

证明. 若 $y = 0$, 结论显然。若 $y \neq 0$, 对任意实数 t ,

$$0 \leq \|x - ty\|^2 = \|x\|^2 - 2t\langle x, y \rangle + t^2\|y\|^2.$$

这是关于 t 的二次函数, 始终非负, 所以判别式不大于零:

$$4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0.$$

因此

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

□

例 21.11 (相关系数的界). 若 $X, Y \in L^2$, 则 Cauchy-Schwarz 给出

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq (\mathbb{E}X^2)^{1/2}(\mathbb{E}Y^2)^{1/2}.$$

对中心化变量应用该不等式可得相关系数绝对值不超过 1。因此相关系数的界不是统计巧合, 而是 Hilbert 空间几何的结果。

21.6 正交、投影与最小二乘

定义 21.8 (正交). 在内积空间中, 若

$$\langle x, y \rangle = 0,$$

则称 x 与 y 正交, 记为 $x \perp y$ 。

定义 21.9 (投影). 设 M 是 Hilbert 空间 H 的闭线性子空间。若 $m^* \in M$ 满足

$$\|x - m^*\| \leq \|x - m\|, \quad \forall m \in M,$$

则称 m^* 是 x 在 M 上的投影, 记为 $P_M x$ 。

命题 21.4 (投影的正规方程, 有限维子空间). 设 M 是由 $\phi_1, \dots, \phi_k$ 张成的子空间。若

$$m^* = \sum_{j=1}^k a_j \phi_j$$

最小化 $\|x - m\|^2$, 则残差 $r = x - m^*$ 满足

$$\langle r, \phi_j \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

证明. 考虑任意方向 ϕ_j 和实数 t 。由于 m^* 最优, 函数

$$q(t) = \|x - (m^* + t\phi_j)\|^2 = \|r - t\phi_j\|^2$$

在 $t = 0$ 处最小。展开:

$$q(t) = \|r\|^2 - 2t\langle r, \phi_j \rangle + t^2\|\phi_j\|^2.$$

一阶条件 $q'(0) = 0$ 给出

$$\langle r, \phi_j \rangle = 0.$$

□

例 21.12 (普通最小二乘是投影). 在线性回归中, 因变量向量 $y \in \mathbb{R}^n$, 解释变量矩阵的列张成子空间 M 。OLS 拟合值 $\hat{y} = X\hat{\beta}$ 是 y 在 M 上的投影。残差 $e = y - \hat{y}$ 与每个解释变量列正交:

$$X'e = 0.$$

这就是正规方程 $X'(y - X\hat{\beta}) = 0$ 的几何含义。

例 21.13 (条件期望作为投影的入口). 若 $Y \in L^2$, 给定信息 $\mathcal{G}$, 条件期望 $\mathbb{E}[Y | \mathcal{G}]$ 可以理解为把 Y 投影到所有 $\mathcal{G}$ -可测平方可积随机变量组成的闭子空间上。残差

$$Y - \mathbb{E}[Y | \mathcal{G}]$$

与所有 $\mathcal{G}$ -可测平方可积变量正交。这为资产定价中的预测误差和鞅差分提供了几何语言。

21.7 连续线性泛函与 Riesz 表示

定义 21.10 (连续对偶空间). 赋范空间 X 上所有连续线性泛函组成的空间称为连续对偶空间, 记为 X^* 。

例 21.14 (价格作为线性泛函). 设 c 是状态依赖现金流, 价格规则 $p(c)$ 若满足

$$p(ac_1 + bc_2) = ap(c_1) + bp(c_2),$$

则它是线性泛函。若还存在常数 M , 使

$$|p(c)| \leq M\|c\|,$$

则价格对现金流的小扰动连续。无套利资产定价会把价格泛函和随机贴现因子联系起来。

定理 21.3 (Riesz 表示, Hilbert 空间入口). 在 Hilbert 空间 H 中, 每个连续线性泛函 ℓ 都可以由某个 $h \in H$ 表示为

$$\ell(x) = \langle x, h \rangle.$$

本章只使用这个定理的几何含义, 完整证明留到更高阶泛函分析。

例 21.15 (有限维 Riesz 表示). 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 任何线性泛函都可写作

$$\ell(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = \langle x, a \rangle$$

其中 $a = (a_1, \dots, a_n)$ 。所以“线性价格规则”可以表示为与某个价格向量取内积。Hilbert 空间的 Riesz 表示是这个事实的无限维版本。

例 21.16 (随机贴现因子作为表示向量). 在 L^2 中, 若价格泛函满足

$$p(X) = \mathbb{E}[MX]$$

其中 $M \in L^2$, 则 M 就是表示价格泛函的元素。金融中称 M 为随机贴现因子或定价核。这个表达式把抽象价格泛函变成可解释的随机变量。

21.8 本章小结

Banach 空间给函数迭代提供完备场所, 线性算子和算子范数让我们讨论经济映射的稳定性, 压缩映射定理解释了许多递归模型的唯一解与迭代收敛。Hilbert 空间加入内积结构, 使正交、投影、最小二乘和条件期望都能用统一几何语言表达。下一章将把这些空间工具用于概率测度、弱收敛和分布型状态变量。

21.9 Exercises

习题 21.1. 定义 Banach 空间。

习题 21.2. 解释完备性在值函数迭代中的作用。

习题 21.3. 说明为什么 $B(S)$ 配备上确界范数是 Banach 空间。

习题 21.4. 说明为什么 $C(K)$ 在上确界范数下适合作为连续值函数空间。

习题 21.5. 给出一个不完备函数空间的例子。

习题 21.6. 定义线性算子。

习题 21.7. 定义有界线性算子。

习题 21.8. 定义算子范数。

习题 21.9. 证明有界线性算子连续。

习题 21.10. 证明在 0 处连续的线性算子有界。

习题 21.11. 设 $T(x) = 2x$ 是 $\mathbb{R}$ 上的算子。计算 $\|T\|_{\text{op}}$ 。

习题 21.12. 设 $T(f) = mf$, 其中 $m \in B(S)$ 。证明 T 是有界线性算子。

习题 21.13. 证明期望泛函 $\varphi(X) = \mathbb{E}X$ 在 L^∞ 上有界。

习题 21.14. 说明算子范数三角不等式。

习题 21.15. 定义压缩映射。

习题 21.16. 陈述 Banach 压缩映射定理。

习题 21.17. 解释 Bellman 算子为何常在 sup norm 下成为压缩映射。

习题 21.18. 若压缩常数为 $\beta = 0.9$, 初始误差为 10, 给出第 n 轮误差上界。

习题 21.19. 定义内积空间。

习题 21.20. 定义 Hilbert 空间。

习题 21.21. 说明 $\mathbb{R}^n$ 如何成为 Hilbert 空间。

习题 21.22. 说明 L^2 中的内积形式。

习题 21.23. 证明 Cauchy-Schwarz 不等式。

习题 21.24. 用 Cauchy-Schwarz 证明相关系数绝对值不超过 1。

习题 21.25. 定义正交。

习题 21.26. 定义投影。

习题 21.27. 推导投影的正规方程。

习题 21.28. 说明普通最小二乘如何解释为投影。

习题 21.29. 解释 OLS 残差与解释变量正交的含义。

习题 21.30. 说明条件期望作为投影的直觉。

习题 21.31. 定义连续对偶空间。

习题 21.32. 解释价格泛函为什么应当线性。

习题 21.33. 陈述 Hilbert 空间 Riesz 表示定理的入口形式。

习题 21.34. 在 $\mathbb{R}^n$ 中表示线性泛函 $\ell(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ 。

习题 21.35. 解释随机贴现因子如何表示资产价格泛函。

21.10 Solutions

本章解答的核心是分清三层结构：Banach 空间提供完备范数，线性算子描述经济映射，Hilbert 空间再加入内积和投影。

解答 21.1. Banach 空间是完备的赋范空间。也就是说，空间中每个关于范数距离的 Cauchy 列都收敛到空间内部的某个元素。

解答 21.2. 值函数迭代产生一系列函数 $V_0, V_1, \dots$ 。若能证明它是 Cauchy 列，完备性保证存在某个函数 V 属于同一空间并作为极限。没有完备性，迭代可能趋向空间外的对象。

解答 21.3. 若 (f_n) 在 $\|\cdot\|_\infty$ 下是 Cauchy 列，则对每个 s , $(f_n(s))$ 是实数 Cauchy 列，因而收敛。定义 $f(s) = \lim_n f_n(s)$ 。上确界 Cauchy 性给出一致控制，推出 f 有界且 $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ 。所以 $B(S)$ 完备。

解答 21.4. 连续值函数常来自连续状态和连续回报。若 $C(K)$ 配备上确界范数，收敛就是一致收敛；连续函数的一致极限仍连续。因此迭代极限仍保留连续性，适合作为连续值函数空间。

解答 21.5. 多项式空间 $P[0, 1]$ 在上确界范数下不完备。多项式列可以一致收敛到非多项式连续函数, 例如 e^x , 而极限不属于多项式空间。

解答 21.6. 线性算子 $T: X \rightarrow Y$ 满足

$$T(ax + bz) = aTx + bTz$$

对所有 x, z 和标量 a, b 成立。

解答 21.7. 有界线性算子是线性算子 $T: X \rightarrow Y$, 并且存在 $M < \infty$, 使得

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$$

对所有 $x \in X$ 成立。

解答 21.8. 算子范数定义为

$$\|T\|_{\text{op}} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y.$$

它衡量 T 最多能把单位球中的向量放大多少。

解答 21.9. 若 $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$, 则

$$\|Tx - Tz\|_Y = \|T(x - z)\|_Y \leq M\|x - z\|_X.$$

这说明 T 是 Lipschitz 连续, 因此连续。

解答 21.10. 若 T 在 0 处连续, 存在 $\delta > 0$, 使 $\|x\| < \delta$ 时 $\|Tx\| < 1$ 。对 $x \neq 0$, 令

$$z = \frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|}.$$

则 $\|z\| < \delta$, 所以 $\|Tz\| < 1$ 。由线性性,

$$\frac{\delta}{2\|x\|} \|Tx\| < 1,$$

故

$$\|Tx\| < \frac{2}{\delta} \|x\|.$$

所以 T 有界。

解答 21.11. 在 $\mathbb{R}$ 上,

$$\|T\|_{\text{op}} = \sup_{|x| \leq 1} |2x| = 2.$$

解答 21.12. 线性性由

$$T(af + bg) = m(af + bg) = amf + bmg = aTf + bTg$$

得到。有界性由

$$\|Tf\|_{\infty} = \sup_s |m(s)f(s)| \leq \|m\|_{\infty} \|f\|_{\infty}$$

得到。

解答 21.13. 对 $X \in L^{\infty}$,

$$|\varphi(X)| = |\mathbb{E}X| \leq \mathbb{E}|X| \leq \|X\|_{\infty}.$$

因此 φ 有界, 且 $\|\varphi\|_{\text{op}} \leq 1$ 。

解答 21.14. 对有界线性算子 T, S , 若 $\|x\| \leq 1$, 则

$$\|(T + S)x\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \leq \|T\|_{\text{op}} + \|S\|_{\text{op}}.$$

对单位球取上确界得到

$$\|T + S\|_{\text{op}} \leq \|T\|_{\text{op}} + \|S\|_{\text{op}}.$$

解答 21.15. 压缩映射是满足

$$\|Tx - Ty\| \leq \beta \|x - y\|, \quad 0 \leq \beta < 1$$

的映射。关键是常数严格小于 1。

解答 21.16. Banach 压缩映射定理说: 若 X 是非空 Banach 空间, $T: X \rightarrow X$ 是压缩映射, 则 T 有唯一不动点, 并且从任意初始点出发的迭代 $x_{n+1} = Tx_n$ 都收敛到该不动点。

解答 21.17. Bellman 算子通常有形式

$$(TV)(s) = \max_a \{u(s, a) + \beta V(g(s, a))\}.$$

两个值函数 V, W 的差只通过未来项进入, 并被贴现因子 $\beta < 1$ 缩小。因此

$$\|TV - TW\|_{\infty} \leq \beta \|V - W\|_{\infty}.$$

解答 21.18. 误差上界按压缩常数几何下降:

$$e_n \leq 0.9^n \cdot 10.$$

这说明误差每轮最多保留上一轮的 90%。

解答 21.19. 内积空间是在向量空间上配备内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 的空间。内积满足线性、对称和正定，并诱导范数

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

解答 21.20. Hilbert 空间是完备的内积空间。也就是内积诱导的范数使该空间成为 Banach 空间。

解答 21.21. $\mathbb{R}^n$ 上定义

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

它诱导欧氏范数。由于 $\mathbb{R}^n$ 在欧氏范数下完备，所以 $\mathbb{R}^n$ 是 Hilbert 空间。

解答 21.22. 在 L^2 中，内积为

$$\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}[XY],$$

对应范数为

$$\|X\|_2 = (\mathbb{E}X^2)^{1/2}.$$

解答 21.23. 若 $y = 0$ 结论显然。若 $y \neq 0$ ，对任意 t ，

$$0 \leq \|x - ty\|^2 = \|x\|^2 - 2t\langle x, y \rangle + t^2\|y\|^2.$$

该二次式对所有 t 非负，判别式不大于零：

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

取平方根得到 Cauchy-Schwarz 不等式。

解答 21.24. 令 $\tilde{X} = X - \mathbb{E}X$ 、 $\tilde{Y} = Y - \mathbb{E}Y$ 。相关系数为

$$\rho = \frac{\mathbb{E}[\tilde{X}\tilde{Y}]}{(\mathbb{E}\tilde{X}^2)^{1/2}(\mathbb{E}\tilde{Y}^2)^{1/2}}.$$

由 Cauchy-Schwarz，

$$|\mathbb{E}[\tilde{X}\tilde{Y}]| \leq (\mathbb{E}\tilde{X}^2)^{1/2}(\mathbb{E}\tilde{Y}^2)^{1/2}.$$

所以 $|\rho| \leq 1$ 。

解答 21.25. 若

$$\langle x, y \rangle = 0,$$

则称 x 与 y 正交，记为 $x \perp y$ 。

解答 21.26. 给定闭线性子空间 M , 若 $m^* \in M$ 使

$$\|x - m^*\| \leq \|x - m\|, \quad \forall m \in M,$$

则 m^* 是 x 在 M 上的投影。

解答 21.27. 设 m^* 最小化 $\|x - m\|^2$, 且 M 由 ϕ_j 张成。令残差 $r = x - m^*$ 。对任意 j , 函数

$$q(t) = \|r - t\phi_j\|^2$$

在 $t = 0$ 处最小。展开得

$$q(t) = \|r\|^2 - 2t\langle r, \phi_j \rangle + t^2\|\phi_j\|^2.$$

一阶条件给出

$$\langle r, \phi_j \rangle = 0.$$

解答 21.28. OLS 中, 解释变量矩阵的列张成一个子空间 M 。拟合值 $\hat{y} = X\hat{\beta}$ 是 y 到 M 的最近点, 即投影。最小化残差平方和就是最小化 $\|y - m\|^2$ 。

解答 21.29. OLS 残差 $e = y - X\hat{\beta}$ 与每个解释变量列正交, 表示解释变量张成的空间已经提取了 y 在该方向上的所有线性可预测部分。剩余误差与这些方向没有线性相关。

解答 21.30. 在 L^2 中, 给定信息 $\mathcal{G}$, $\mathbb{E}[Y | \mathcal{G}]$ 是 Y 在 $\mathcal{G}$ -可测平方可积变量子空间上的投影。残差与所有 $\mathcal{G}$ -可测平方可积变量正交。

解答 21.31. 连续对偶空间 X^* 是赋范空间 X 上所有连续线性泛函组成的空间。

解答 21.32. 若现金流可以组合, 价格规则应满足可加性和齐次性:

$$p(ac_1 + bc_2) = ap(c_1) + bp(c_2).$$

否则同一现金流组合可能有不同价格, 容易产生套利或内部不一致。

解答 21.33. Hilbert 空间中的 Riesz 表示定理入口形式是: 每个连续线性泛函 ℓ 都可由某个 $h \in H$ 表示为

$$\ell(x) = \langle x, h \rangle.$$

解答 21.34. 令 $a = (a_1, \dots, a_n)$, 则

$$\ell(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n = \langle x, a \rangle.$$

这就是有限维 Riesz 表示。

解答 21.35. 若价格泛函可写成

$$p(X) = \mathbb{E}[MX],$$

则随机变量 M 表示该线性泛函。金融中 M 被称为随机贴现因子或定价核, 它把每个状态的现金流转换为当前价格。

21.11 Computation Lab

本章计算实验关注三个对象：算子范数、压缩映射误差和 Hilbert 空间投影。

Lab 1: 有限维算子范数

若算子由矩阵 A 表示，并使用欧氏范数，则

$$\|A\|_{\text{op}} = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|Ax\|_2.$$

数值上可以用单位向量网格近似，也可以用最大奇异值计算。对 Markov 转移矩阵、投入产出矩阵和线性化系统，这个数描述最大放大倍数。

Lab 2: Bellman 压缩诊断

在网格上迭代值函数 $V_{k+1} = TV_k$ ，记录

$$e_k = \|V_{k+1} - V_k\|_{\infty, N}.$$

若理论压缩常数是 β ，通常应观察到

$$e_{k+1} \lesssim \beta e_k.$$

这不是证明，但可作为计算实现的健康检查。

Lab 3: 最小二乘投影

给定矩阵 X 和向量 y ，OLS 解满足

$$X'(y - X\hat{\beta}) = 0.$$

计算后应检查残差 $e = y - X\hat{\beta}$ 是否满足 $X'e$ 接近零。这个检查对应 Hilbert 空间投影的正交条件。

Lab 4: 值函数的基函数投影

用基函数 $\phi_1, \dots, \phi_k$ 近似值函数：

$$V(s) \approx \sum_{j=1}^k a_j \phi_j(s).$$

投影法选择系数 a_j , 使残差与每个基函数近似正交:

$$\langle V - \sum_j a_j \phi_j, \phi_i \rangle \approx 0.$$

这为后续动态规划中的 Galerkin 和最小二乘近似提供入口。

第二十二章 概率测度、弱收敛与分布型 状态变量

22.1 分布也是状态

前面几章把随机变量、效用函数、值函数和线性算子放入统一的分析语言。本章再向前一步：很多经济模型的状态不是一个个体变量，而是一整个分布。例如，异质性主体模型中，资本、收入和资产的横截面分布会影响价格和政策函数；资产定价中，未来状态的概率分布影响当前价格；Markov 模型中，今天的分布经过转移规则变成明天的分布。

本章主线是：

概率测度 $\longrightarrow$ 弱收敛 $\longrightarrow$ 分布距离 $\longrightarrow$ 经验分布 $\longrightarrow$ 分布动态。

22.2 概率测度空间

定义 22.1 (概率测度空间). 给定可测空间 $(S, \mathcal{S})$ ，记

$$\mathcal{P}(S) = \{\mu : \mu \text{ 是 } (S, \mathcal{S}) \text{ 上的概率测度}\}.$$

$\mathcal{P}(S)$ 的元素不是点，而是分布。

若 S 是个体资产水平集合，则 $\mu \in \mathcal{P}(S)$ 描述经济中个体资产的横截面分布。若 S 是未来状态集合，则 μ 描述不确定性的概率权重。

例 22.1 (有限状态上的概率测度). 设 $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ 。任意概率测度 $\mu \in \mathcal{P}(S)$ 可以写成向量

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3), \quad \mu_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^3 \mu_i = 1.$$

例如 $(0.2, 0.5, 0.3)$ 表示状态 s_2 的概率最高。在有限状态模型中，概率测度空间就是单纯形。

例 22.2 (资产分布作为概率测度). 设 $S = [0, \infty)$ 表示家庭资产。若 $\mu([0, 1]) = 0.4$, 表示 40% 家庭资产不超过 1。若 $\mu([10, \infty)) = 0.1$, 表示 10% 家庭资产至少为 10。这里 μ 不是某个家庭的状态, 而是整个经济的横截面状态。

22.3 推前测度

定义 22.2 (推前测度). 设 $T : S \rightarrow R$ 是可测映射, $\mu \in \mathcal{P}(S)$ 。定义 R 上的测度 $T_{\#}\mu$ 为

$$(T_{\#}\mu)(A) = \mu(T^{-1}(A)).$$

称 $T_{\#}\mu$ 是 μ 在 T 下的推前测度。

命题 22.1 (推前保持概率测度). 若 $\mu \in \mathcal{P}(S)$, 且 $T : S \rightarrow R$ 可测, 则 $T_{\#}\mu \in \mathcal{P}(R)$ 。

证明. 因为 $T^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, 所以 $(T_{\#}\mu)(\emptyset) = 0$ 。若 (A_n) 两两不交, 则 $T^{-1}(A_n)$ 也两两不交, 故

$$(T_{\#}\mu)\left(\bigcup_n A_n\right) = \mu\left(T^{-1}\left(\bigcup_n A_n\right)\right) = \sum_n \mu(T^{-1}(A_n)).$$

最后,

$$(T_{\#}\mu)(R) = \mu(T^{-1}(R)) = \mu(S) = 1.$$

所以 $T_{\#}\mu$ 是概率测度。 □

例 22.3 (随机变量的分布是推前测度). 若随机变量 $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, 则 X 的分布为

$$\mathbb{P}_X = X_{\#}\mathbb{P}.$$

对任意 Borel 集 A ,

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A).$$

这把 Ch17 的“随机变量分布”统一到推前测度语言中。

例 22.4 (政策函数推动资产分布). 设家庭资产今天为 a , 政策函数给出明天资产

$$a' = g(a).$$

如果今天资产分布为 μ , 则明天资产分布为

$$g_{\#}\mu.$$

例如 $g(a) = 0.9a + 1$ 会把所有家庭资产向 1 附近拉动, 并按映射 g 改变整个分布。

22.4 弱收敛

定义 22.3 (有界连续测试函数). 设 S 是度量空间。记 $C_b(S)$ 为 S 上所有有界连续实值函数的集合。

定义 22.4 (弱收敛). 概率测度列 (μ_n) 弱收敛到 μ , 记为

$$\mu_n \Rightarrow \mu,$$

如果对任意 $f \in C_b(S)$, 都有

$$\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu.$$

弱收敛说的是: 所有有界连续观察指标的平均值都收敛。它比“每个集合的概率都收敛”更弱, 也更适合连续状态, 因为集合边界附近的微小移动不应造成不连续判断。

例 22.5 (点质量弱收敛). 令 $\mu_n = \delta_{1/n}$, $\mu = \delta_0$ 。对任意 $f \in C_b(\mathbb{R})$,

$$\int f d\mu_n = f(1/n) \rightarrow f(0) = \int f d\mu.$$

因此

$$\delta_{1/n} \Rightarrow \delta_0.$$

虽然每个测度都把全部质量放在不同点上, 但这些点趋近于 0, 所以从连续测试函数角度看, 分布收敛。

例 22.6 (弱收敛不要求单点概率收敛到同一集合值). 仍令 $\mu_n = \delta_{1/n}$, $\mu = \delta_0$ 。集合 $A = \{0\}$ 上,

$$\mu_n(A) = 0, \quad \mu(A) = 1.$$

所以弱收敛不意味着每个集合的概率都收敛。问题出在 A 的边界含有极限质量点, 指标函数 $\mathbf{1}_A$ 不是连续测试函数。

例 22.7 (有限状态下弱收敛就是坐标收敛). 若 $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ 配备离散拓扑, 则每个函数都是连续有界函数。概率测度 μ_n 弱收敛到 μ , 等价于

$$\mu_n(\{s_i\}) \rightarrow \mu(\{s_i\}), \quad i = 1, \dots, k.$$

所以在有限状态 Markov 模型中, 分布收敛就是概率向量逐坐标收敛。

命题 22.2 (有限状态弱收敛判据). 在有限状态空间 $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ 上,

$$\mu_n \Rightarrow \mu$$

当且仅当对每个 i ,

$$\mu_n(\{s_i\}) \rightarrow \mu(\{s_i\}).$$

证明. 若弱收敛成立, 由于 $\mathbf{1}_{\{s_i\}}$ 在有限离散空间上连续有界, 得

$$\mu_n(\{s_i\}) = \int \mathbf{1}_{\{s_i\}} d\mu_n \rightarrow \int \mathbf{1}_{\{s_i\}} d\mu = \mu(\{s_i\}).$$

反过来, 任意函数 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ 都可写为

$$\int f d\mu_n = \sum_{i=1}^k f(s_i) \mu_n(\{s_i\}).$$

坐标概率收敛推出右边收敛到 $\sum_i f(s_i) \mu(\{s_i\})$, 即弱收敛。 □

22.5 实线上的分布函数判据

定义 22.5 (分布函数). 实线上概率测度 μ 的分布函数定义为

$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]).$$

定理 22.1 (实线上的弱收敛判据). 设 $\mu_n, \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 。则

$$\mu_n \Rightarrow \mu$$

当且仅当在 F_μ 的每个连续点 x 上,

$$F_{\mu_n}(x) \rightarrow F_\mu(x).$$

本章不证明完整定理。直觉是: 实线上的分布函数记录了所有左侧区间的概率, 而连续点排除了极限测度在边界点上放置质量造成的跳跃问题。

例 22.8 (常数列的分布函数收敛). 令 $\mu_n = \delta_{1/n}$, $\mu = \delta_0$ 。对 $x < 0$, $F_{\mu_n}(x) = 0$ 且 $F_\mu(x) = 0$ 。对 $x > 0$, 当 n 足够大时 $1/n \leq x$, 所以 $F_{\mu_n}(x) = 1 = F_\mu(x)$ 。在 $x = 0$ 处, F_μ 跳跃, 不要求收敛。因此 $\mu_n \Rightarrow \mu$ 。

例 22.9 (质量逃向无穷远不弱收敛到概率测度). 令 $\mu_n = \delta_n$ 。对任意固定 x , 当 $n > x$ 时

$$F_{\mu_n}(x) = 0.$$

如果存在弱极限 μ , 则应有 $F_\mu(x) = 0$ 在所有连续点成立。这意味着 μ 在任意有限区间左侧都没有质量, 无法成为 $\mathbb{R}$ 上概率测度。概率质量逃向无穷远, 所以没有弱收敛到某个概率测度。

22.6 紧性

定义 22.6 (紧性). 概率测度族 $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(S)$ 称为紧的, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset S$, 使得对所有 $\mu \in \mathcal{M}$,

$$\mu(K) \geq 1 - \varepsilon.$$

紧性表达“质量不逃向无穷远”。在实线上, 它通常对应尾部概率可以被统一控制。

例 22.10 (有统一有界支撑的测度族是紧的). 若所有 $\mu \in \mathcal{M}$ 都满足

$$\mu([-M, M]) = 1$$

对同一个 M 成立, 则 $\mathcal{M}$ 紧。因为给定任意 $\varepsilon > 0$, 取紧集 $K = [-M, M]$, 有 $\mu(K) = 1 \geq 1 - \varepsilon$ 。

例 22.11 (逃向无穷远违反紧性). 族 $\{\delta_n : n \geq 1\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上不紧。任意紧集 $K \subset \mathbb{R}$ 都有上界, 存在 n 足够大使 $n \notin K$, 于是

$$\delta_n(K) = 0.$$

无法用同一个紧集捕捉所有测度的大部分质量。

22.7 分布距离

定义 22.7 (总变差距离). 两个概率测度 μ, ν 的总变差距离定义为

$$d_{\text{TV}}(\mu, \nu) = \sup_A |\mu(A) - \nu(A)|.$$

命题 22.3 (总变差控制有界测试函数误差). 若 $|f| \leq M$, 则

$$\left| \int f d\mu - \int f d\nu \right| \leq 2M d_{\text{TV}}(\mu, \nu).$$

证明. 令 $\lambda = \mu - \nu$ 为符号测度。总变差距离控制集合概率差。对简单函数先由分层集合表示得到积分差界, 再由有界可测函数的简单函数逼近得到结论。有限状态下更直接: 若 S 有限, 则

$$\left| \sum_s f(s)(\mu_s - \nu_s) \right| \leq M \sum_s |\mu_s - \nu_s| = 2M d_{\text{TV}}(\mu, \nu).$$

□

例 22.12 (有限状态的总变差距离). 设

$$\mu = (0.2, 0.5, 0.3), \quad \nu = (0.1, 0.7, 0.2).$$

有限状态下

$$d_{\text{TV}}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_i |\mu_i - \nu_i| = \frac{1}{2}(0.1 + 0.2 + 0.1) = 0.2.$$

这表示两个分布在最能区分它们的事件上, 概率差最大为 0.2。

定义 22.8 (Wasserstein-1 距离入口). 在实线上, 若 μ, ν 有有限一阶矩, Wasserstein-1 距离可直观理解为把 μ 的质量搬运成 ν 所需的最小平均距离, 记为

$$W_1(\mu, \nu).$$

例 22.13 (两个点质量的 Wasserstein 距离). 在 $\mathbb{R}$ 上,

$$W_1(\delta_a, \delta_b) = |a - b|.$$

例如 $\delta_{1/n}$ 到 δ_0 的 W_1 距离为 $1/n$, 趋于 0。这和弱收敛一致, 并额外量化了质量移动距离。

22.8 经验分布

定义 22.9 (经验分布). 给定样本或模拟个体状态 $x_1, \dots, x_N \in S$, 经验分布定义为

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}.$$

命题 22.4 (经验分布的积分是样本平均). 对任意函数 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$, 只要右边有意义,

$$\int f d\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i).$$

证明. 由经验分布定义和积分对测度的线性性,

$$\int f d\hat{\mu}_N = \int f d\left(\frac{1}{N} \sum_i \delta_{x_i}\right) = \frac{1}{N} \sum_i \int f d\delta_{x_i} = \frac{1}{N} \sum_i f(x_i).$$

□

例 22.14 (经验资产分布). 有 5 个家庭资产为

$$0, \quad 1, \quad 1, \quad 3, \quad 5.$$

经验分布为

$$\hat{\mu}_5 = \frac{1}{5}\delta_0 + \frac{2}{5}\delta_1 + \frac{1}{5}\delta_3 + \frac{1}{5}\delta_5.$$

平均资产可写为

$$\int a d\hat{\mu}_5(a) = \frac{0 + 1 + 1 + 3 + 5}{5} = 2.$$

例 22.15 (用经验分布近似横截面状态). 在异质性主体模拟中, 模型真实状态可能是连续资产分布 μ . 计算机中常用 N 个模拟个体的经验分布 $\hat{\mu}_N$ 近似 μ . 价格、总资本和政策规则都可以写成对 $\hat{\mu}_N$ 的函数. 例如总资本近似为

$$K_N = \int a d\hat{\mu}_N(a).$$

22.9 Markov 核与分布演化

定义 22.10 (Markov 核). 从 S 到 S 的 Markov 核是函数 $Q: S \times \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$, 使得对每个 s , $Q(s, \cdot)$ 是概率测度; 对每个 $A \in \mathcal{S}$, $Q(\cdot, A)$ 是可测函数。

定义 22.11 (分布更新). 给定 $\mu \in \mathcal{P}(S)$ 和 Markov 核 Q , 定义

$$(\mu Q)(A) = \int Q(s, A) d\mu(s).$$

命题 22.5 (Markov 核推动概率测度). 若 $\mu \in \mathcal{P}(S)$, 则 $\mu Q \in \mathcal{P}(S)$ 。

证明. 非负性来自 $Q(s, A) \geq 0$. 有

$$(\mu Q)(S) = \int Q(s, S) d\mu(s) = \int 1 d\mu = 1.$$

若 (A_n) 两两不交, 则对每个 s ,

$$Q\left(s, \bigcup_n A_n\right) = \sum_n Q(s, A_n).$$

由非负函数的单调收敛定理,

$$(\mu Q)\left(\bigcup_n A_n\right) = \int \sum_n Q(s, A_n) d\mu(s) = \sum_n \int Q(s, A_n) d\mu(s).$$

所以 μQ 是概率测度。 □

例 22.16 (有限状态 Markov 链的分布更新). 设状态 $S = \{1, 2\}$, 转移矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

若今天分布是 $\mu = (0.5, 0.5)$, 则明天分布为

$$\mu Q = (0.5 \cdot 0.9 + 0.5 \cdot 0.4, 0.5 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 0.6) = (0.65, 0.35).$$

这就是分布动态的最简单形式。

例 22.17 (个体政策和冲击共同推动分布). 设个体状态为资产 a , 明天资产由

$$a' = g(a, \varepsilon)$$

决定, 其中 ε 是冲击。给定 a , a' 的条件分布定义 Markov 核

$$Q(a, A) = \mathbb{P}(g(a, \varepsilon) \in A).$$

若今天资产分布为 μ , 明天分布就是 μQ 。这正是异质性主体模型里“分布状态转移”的核心结构。

22.10 分布型状态变量

在递归经济中, 状态变量通常写成 s 。若经济包含大量异质个体, 单个代表性状态不够, 状态可能变成

$$(z, \mu),$$

其中 z 是 aggregate shock, μ 是个体状态的横截面分布。均衡对象可能包括价格函数

$$p = p(z, \mu),$$

政策函数

$$g = g(a, z, \mu),$$

以及分布更新

$$\mu' = \Phi(z, \mu).$$

例 22.18 (总资本是分布的函数). 若 μ 是资产分布, 总资本为

$$K(\mu) = \int a d\mu(a).$$

两个分布可能有相同平均资本但不同不平等程度; 若模型价格只依赖总资本, 状态可压缩为 K 。若借贷约束或异质风险重要, 整个 μ 可能都影响均衡。

例 22.19 (分布状态下的递归映射). 设 aggregate state 为 z , 横截面分布为 μ . 给定价格规则和个体政策, 下一期分布可写成

$$\mu' = \Phi(z, \mu).$$

递归均衡要求个体政策最优、价格市场出清, 并且 Φ 与个体决策诱导的实际分布转移一致。数学上, 这把均衡问题从有限维不动点推进到分布空间上的不动点或递归系统。

22.11 本章小结

概率测度可以作为经济状态。推前测度描述确定映射如何推动分布, Markov 核描述随机转移如何推动分布。弱收敛用有界连续测试函数比较分布, 是连续状态模型中最常用的收敛语言之一。总变差和 Wasserstein 距离提供不同强度的分布距离。经验分布把模拟个体转化为可计算的概率测度。下一章将处理可测对应、选择和无限商品经济, 为分布状态下的可测政策和均衡构造继续铺路。

22.12 Exercises

习题 22.1. 定义 $\mathcal{P}(S)$ 。

习题 22.2. 在有限状态 $S = \{1, 2, 3\}$ 上, 说明概率测度如何表示为向量。

习题 22.3. 解释为什么横截面资产分布可以看作概率测度。

习题 22.4. 定义推前测度。

习题 22.5. 证明推前测度保持概率测度。

习题 22.6. 说明随机变量的分布如何表示为推前测度。

习题 22.7. 若 $g(a) = 2a$, 且 $\mu = \delta_3$, 求 $g_{\#}\mu$ 。

习题 22.8. 定义 $C_b(S)$ 。

习题 22.9. 定义弱收敛 $\mu_n \Rightarrow \mu$ 。

习题 22.10. 证明 $\delta_{1/n} \Rightarrow \delta_0$ 。

习题 22.11. 说明弱收敛为什么不要求每个集合的概率都收敛。

习题 22.12. 证明有限状态空间中弱收敛等价于坐标概率收敛。

习题 22.13. 定义实线上概率测度的分布函数。

习题 22.14. 陈述实线上弱收敛的分布函数判据。

习题 22.15. 用分布函数解释 $\delta_{1/n} \Rightarrow \delta_0$ 。

习题 22.16. 解释为什么 δ_n 不弱收敛到 $\mathbb{R}$ 上的概率测度。

习题 22.17. 定义紧性。

习题 22.18. 证明有共同紧支撑的概率测度族是紧的。

习题 22.19. 说明 $\{\delta_n : n \geq 1\}$ 不紧。

习题 22.20. 定义总变差距离。

习题 22.21. 在有限状态下计算 $\mu = (0.4, 0.6)$ 、 $\nu = (0.7, 0.3)$ 的总变差距离。

习题 22.22. 说明总变差距离如何控制有界函数积分误差。

习题 22.23. 给出 $W_1(\delta_a, \delta_b)$ 。

习题 22.24. 比较总变差距离和 Wasserstein 距离的直觉差异。

习题 22.25. 定义经验分布。

习题 22.26. 证明经验分布下的积分等于样本平均。

习题 22.27. 样本为 1, 2, 2, 5。写出经验分布并计算样本平均。

习题 22.28. 解释经验分布如何用于模拟异质性主体模型。

习题 22.29. 定义 Markov 核。

习题 22.30. 定义 μQ 。

习题 22.31. 证明 Markov 核把概率测度映为概率测度。

习题 22.32. 给定

$$Q = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}, \quad \mu = (0.25, 0.75),$$

计算 μQ 。

习题 22.33. 解释个体政策和冲击如何诱导 Markov 核。

习题 22.34. 说明分布型状态变量 (z, μ) 的经济含义。

习题 22.35. 用一句话说明本章如何为递归竞争均衡做准备。

22.13 Solutions

本章解答的核心是：把分布当作对象，比较分布的收敛，并理解分布如何在经济模型中更新时间更新。

解答 22.1. $\mathcal{P}(S)$ 表示可测空间 S 上所有概率测度组成的集合：

$$\mathcal{P}(S) = \{\mu : \mu(S) = 1, \mu \text{ 是测度}\}.$$

解答 22.2. 在 $S = \{1, 2, 3\}$ 上，概率测度可表示为向量

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3),$$

其中 $\mu_i = \mu(\{i\})$ ，并满足 $\mu_i \geq 0$ 、 $\sum_i \mu_i = 1$ 。

解答 22.3. 横截面资产分布给出任意资产集合中家庭的比例。例如 $\mu([0, 1]) = 0.4$ 表示 40% 家庭资产在 $[0, 1]$ 。这种“集合到比例”的规则正是概率测度。

解答 22.4. 若 $T : S \rightarrow R$ 可测， $\mu \in \mathcal{P}(S)$ ，推前测度 $T_{\#}\mu$ 定义为

$$(T_{\#}\mu)(A) = \mu(T^{-1}(A)).$$

解答 22.5. 有

$$(T_{\#}\mu)(R) = \mu(T^{-1}(R)) = \mu(S) = 1.$$

若 A_n 两两不交，则 $T^{-1}(A_n)$ 两两不交，且

$$T^{-1}\left(\bigcup_n A_n\right) = \bigcup_n T^{-1}(A_n).$$

由 μ 的可列可加性， $T_{\#}\mu$ 也是概率测度。

解答 22.6. 随机变量 $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 的分布是

$$\mathbb{P}_X = X_{\#}\mathbb{P}.$$

也就是对任意 Borel 集 A ，

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A).$$

解答 22.7. 若 $\mu = \delta_3$ ，且 $g(a) = 2a$ ，则全部质量从 3 被映到 6。因此

$$g_{\#}\mu = \delta_6.$$

解答 22.8. $C_b(S)$ 是 S 上所有有界连续实值函数的集合。它们是弱收敛中用来观察概率测度的测试函数。

解答 22.9. $\mu_n \Rightarrow \mu$ 是指对任意 $f \in C_b(S)$,

$$\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu.$$

解答 22.10. 对任意 $f \in C_b(\mathbb{R})$,

$$\int f d\delta_{1/n} = f(1/n).$$

由于 f 连续,

$$f(1/n) \rightarrow f(0) = \int f d\delta_0.$$

所以 $\delta_{1/n} \Rightarrow \delta_0$ 。

解答 22.11. 弱收敛只检查有界连续函数的积分, 不检查所有集合指标函数。例子中 $\delta_{1/n} \Rightarrow \delta_0$, 但对集合 $\{0\}$, 有 $\delta_{1/n}(\{0\}) = 0$ 、 $\delta_0(\{0\}) = 1$ 。指标函数在边界处不连续。

解答 22.12. 若弱收敛成立, 取测试函数 $\mathbf{1}_{\{s_i\}}$, 有限离散空间中它连续有界, 得坐标概率收敛。反过来, 任意 f 都满足

$$\int f d\mu_n = \sum_i f(s_i) \mu_n(\{s_i\}),$$

坐标概率收敛推出积分收敛。因此二者等价。

解答 22.13. 实线上概率测度 μ 的分布函数为

$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]).$$

解答 22.14. 实线上, $\mu_n \Rightarrow \mu$ 当且仅当在 F_μ 的每个连续点 x 上,

$$F_{\mu_n}(x) \rightarrow F_\mu(x).$$

解答 22.15. 对 $\mu_n = \delta_{1/n}$ 、 $\mu = \delta_0$, 若 $x < 0$, 两边分布函数都为 0。若 $x > 0$, 当 n 足够大时 $1/n \leq x$, 两边都为 1。唯一不连续点是 0, 判据不要求在那里收敛。因此弱收敛成立。

解答 22.16. δ_n 的质量不断向右移动。对任意固定 x , 当 $n > x$ 时 $F_{\delta_n}(x) = 0$ 。若有概率测度弱极限 μ , 则会迫使 $F_\mu(x) = 0$ 在所有连续点成立, 无法累计到总质量 1。所以没有概率测度作为弱极限。

解答 22.17. 概率测度族 $\mathcal{M}$ 紧, 是指对任意 $\varepsilon > 0$, 存在紧集 K , 使对所有 $\mu \in \mathcal{M}$,

$$\mu(K) \geq 1 - \varepsilon.$$

解答 22.18. 若存在同一个紧集 K , 使所有 $\mu \in \mathcal{M}$ 都满足 $\mu(K) = 1$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 同一个 K 都给出

$$\mu(K) = 1 \geq 1 - \varepsilon.$$

所以该族紧。

解答 22.19. 任意紧集 $K \subset \mathbb{R}$ 有界。取 n 大到 $n \notin K$, 则

$$\delta_n(K) = 0.$$

因此无法用一个紧集统一捕捉所有 δ_n 的大部分质量, 该族不紧。

解答 22.20. 总变差距离定义为

$$d_{\text{TV}}(\mu, \nu) = \sup_A |\mu(A) - \nu(A)|.$$

解答 22.21. 有限状态下

$$d_{\text{TV}}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_i |\mu_i - \nu_i|.$$

所以

$$d_{\text{TV}}(\mu, \nu) = \frac{1}{2}(|0.4 - 0.7| + |0.6 - 0.3|) = 0.3.$$

解答 22.22. 若 $|f| \leq M$, 则

$$\left| \int f d\mu - \int f d\nu \right| \leq 2M d_{\text{TV}}(\mu, \nu).$$

所以总变差距离小意味着所有有界函数的期望差都小。

解答 22.23. 在实线上, 两个点质量之间的 Wasserstein-1 距离为

$$W_1(\delta_a, \delta_b) = |a - b|.$$

解答 22.24. 总变差距离关心两个分布能在事件概率上被区分多少, 位置很近但不同的点质量仍可距离很大。Wasserstein 距离关心搬运质量的距离, 因此能反映两个点质量位置很接近这一事实。

解答 22.25. 给定样本 $x_1, \dots, x_N$, 经验分布为

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}.$$

解答 22.26. 由积分线性性,

$$\int f d\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_i \int f d\delta_{x_i} = \frac{1}{N} \sum_i f(x_i).$$

解答 22.27. 样本 1, 2, 2, 5 的经验分布为

$$\hat{\mu}_4 = \frac{1}{4}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_2 + \frac{1}{4}\delta_5.$$

样本平均为

$$\int x d\hat{\mu}_4(x) = \frac{1+2+2+5}{4} = 2.5.$$

解答 22.28. 模拟中用有限个体状态 x_i 构造经验分布 $\hat{\mu}_N$, 以此近似真实横截面分布 μ 。总资本、财富份额和价格函数都可用 $\hat{\mu}_N$ 的积分或函数值近似。

解答 22.29. Markov 核 $Q: S \times \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$ 满足: 对每个 s , $Q(s, \cdot)$ 是概率测度; 对每个 A , $Q(\cdot, A)$ 可测。

解答 22.30. 给定 $\mu \in \mathcal{P}(S)$, 分布更新定义为

$$(\mu Q)(A) = \int Q(s, A) d\mu(s).$$

解答 22.31. 有

$$(\mu Q)(S) = \int Q(s, S) d\mu(s) = 1.$$

对两两不交的 A_n , 由每个 $Q(s, \cdot)$ 的可列可加性和单调收敛定理,

$$(\mu Q)(\cup_n A_n) = \sum_n (\mu Q)(A_n).$$

所以 μQ 是概率测度。

解答 22.32. 计算

$$\mu Q = (0.25, 0.75) \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

第一坐标为

$$0.25 \cdot 0.8 + 0.75 \cdot 0.3 = 0.425,$$

第二坐标为

$$0.25 \cdot 0.2 + 0.75 \cdot 0.7 = 0.575.$$

所以 $\mu Q = (0.425, 0.575)$ 。

解答 22.33. 若明天状态由 $s' = g(s, \varepsilon)$ 给出, 且冲击 ε 随机, 则给定今天状态 s , 明天状态落入集合 A 的概率

$$Q(s, A) = \mathbb{P}(g(s, \varepsilon) \in A)$$

定义了 Markov 核。

解答 22.34. (z, μ) 中, z 是 aggregate shock 或总量状态, μ 是个体状态的横截面分布。它表示经济既受总体冲击影响, 也受财富、收入或资产分布影响。

解答 22.35. 本章把横截面分布写成概率测度, 并给出分布转移 $\mu' = \mu Q$ 或 $\mu' = \Phi(z, \mu)$ 的语言, 为递归竞争均衡中的分布状态和均衡不动点做准备。

22.14 Computation Lab

本章计算实验围绕“如何在计算机中表示和更新分布”展开。

Lab 1: 经验分布与样本平均

给定模拟样本 $x_1, \dots, x_N$, 经验分布为

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_i \delta_{x_i}.$$

任意统计量若可写成 $\int f d\mu$, 在经验分布下就近似为

$$\frac{1}{N} \sum_i f(x_i).$$

例如平均资产、贫困率和高资产份额都可这样计算。

Lab 2: 有限状态分布迭代

给定转移矩阵 Q 和初始分布向量 μ_0 , 迭代

$$\mu_{t+1} = \mu_t Q.$$

记录 $\|\mu_{t+1} - \mu_t\|_1$ 或总变差距离, 可观察分布是否接近稳定分布。

Lab 3: 弱收敛的测试函数诊断

选取若干有界连续测试函数 $f_1, \dots, f_k$, 比较

$$\int f_j d\mu_n \quad \text{和} \quad \int f_j d\mu.$$

这不能替代完整证明, 但可作为模拟分布是否接近目标分布的诊断。

Lab 4: 总变差与 Wasserstein 直觉

在网格上，总变差距离可用

$$\frac{1}{2} \sum_i |\mu_i - \nu_i|$$

计算。若网格有自然顺序，还可近似一维 Wasserstein 距离。总变差适合比较事件概率差，Wasserstein 更适合比较质量移动距离。

第二十三章 可测对应、选择与无限商品经济

23.1 为什么可测选择会出现

在有限维静态模型中，约束集合通常写成 $B(p, w)$ ，选择是一个点 x 。进入随机和连续状态模型后，可行集依赖状态：

$$a \in A(s), \quad x \in B(s, p), \quad c \in \Gamma(\omega).$$

如果每个状态下都有可行选择，还不够。要形成政策函数或配置函数，我们需要把每个状态的选择拼成一个可测函数。否则，期望效用、积分预算和动态规划右端都无法良好定义。

本章主线是：

对应 $\longrightarrow$ 可测图 $\longrightarrow$ 可测选择 $\longrightarrow$ 可测最优政策 $\longrightarrow$ 无限商品经济。

23.2 对应、图与选择

定义 23.1 (对应). 从集合 S 到集合 X 的对应记为

$$\Gamma : S \rightrightarrows X,$$

它给每个 $s \in S$ 指派一个子集 $\Gamma(s) \subset X$ 。

定义 23.2 (图). 对应 $\Gamma : S \rightrightarrows X$ 的图定义为

$$\text{Gr}(\Gamma) = \{(s, x) \in S \times X : x \in \Gamma(s)\}.$$

定义 23.3 (选择). 函数 $g : S \rightarrow X$ 称为 Γ 的选择，如果对所有 $s \in S$,

$$g(s) \in \Gamma(s).$$

例 23.1 (状态依赖行动集). 设状态 $s \in [0, 1]$, 行动集合为

$$A(s) = [0, s].$$

这就是对应 $A : [0, 1] \rightrightarrows \mathbb{R}$. 函数 $g(s) = s/2$ 是一个选择, 因为

$$0 \leq s/2 \leq s.$$

函数 $h(s) = s + 1$ 不是选择, 因为它不属于 $[0, s]$. 在动态模型中, 政策函数必须是行动对应的选择。

例 23.2 (预算集作为对应). 给定状态 s 、价格 $p(s)$ 和财富 $w(s)$, 预算集可写成

$$B(s) = \{x \in \mathbb{R}_+^L : p(s) \cdot x \leq w(s)\}.$$

于是 $B : S \rightrightarrows \mathbb{R}_+^L$ 是状态依赖预算对应。消费规则 $x(s)$ 只有同时满足可测性和 $x(s) \in B(s)$, 才是可实施的随机消费计划。

23.3 可测对应

定义 23.4 (可测图对应). 设 $(S, \mathcal{S})$ 是可测空间, X 是度量空间。若

$$\text{Gr}(\Gamma) \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{B}(X),$$

则称 $\Gamma : S \rightrightarrows X$ 有可测图。

定义 23.5 (弱可测对应, 入口形式). 若对每个开集 $O \subset X$, 集合

$$\{s \in S : \Gamma(s) \cap O \neq \emptyset\}$$

属于 $\mathcal{S}$, 则称 Γ 是弱可测的。

在许多常见的良好空间中, 闭值对应的可测图条件和弱可测条件可以互相转换。本书初版使用这两个条件作为可测选择的工作语言, 不进入完整技术细节。

例 23.3 (有限状态下可测性自动简化). 若 $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, 并使用所有子集组成的 sigma 代数, 则任意对应 $\Gamma : S \rightrightarrows X$ 的状态截面都是可测的。若 X 也是有限集合, 则图就是有限集合的子集, 必然可测。因此有限状态动态规划很少显式讨论可测选择问题。

例 23.4 (由不等式定义的可测图). 设

$$\Gamma(s) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq s\}, \quad s \in [0, 1].$$

其图为

$$\{(s, x) : 0 \leq x \leq s\}.$$

这是 $[0, 1] \times \mathbb{R}$ 中的闭集, 因此是 Borel 集。于是 Γ 有可测图。许多经济约束由连续不等式定义, 因此自然产生可测图。

命题 23.1 (可测函数诱导可测单值对应). 若 $g : S \rightarrow X$ 可测, 定义

$$\Gamma(s) = \{g(s)\}.$$

在常见 Borel 度量空间中, Γ 是可测对应。

证明. 对任意开集 $O \subset X$,

$$\{s : \Gamma(s) \cap O \neq \emptyset\} = \{s : g(s) \in O\} = g^{-1}(O).$$

因为 g 可测, 右边属于 S 。所以 Γ 弱可测。 □

23.4 可测选择

定义 23.6 (可测选择). 若 $g : S \rightarrow X$ 是可测函数, 并且对所有 s ,

$$g(s) \in \Gamma(s),$$

则称 g 是 Γ 的可测选择。

定理 23.1 (可测选择定理, 入口版本). 设 S 是可测空间, X 是合适的度量空间。若 $\Gamma : S \rightrightarrows X$ 非空闭值, 并满足适当可测性条件, 则存在可测选择 g , 使

$$g(s) \in \Gamma(s).$$

本章只使用该定理的工作含义, 完整条件和证明留给高级分析。

例 23.5 (最小元素选择). 设 $\Gamma(s) = [0, s]$, $s \in [0, 1]$ 。选择

$$g(s) = 0$$

和

$$h(s) = s$$

都是可测选择。这个例子简单, 但揭示了选择定理的作用: 从每个状态的一组可行行动中, 挑出一个随状态可测变化的行动规则。

例 23.6 (逐状态存在不等于可测可实施). 假设每个状态 s 下集合 $\Gamma(s)$ 都非空。逐状态看, 选择一个 $x_s \in \Gamma(s)$ 似乎没有问题。但若拼出的函数 $s \mapsto x_s$ 不可测, 则不能计算

$$\int u(s, x_s) d\mu(s).$$

因此随机经济中, “存在选择” 和 “存在可测选择” 是不同要求。

命题 23.2 (有限选择集的可测选择). 设 $X = \{x_1, \dots, x_m\}$, $\Gamma(s) \subset X$ 非空。若每个集合

$$E_j = \{s : x_j \in \Gamma(s)\}$$

可测, 则 Γ 有可测选择。

证明. 用最小编号打破平局。定义

$$g(s) = x_j$$

其中 j 是满足 $x_j \in \Gamma(s)$ 的最小编号。则

$$\{s : g(s) = x_j\} = E_j \cap E_1^c \cap \dots \cap E_{j-1}^c.$$

右边可测, 所以 g 可测。由定义 $g(s) \in \Gamma(s)$ 。 □

23.5 可测最大化

定义 23.7 (最大化对应). 给定目标函数 $f : S \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 和约束对应 $\Gamma : S \rightrightarrows X$, 最大化对应定义为

$$M(s) = \arg \max_{x \in \Gamma(s)} f(s, x).$$

命题 23.3 (有限选择集的可测最大化). 设 $X = \{x_1, \dots, x_m\}$, $\Gamma(s) \subset X$ 非空, 且 $E_j = \{s : x_j \in \Gamma(s)\}$ 可测。若 $f(s, x_j)$ 对每个 j 都可测, 则存在可测最优选择。

证明. 对每个 s , 只在可行的 x_j 中比较 $f(s, x_j)$ 。用最小编号打破并列最优。事件 “ x_j 是按此规则选出的最优点” 可由有限多个可测不等式

$$f(s, x_j) \geq f(s, x_k)$$

以及可行性事件 E_j 和 E_k 的交并补表示。因此该事件可测。把这些事件拼成函数 $g(s)$, 得到可测最优选择。 □

例 23.7 (有限行动动态规划中的可测政策). 设状态 s 连续, 行动集合有限 $A = \{0, 1\}$. 若行动 a 的回报

$$r(s, a) + \beta V(g(s, a))$$

对 s 可测, 则最优行动

$$a^*(s) \in \arg \max_{a \in A} \{r(s, a) + \beta V(g(s, a))\}$$

可以用“并列时选 0”的规则变成可测函数。这就是有限行动 Markov 决策中政策函数可测性的基本来源。

例 23.8 (连续行动下的最大化对应). 设

$$A(s) = [0, s], \quad f(s, a) = -(a - s/2)^2.$$

对每个 s , 唯一最优行动为

$$a^*(s) = s/2.$$

该函数连续, 因此可测。这里最优对应是单值的; 更一般地, 最优集合可能多值, 需要可测选择定理从中挑选一个可测最优政策。

例 23.9 (并列最优与 tie-breaking). 令 $A = \{0, 1\}$, 且 $f(s, 0) = f(s, 1)$ 对所有 s 。最大化对应为

$$M(s) = \{0, 1\}.$$

若规定并列时选择 0, 则 $g(s) = 0$ 是可测最优选择。经济计算中, tie-breaking 不只是编程细节, 也是把多值最优对应变成单值政策函数的数学步骤。

23.6 随机可行集与预算对应

随机经济中, 约束本身可能依赖状态 ω 。例如收入、价格、抵押约束和可交易集合都可能随状态变化。

例 23.10 (随机借款约束). 设状态 ω 决定借款下界 $\underline{a}(\omega)$, 下期资产选择必须满足

$$a' \geq \underline{a}(\omega).$$

若还要求 $a' \leq \bar{a}$, 可行对应为

$$A(\omega) = [\underline{a}(\omega), \bar{a}].$$

若 $\underline{a}$ 可测, 则该对应由可测不等式定义。政策 $g(\omega)$ 必须是 A 的可测选择, 才是状态依赖但可实施的储蓄规则。

例 23.11 (随机预算集). 设价格和财富为可测函数 $p(\omega) \in \mathbb{R}_+^L$ 、 $w(\omega) \in \mathbb{R}_+$ 。预算对应

$$B(\omega) = \{x \in \mathbb{R}_+^L : p(\omega) \cdot x \leq w(\omega)\}$$

有可测图，因为图由

$$x \geq 0, \quad p(\omega) \cdot x \leq w(\omega)$$

这些可测不等式刻画。若效用也可测并且连续，最优需求对应通常可以取得可测选择。

23.7 无限商品空间

有限商品经济中，消费束是 $x \in \mathbb{R}_+^L$ 。如果商品按时间、状态或地点连续变化，消费束就变成函数。例如：

$$c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$$

可以表示按时间或状态索引的消费流。自然的商品空间可能是 L^p 、 L^∞ 或 $C(K)$ 的正锥。

定义 23.8 (正锥). 若 X 是函数空间，正锥定义为

$$X_+ = \{x \in X : x(s) \geq 0 \text{ a.e. 或对所有 } s\}.$$

例 23.12 (状态依赖消费作为 L_+^1 元素). 设状态空间为 $(S, \mathcal{S}, \mu)$ 。消费计划 $c(s) \geq 0$ 若满足

$$\int c(s) d\mu(s) < \infty,$$

则 $c \in L_+^1$ 。总资源约束可以写成

$$\int c d\mu \leq \int y d\mu.$$

这把无限多个状态下的消费约束压缩为函数空间中的积分约束。

例 23.13 (连续时间商品流). 若商品是时间 $t \in [0, 1]$ 上的消费流，消费计划为 $c(t)$ 。要求 $c \in L_+^2$ 表示消费非负且平方可积。价格也可表示为函数 $p(t)$ ，预算约束写成

$$\int_0^1 p(t)c(t) dt \leq w.$$

这就是无限商品经济中价格和消费的内积形式。

23.8 可测配置

定义 23.9 (可测配置). 设个体或状态集合为 S , 商品空间为 X . 配置是函数

$$x : S \rightarrow X.$$

若 x 可测并且 $x(s)$ 属于个体 s 的可行集, 则称它为可测可行配置。

命题 23.4 (可测可行配置的凸组合). 设 X 是向量空间, $\Gamma(s) \subset X$ 对每个 s 都是凸集。若 x, y 是 Γ 的可测选择, 且 $\lambda \in [0, 1]$, 则

$$z(s) = \lambda x(s) + (1 - \lambda)y(s)$$

也是可测选择。

证明. 可测函数的线性组合仍可测。又因为 $x(s), y(s) \in \Gamma(s)$, 且 $\Gamma(s)$ 凸,

$$\lambda x(s) + (1 - \lambda)y(s) \in \Gamma(s).$$

所以 z 是可测可行配置。 □

例 23.14 (随机消费配置的凸组合). 设 $x(\omega)$ 和 $y(\omega)$ 是两个可测消费计划, 且每个状态下都满足同一个凸预算集约束。则

$$z(\omega) = \frac{1}{2}x(\omega) + \frac{1}{2}y(\omega)$$

也是可测且预算可行的消费计划。凸性使可行计划集合具有良好的平均性质, 这是福利和均衡分析中常用的结构。

23.9 无限商品经济中的均衡入口

在无限商品经济中, 价格不再只是有限维向量, 而可能是连续线性泛函。若商品空间为 X , 价格属于对偶空间 X^* , 预算集可写成

$$B(p, w) = \{x \in X_+ : \langle p, x \rangle \leq w\}.$$

这里 $\langle p, x \rangle$ 表示价格泛函作用在商品束上。

例 23.15 (对偶价格和预算集). 若 $X = L^2$, 价格也由 $p \in L^2$ 表示, 则预算约束可写为

$$\int p(s)x(s) ds \leq w.$$

这与有限维的 $p \cdot x \leq w$ 完全平行, 只是求和变成积分, 价格向量变成价格函数。

例 23.16 (可测需求选择). 若每个状态 ω 下消费者最大化

$$u(\omega, x)$$

且约束为 $x \in B(\omega)$, 则最优需求通常是对应

$$D(\omega) = \arg \max_{x \in B(\omega)} u(\omega, x).$$

要把需求加入总需求积分

$$\int x(\omega) d\mu(\omega),$$

必须从 $D(\omega)$ 中选出可测需求 $x(\omega)$ 。这就是可测选择在无限经济中的核心作用。

23.10 本章小结

对应描述状态依赖可行集, 图和弱可测性描述对应如何随状态可测变化。可测选择把逐状态可行点拼成可积分、可实施的政策或配置。可测最大化说明, 在适当条件下, 最优政策不仅逐状态存在, 而且可以选择为可测函数。无限商品经济把商品束、价格和配置放入函数空间, 可测性保证预算、效用和总需求积分有意义。下一章将转向离散时间过滤、鞅和资产价格过程, 把可测政策与信息结构结合起来。

23.11 Exercises

习题 23.1. 定义对应 $\Gamma : S \rightrightarrows X$ 。

习题 23.2. 定义对应的图 $\text{Gr}(\Gamma)$ 。

习题 23.3. 定义选择。

习题 23.4. 设 $\Gamma(s) = [0, s]$ 。判断 $g(s) = s/2$ 是否为选择。

习题 23.5. 说明预算集如何写成状态依赖对应。

习题 23.6. 定义有可测图的对应。

习题 23.7. 定义弱可测对应。

习题 23.8. 说明有限状态空间中可测性为什么简化。

习题 23.9. 证明 $\Gamma(s) = [0, s]$ 的图是 Borel 集。

- 习题 23.10. 证明可测函数诱导的单值对应弱可测。
- 习题 23.11. 定义可测选择。
- 习题 23.12. 陈述可测选择定理的入口版本。
- 习题 23.13. 解释逐状态存在选择为什么不一定足够。
- 习题 23.14. 证明有限选择集下的可测选择命题。
- 习题 23.15. 定义最大化对应。
- 习题 23.16. 证明有限选择集下存在可测最优选择。
- 习题 23.17. 说明 tie-breaking 在可测最优政策中的作用。
- 习题 23.18. 设 $A = \{0, 1\}$, $f(s, 0) = s$, $f(s, 1) = 1 - s$. 给出按并列选 0 的最优政策。
- 习题 23.19. 设 $A(s) = [0, s]$, $f(s, a) = -(a - s/2)^2$. 求最优选择。
- 习题 23.20. 解释随机借款约束如何形成对应。
- 习题 23.21. 说明随机预算集的可测图为何通常来自可测不等式。
- 习题 23.22. 定义函数空间的正锥。
- 习题 23.23. 解释状态依赖消费如何看作 L_+^1 元素。
- 习题 23.24. 将连续时间预算约束写成积分形式。
- 习题 23.25. 定义可测配置。
- 习题 23.26. 证明凸值对应的两个可测选择的凸组合仍是可测选择。
- 习题 23.27. 说明可测配置为什么需要可测性。
- 习题 23.28. 解释无限商品经济中的价格为什么可看作连续线性泛函。
- 习题 23.29. 写出 $X = L^2$ 时的预算约束形式。
- 习题 23.30. 解释可测需求选择为什么是总需求积分的前提。
- 习题 23.31. 比较 Ch04 最大值定理和本章可测最大化的关注点。
- 习题 23.32. 说明可测选择在随机动态规划中的作用。
- 习题 23.33. 说明可测选择在无限商品经济中的作用。
- 习题 23.34. 给出一个有限状态、有限行动下可测政策的例子。
- 习题 23.35. 用一句话说明本章如何连接 Ch23 的信息结构。

23.12 Solutions

本章解答的关键是区分三个层次：逐状态可行、可测可行、可测最优。随机经济中真正可用的是后两者。

解答 23.1. 对应 $\Gamma : S \rightrightarrows X$ 是把每个 $s \in S$ 映到 X 的一个子集 $\Gamma(s) \subset X$ 的规则。

解答 23.2. 对应的图为

$$\text{Gr}(\Gamma) = \{(s, x) \in S \times X : x \in \Gamma(s)\}.$$

解答 23.3. 选择是函数 $g : S \rightarrow X$ ，满足对每个 s ，

$$g(s) \in \Gamma(s).$$

解答 23.4. 是。因为对 $s \geq 0$ ，有

$$0 \leq s/2 \leq s,$$

所以 $g(s) = s/2 \in [0, s] = \Gamma(s)$ 。

解答 23.5. 若价格和财富依赖状态 s ，预算集可写为

$$B(s) = \{x \in \mathbb{R}_+^L : p(s) \cdot x \leq w(s)\}.$$

这给每个状态一个可行消费集合，因此是状态依赖对应。

解答 23.6. 若

$$\text{Gr}(\Gamma) \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{B}(X),$$

则称 Γ 有可测图。

解答 23.7. 若对每个开集 $O \subset X$ ，集合

$$\{s : \Gamma(s) \cap O \neq \emptyset\}$$

可测，则称 Γ 弱可测。

解答 23.8. 有限状态空间若配备所有子集组成的 sigma 代数，则任意状态事件都可测。若行动集合也有限，对应的图只是有限集合的子集，因此自动可测。

解答 23.9. $\Gamma(s) = [0, s]$ 的图为

$$\{(s, x) : 0 \leq x \leq s\}.$$

它可写成闭集

$$\{(s, x) : x \geq 0\} \cap \{(s, x) : x - s \leq 0\}.$$

因此是 Borel 集。

解答 23.10. 若 $\Gamma(s) = \{g(s)\}$, 则对开集 O ,

$$\{s : \Gamma(s) \cap O \neq \emptyset\} = \{s : g(s) \in O\} = g^{-1}(O).$$

由于 g 可测, 右边可测, 所以 Γ 弱可测。

解答 23.11. 可测选择是可测函数 $g : S \rightarrow X$, 并且对每个 s ,

$$g(s) \in \Gamma(s).$$

解答 23.12. 入口版本是: 若 Γ 非空闭值, 并满足合适的可测性条件, 且值空间足够良好, 则存在可测函数 g 使得 $g(s) \in \Gamma(s)$ 。

解答 23.13. 逐状态存在只说明每个 s 下可以挑一个点, 但挑选方式可能不可测。不可测选择无法放入积分或条件期望中, 因此不能作为随机政策或随机配置。

解答 23.14. 令 $E_j = \{s : x_j \in \Gamma(s)\}$ 。按最小编号选择可行点。则

$$\{s : g(s) = x_j\} = E_j \cap E_1^c \cap \cdots \cap E_{j-1}^c,$$

这是可测集合。因此 g 可测, 且由构造 $g(s) \in \Gamma(s)$ 。

解答 23.15. 最大化对应为

$$M(s) = \arg \max_{x \in \Gamma(s)} f(s, x).$$

它给出每个状态下所有最优可行选择。

解答 23.16. 有限选择集下, 只需比较有限个可测函数 $f(s, x_j)$ 。事件 “ x_j 可行且优于所有可行的 x_k ” 由有限个可测集合和可测不等式组成。用最小编号打破并列最优, 可拼出可测最优选择。

解答 23.17. 若最优点不唯一, 最大化对应是多值的。tie-breaking 给出从多值集合到单值函数的规则; 若该规则由可测事件定义, 就得到可测最优政策。

解答 23.18. 比较 s 和 $1-s$ 。若 $s \geq 1-s$, 即 $s \geq 1/2$, 选择 0; 若 $s < 1/2$, 选择 1。按并列选 0, 最优政策为

$$a^*(s) = \begin{cases} 1, & s < 1/2, \\ 0, & s \geq 1/2. \end{cases}$$

解答 23.19. 目标

$$f(s, a) = -(a - s/2)^2$$

在 $a = s/2$ 处最大。且 $s/2 \in [0, s]$, 所以最优选择为

$$a^*(s) = s/2.$$

解答 23.20. 若状态 ω 决定借款下界 $\underline{a}(\omega)$, 且要求 $a' \leq \bar{a}$, 可行集为

$$A(\omega) = [\underline{a}(\omega), \bar{a}].$$

这就是随机可行对应。

解答 23.21. 随机预算集图由条件

$$x \geq 0, \quad p(\omega) \cdot x \leq w(\omega)$$

刻画。若 p, w 可测, 则这些不等式定义的集合在产品空间中可测, 因此通常得到可测图。

解答 23.22. 函数空间 X 的正锥为

$$X_+ = \{x \in X : x(s) \geq 0 \text{ a.e. 或对所有 } s\}.$$

解答 23.23. 若消费计划 $c(s) \geq 0$, 且

$$\int c(s) d\mu(s) < \infty,$$

则 $c \in L_+^1$ 。它表示跨状态的非负可积消费。

解答 23.24. 若 $c(t)$ 是消费流, $p(t)$ 是价格函数, 则预算约束为

$$\int_0^1 p(t)c(t) dt \leq w.$$

解答 23.25. 配置是函数 $x : S \rightarrow X$ 。若 x 可测并且 $x(s) \in \Gamma(s)$, 则称为可测可行配置。

解答 23.26. 若 x, y 可测, 则

$$z(s) = \lambda x(s) + (1 - \lambda)y(s)$$

可测。若每个 $\Gamma(s)$ 凸, 且 $x(s), y(s) \in \Gamma(s)$, 则 $z(s) \in \Gamma(s)$ 。所以 z 仍是可测选择。

解答 23.27. 总需求、期望效用和资源约束通常需要积分

$$\int x(s) d\mu(s).$$

若配置不可测, 该积分可能无定义, 因此无法作为经济中的可实施配置。

解答 23.28. 无限商品空间中, 价格要把商品束 $x \in X$ 映为支出数值, 并满足线性定价。因此价格自然是线性泛函。为了对小扰动稳定, 还要求它连续, 即 $p \in X^*$ 。

解答 23.29. 若 $X = L^2$ ，且价格由 $p \in L^2$ 表示，则预算约束可写为

$$\int p(s)x(s) ds \leq w.$$

解答 23.30. 总需求需要把个体需求 $x(\omega)$ 对 ω 积分。若只知道每个 ω 存在最优需求，但不能选出可测函数，则无法定义总需求积分。

解答 23.31. Ch04 最大值定理关注最优值和最优对应参数的连续性。本章可测最大化关注当参数是随机状态时，能否选出可测最优政策以便积分和动态递归。

解答 23.32. 随机动态规划中，最优行动通常由状态依赖最大化给出。可测选择保证可以从最优行动对应中选出可测政策函数，使期望回报和状态转移有定义。

解答 23.33. 无限商品经济中，个体预算集和需求可能随类型或状态变化。可测选择保证个体需求可以汇总为总需求，配置可以进入资源约束和均衡定义。

解答 23.34. 设状态 $S = \{0, 1\}$ ，行动 $A = \{a, b\}$ ，并规定在状态 0 选 a ，状态 1 选 b 。由于有限状态下所有函数可测，这就是可测政策。

解答 23.35. Ch23 将研究信息随时间形成的 sigma 代数；本章的可测选择语言说明政策必须相对于可用信息可测，才能称为可实施的动态决策。

23.13 Computation Lab

本章计算实验关注如何在有限网格上表示对应、选择和可测最优政策。

Lab 1: 可行性 mask

在状态网格 s_i 和行动网格 a_j 上，把对应 $A(s_i)$ 表示为布尔矩阵

$$M_{ij} = \mathbf{1}\{a_j \in A(s_i)\}.$$

每一行给出某个状态下的可行动作。若某行全为 0，说明该状态下可行集为空，需要检查模型约束。

Lab 2: 有限行动 argmax 和 tie-breaking

给定收益矩阵 $R_{ij} = r(s_i, a_j)$ ，在每一行只对 $M_{ij} = 1$ 的行动取最大值。若多个行动并列最大，选择最小编号行动。这对应本章有限选择集的可测最优选择构造。

Lab 3: 随机预算集网格

给定状态依赖价格 $p(s_i)$ 和财富 $w(s_i)$ ，在消费网格 x_j 上检查

$$p(s_i) \cdot x_j \leq w(s_i).$$

得到预算可行性 mask。需求计算必须只在可行点上最大化。

Lab 4: 可测配置的汇总

若个体类型网格为 ω_i ，权重为 q_i ，可测配置近似为一组消费 x_i 。总需求近似为

$$\sum_i q_i x_i.$$

如果某些类型缺少可行选择，总需求就无法正确计算。

第二十四章 离散时间过滤、鞅与资产价格过程

24.1 信息随时间展开

到目前为止，我们已经能处理随机变量、条件期望、分布和可测选择。资产定价和动态决策还需要一个核心对象：时间中的信息。今天能观察到什么，明天才知道什么，策略能不能依赖未来信息，这些都由过滤描述。

本章主线是：

过滤 $\longrightarrow$ 适应与可预测 $\longrightarrow$ 鞅 $\longrightarrow$ 停时 $\longrightarrow$ 贴现资产价格.

24.2 过滤与随机过程

定义 24.1 (过滤). 在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上, 若

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{F},$$

则称 $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ 为离散时间过滤。它表示随时间增长的信息。

定义 24.2 (随机过程). 随机过程是随机变量族 $(X_t)_{t=0}^T$ 。若每个 X_t 都是 $\mathcal{F}_t$ -可测的, 则称 X 适应于过滤 $(\mathcal{F}_t)$ 。

例 24.1 (抛硬币过滤). 连续抛两次硬币。令 $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1$ 表示第一次抛掷结果生成的信息, $\mathcal{F}_2$ 表示两次抛掷结果生成的信息。第一次后, 事件“第一次是正面”可见; 第二次后, 事件“两次都是正面”可见。信息集合随时间变大, 因此形成过滤。

例 24.2 (资产价格过程的适应性). 若 S_t 是第 t 期资产价格, 通常要求 S_t 是 $\mathcal{F}_t$ -可测的。这表示第 t 期价格在第 t 期信息下已经可观察。若某个交易策略使用 S_{t+1} 来决定第 t 期持仓, 就使用了未来信息, 不是可实施策略。

24.3 可预测过程与交易策略

定义 24.3 (可预测过程). 过程 $(H_t)_{t=1}^T$ 称为可预测的, 如果 H_t 是 $\mathcal{F}_{t-1}$ -可测的。也就是说, 第 t 期持仓必须在第 t 期收益实现之前决定。

例 24.3 (可预测交易策略). 设 H_t 表示从 $t-1$ 到 t 持有的股票数量。若 H_t 只依赖 $\mathcal{F}_{t-1}$ 中的信息, 则它是可预测的。例如 $H_t = 1$ 是可预测的; 若 $H_t = \mathbf{1}_{\{S_t > S_{t-1}\}}$, 则它依赖第 t 期价格, 通常不是 $t-1$ 时可预测的。

例 24.4 (财富增量). 若 H_t 是可预测持仓, 资产价格为 S_t , 则交易收益增量常写为

$$H_t(S_t - S_{t-1}).$$

可预测性保证 H_t 在价格变动发生前已决定, 因此该收益不是由偷看未来价格得到的。

24.4 鞅、次鞅和上鞅

定义 24.4 (鞅). 适应过程 (M_t) 称为鞅, 如果 $\mathbb{E}|M_t| < \infty$, 且对每个 $t < T$,

$$\mathbb{E}[M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = M_t.$$

定义 24.5 (次鞅与上鞅). 若

$$\mathbb{E}[M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \geq M_t,$$

则称 M 为次鞅; 若不等式方向相反, 则称为上鞅。

例 24.5 (公平赌博是鞅). 令 ξ_t 独立取 1 和 -1 , 概率各一半。设

$$M_t = \sum_{i=1}^t \xi_i, \quad \mathcal{F}_t = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_t).$$

则

$$\mathbb{E}[M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = M_t + \mathbb{E}[\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = M_t.$$

所以 M_t 是鞅。它的含义是: 给定当前信息, 下一步没有可预测的平均收益。

例 24.6 (带正漂移的过程是次鞅). 若

$$X_{t+1} = X_t + \mu + \xi_{t+1}, \quad \mu > 0,$$

且 $\mathbb{E}[\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = 0$, 则

$$\mathbb{E}[X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = X_t + \mu \geq X_t.$$

因此 X_t 是次鞅。正漂移对应条件均值上升。

命题 24.1 (条件期望过程是鞅). 若 $X \in L^1$, 定义

$$M_t = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t].$$

则 (M_t) 是鞅。

证明. 首先 M_t 是 $\mathcal{F}_t$ -可测且可积。由迭代期望,

$$\mathbb{E}[M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_{t+1}] \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t] = M_t.$$

□

例 24.7 (终值财富的当前估计). 若 X 是第 T 期总财富, $M_t = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t]$ 是第 t 期对终值财富的最佳条件均值预测。随着信息增加, 预测会变化; 但预测过程本身是鞅, 因为新信息在当前条件下没有系统性偏差。

24.5 鞅差分

定义 24.6 (鞅差分). 过程 $(\Delta M_t)_{t=1}^T$ 称为鞅差分, 如果 ΔM_t 可积、 $\mathcal{F}_t$ -可测, 并且

$$\mathbb{E}[\Delta M_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = 0.$$

命题 24.2 (鞅差分和生成鞅). 若 (ΔM_t) 是鞅差分, 定义

$$M_t = M_0 + \sum_{i=1}^t \Delta M_i,$$

其中 M_0 是 $\mathcal{F}_0$ -可测且可积, 则 (M_t) 是鞅。

证明.

$$\mathbb{E}[M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[M_t + \Delta M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = M_t + \mathbb{E}[\Delta M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = M_t.$$

□

例 24.8 (预测误差是鞅差分). 令

$$\varepsilon_{t+1} = X_{t+1} - \mathbb{E}[X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t].$$

则

$$\mathbb{E}[\varepsilon_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = 0.$$

所以预测误差是鞅差分。资产定价中, 若价格已经反映当前信息, 超额收益中不可预测的部分常被建模为鞅差分。

24.6 停时与停止过程

定义 24.7 (停时). 随机时间 $\tau : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, T\}$ 称为停时, 如果对每个 t ,

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

定义 24.8 (停止过程). 给定过程 M_t 和停时 τ , 停止过程定义为

$$M_{t \wedge \tau}.$$

例 24.9 (首次达到目标价格). 设 S_t 是适应价格过程, 定义

$$\tau = \inf\{t : S_t \geq K\}.$$

事件 $\{\tau \leq t\}$ 等价于“到第 t 期为止曾经出现 $S_i \geq K$ ”。这只依赖 $\mathcal{F}_t$ 信息, 因此 τ 是停时。它表示首次达到目标价格的时间。

例 24.10 (依赖未来的时间不是停时). 令 $T = 2$, 定义 $\tau = 0$ 如果第二次抛硬币为正面, 否则 $\tau = 1$ 。事件 $\{\tau = 0\}$ 在 $t = 0$ 时需要知道第二次抛掷结果, 因此通常不属于 $\mathcal{F}_0$ 。所以 τ 不是停时。停时不能偷看未来。

命题 24.3 (有界停时停止鞅仍是鞅). 若 M_t 是鞅, $\tau \leq T$ 是停时, 则

$$N_t = M_{t \wedge \tau}$$

是鞅。

证明. 写成增量形式:

$$N_{t+1} - N_t = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}}(M_{t+1} - M_t).$$

因为 $\{\tau > t\} \in \mathcal{F}_t$, 指标函数是 $\mathcal{F}_t$ -可测。于是

$$\mathbb{E}[N_{t+1} - N_t \mid \mathcal{F}_t] = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}[M_{t+1} - M_t \mid \mathcal{F}_t] = 0.$$

所以 N_t 是鞅。 □

定理 24.1 (有限可选停止). 若 M_t 是鞅, $\tau \leq T$ 是有界停时, 则

$$\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0].$$

证明. 由上一命题, $N_t = M_{t \wedge \tau}$ 是鞅。因此

$$\mathbb{E}[N_T] = \mathbb{E}[N_0].$$

但 $N_T = M_\tau$, 且 $N_0 = M_0$ 。所以

$$\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0].$$

□

例 24.11 (公平赌博的停止期望). 在公平随机游走中, 若规定最多玩到 T 期, 或者达到某个目标就停止, 则停止财富的期望仍等于初始财富。这个结论不说每条路径都不赚钱, 而是说在有界停时和公平赌博条件下, 不能靠停止规则创造正的平均收益。

24.7 贴现资产价格过程

定义 24.9 (贴现价格). 设 S_t 是风险资产价格, B_t 是无风险账户价格。贴现价格定义为

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t}.$$

定义 24.10 (风险中性测度, 离散时间入口). 若存在概率测度 $\mathbb{Q}$, 使贴现资产价格过程在 $\mathbb{Q}$ 下为鞅:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_{t+1} | \mathcal{F}_t] = \tilde{S}_t,$$

则称 $\mathbb{Q}$ 是风险中性测度或鞅测度。

命题 24.4 (风险中性贴现价格是鞅). 若资产价格满足

$$S_t = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_{t+1} | \mathcal{F}_t],$$

且 $B_t = (1+r)^t$, 则 $\tilde{S}_t = S_t/B_t$ 是 $\mathbb{Q}$ -鞅。

证明.

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_{t+1} | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_{t+1}}{(1+r)^{t+1}} | \mathcal{F}_t \right] = \frac{1}{(1+r)^{t+1}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_{t+1} | \mathcal{F}_t].$$

由定价式,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_{t+1} | \mathcal{F}_t] = (1+r)S_t.$$

代入得到

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_{t+1} | \mathcal{F}_t] = \frac{S_t}{(1+r)^t} = \tilde{S}_t.$$

□

例 24.12 (一期间二叉树的风险中性概率). 股票今天价格 $S_0 = 100$, 明天上涨到 120 或下跌到 90, 无风险 gross return 为 1.05。风险中性概率 q 满足

$$100 = \frac{1}{1.05} (q120 + (1-q)90).$$

等价于

$$105 = 90 + 30q,$$

所以

$$q = 1/2.$$

在该概率下, 贴现股票价格是鞅。

例 24.13 (贴现价格检验). 若 $B_0 = 1$ 、 $B_1 = 1.05$, 上例中

$$\tilde{S}_0 = 100,$$

而

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_1] = \frac{1}{1.05} \left(\frac{1}{2} \cdot 120 + \frac{1}{2} \cdot 90 \right) = 100.$$

这正是一期鞅条件。

24.8 随机贴现因子

定义 24.11 (随机贴现因子). 一期模型中, 随机变量 $M_{t+1} > 0$ 若满足对任意资产 gross return R_{t+1} ,

$$1 = \mathbb{E}_t[M_{t+1}R_{t+1}],$$

则称 M_{t+1} 为随机贴现因子。

命题 24.5 (一期定价方程). 若资产价格为 P_t , 下一期支付为 X_{t+1} , 且

$$P_t = \mathbb{E}_t[M_{t+1}X_{t+1}],$$

则对 gross return $R_{t+1} = X_{t+1}/P_t$, 有

$$1 = \mathbb{E}_t[M_{t+1}R_{t+1}].$$

证明. 若 $P_t > 0$, 将定价式两边除以 P_t , 得到

$$1 = \mathbb{E}_t \left[M_{t+1} \frac{X_{t+1}}{P_t} \right] = \mathbb{E}_t[M_{t+1}R_{t+1}].$$

□

例 24.14 (无风险资产给出贴现因子均值). 若无风险 gross return 为 R_f , 定价方程给出

$$1 = \mathbb{E}_t[M_{t+1}R_f] = R_f \mathbb{E}_t[M_{t+1}].$$

因此

$$\mathbb{E}_t[M_{t+1}] = \frac{1}{R_f}.$$

随机贴现因子的条件均值等于无风险折现因子。

例 24.15 (风险溢价和协方差). 由

$$1 = \mathbb{E}_t[MR]$$

以及 $1 = R_f \mathbb{E}_t[M]$, 可得

$$\mathbb{E}_t[R] - R_f = -R_f \text{Cov}_t(M, R).$$

因此资产若在 M 高的坏状态中支付少, 即与 M 负相关, 就需要正风险溢价。这连接了 Ch18 的风险厌恶和本章的定价核。

24.9 本章小结

过滤描述信息, 适应过程描述可观察变量, 可预测过程描述可实施交易策略。鞅表示在当前信息下没有可预测平均增益, 鞅差分表示不可预测冲击。停时形式化“不偷看未来”的随机停止规则, 有限可选停止说明公平鞅不能靠有界停止规则制造平均收益。资产定价中, 风险中性测度下贴现价格是鞅, 随机贴现因子给出更一般的定价方程。Ch28 将在这些概念上系统展开离散时间资产定价。

24.10 Exercises

习题 24.1. 定义离散时间过滤。

习题 24.2. 定义适应过程。

习题 24.3. 解释为什么资产价格过程通常要求适应。

习题 24.4. 定义可预测过程。

习题 24.5. 解释交易策略为什么应当可预测。

习题 24.6. 定义鞅。

习题 24.7. 定义次鞅和上鞅。

习题 24.8. 证明公平随机游走是鞅。

习题 24.9. 设 $X_{t+1} = X_t + \mu + \xi_{t+1}$, 其中 $\mu > 0$, $\mathbb{E}[\xi_{t+1} | \mathcal{F}_t] = 0$ 。说明 X_t 是次鞅。

习题 24.10. 证明 $M_t = \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_t]$ 是鞅。

习题 24.11. 定义鞅差分。

习题 24.12. 证明鞅差分之和是鞅。

习题 24.13. 说明预测误差为什么是鞅差分。

习题 24.14. 定义停时。

习题 24.15. 说明首次达到目标价格的时间为什么是停时。

习题 24.16. 给出一个不是停时的随机时间。

习题 24.17. 定义停止过程 $M_{t \wedge \tau}$ 。

习题 24.18. 证明有界停时停止鞅仍是鞅。

习题 24.19. 证明有限可选停止定理。

习题 24.20. 解释公平赌博不能靠有界停止规则产生正平均收益。

习题 24.21. 定义贴现价格过程。

习题 24.22. 定义风险中性测度的离散时间入口版本。

习题 24.23. 证明风险中性定价式蕴含贴现价格为鞅。

习题 24.24. 一期二叉树中 $S_0 = 100$ 、 $S_u = 130$ 、 $S_d = 80$ 、 $R_f = 1.05$ 。求风险中性概率。

习题 24.25. 在上一题中验证贴现期望价格等于 S_0 。

习题 24.26. 定义随机贴现因子。

习题 24.27. 证明一期定价方程推出 $1 = \mathbb{E}_t[M_{t+1}R_{t+1}]$ 。

习题 24.28. 用无风险资产推导 $\mathbb{E}_t[M_{t+1}] = 1/R_f$ 。

习题 24.29. 推导风险溢价与 $\text{Cov}_t(M, R)$ 的关系。

习题 24.30. 说明鞅和风险中性定价之间的关系。

习题 24.31. 解释适应性和可预测性的区别。

习题 24.32. 若 M_t 是鞅，证明 $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0]$ 。

习题 24.33. 若 M_t 是次鞅，说明 $\mathbb{E}[M_t]$ 如何随 t 变化。

习题 24.34. 说明随机贴现因子为何连接风险厌恶和资产定价。

习题 24.35. 用一句话说明本章如何为 Ch28 离散时间资产定价做准备。

24.11 Solutions

本章解答的关键是始终问：某个对象相对于哪个信息集可测？条件期望是在什么信息下计算？交易策略能不能看见未来？

解答 24.1. 过滤是递增的 sigma 代数族

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_T.$$

它表示随时间增加的信息。

解答 24.2. 过程 X_t 适应于 $(\mathcal{F}_t)$ ，是指每个 X_t 都是 $\mathcal{F}_t$ -可测的。也就是说，第 t 期变量在第 t 期信息下可观察。

解答 24.3. 价格 S_t 是第 t 期市场可见变量，因此应由第 t 期信息决定，即 S_t 应是 $\mathcal{F}_t$ -可测的。否则价格过程会包含当期不可见信息。

解答 24.4. 过程 H_t 可预测，是指 H_t 是 $\mathcal{F}_{t-1}$ -可测的。它表示第 t 期持仓在第 t 期不确定性实现前已经决定。

解答 24.5. 交易策略若能依赖未来价格变动，就会偷看未来并制造虚假套利。可预测性要求持仓只依赖上一期已有信息，因此符合实际交易时序。

解答 24.6. 适应可积过程 M_t 是鞅，如果

$$\mathbb{E}[M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = M_t$$

对每个 t 成立。

解答 24.7. 若

$$\mathbb{E}[M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \geq M_t,$$

则 M_t 是次鞅；若不等式方向相反，则为上鞅。

解答 24.8. 令 $M_t = \sum_{i=1}^t \xi_i$ ，其中 ξ_{t+1} 独立于 $\mathcal{F}_t$ 且均值为 0。则

$$\mathbb{E}[M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = M_t + \mathbb{E}[\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = M_t.$$

所以 M_t 是鞅。

解答 24.9. 由条件期望，

$$\mathbb{E}[X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = X_t + \mu + \mathbb{E}[\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = X_t + \mu \geq X_t.$$

因此 X_t 是次鞅。

解答 24.10. 令 $M_t = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t]$ 。由迭代期望，

$$\mathbb{E}[M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_{t+1}] \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t] = M_t.$$

所以 M_t 是鞅。

解答 24.11. 鞅差分 ΔM_t 满足 $\mathcal{F}_t$ -可测、可积，并且

$$\mathbb{E}[\Delta M_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = 0.$$

解答 24.12. 令

$$M_t = M_0 + \sum_{i=1}^t \Delta M_i.$$

则

$$\mathbb{E}[M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = M_t + \mathbb{E}[\Delta M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = M_t.$$

所以 M_t 是鞅。

解答 24.13. 预测误差

$$\varepsilon_{t+1} = X_{t+1} - \mathbb{E}[X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]$$

满足

$$\mathbb{E}[\varepsilon_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = 0.$$

因此它是相对于 $\mathcal{F}_t$ 的鞅差分。

解答 24.14. 随机时间 τ 是停时，如果对每个 t ，事件

$$\{\tau \leq t\}$$

属于 $\mathcal{F}_t$ 。也就是到第 t 期能判断是否已经停止。

解答 24.15. 首次达到目标价格

$$\tau = \inf\{t : S_t \geq K\}$$

满足 $\{\tau \leq t\}$ 只依赖 $S_0, \dots, S_t$ 。若 S 适应，则该事件属于 $\mathcal{F}_t$ ，所以 τ 是停时。

解答 24.16. 例如两期抛硬币中，令 $\tau = 0$ 当第二次是正面，否则 $\tau = 1$ 。事件 $\{\tau = 0\}$ 在 $t = 0$ 时需要未来第二次结果，不属于 $\mathcal{F}_0$ ，所以不是停时。

解答 24.17. 停止过程定义为

$$N_t = M_{t \wedge \tau}.$$

它在 τ 之前跟随 M_t ，在 τ 之后保持 M_τ 不变。

解答 24.18. 有

$$N_{t+1} - N_t = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}}(M_{t+1} - M_t).$$

由于 $\{\tau > t\} \in \mathcal{F}_t$,

$$\mathbb{E}[N_{t+1} - N_t \mid \mathcal{F}_t] = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}[M_{t+1} - M_t \mid \mathcal{F}_t] = 0.$$

所以 N_t 是鞅。

解答 24.19. 由上一题, $N_t = M_{t \wedge \tau}$ 是鞅。若 $\tau \leq T$, 则

$$\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[N_T] = \mathbb{E}[N_0] = \mathbb{E}[M_0].$$

解答 24.20. 公平赌博对应鞅。有限可选停止说明, 对有界停时 τ , 停止财富满足

$$\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0].$$

因此停止规则不能改变平均收益。

解答 24.21. 若 S_t 是资产价格, B_t 是无风险账户价格, 贴现价格为

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t}.$$

解答 24.22. 若在概率测度 $\mathbb{Q}$ 下,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = \tilde{S}_t,$$

则称 $\mathbb{Q}$ 为风险中性测度或鞅测度。

解答 24.23. 若

$$S_t = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_{t+1} \mid \mathcal{F}_t], \quad B_t = (1+r)^t,$$

则

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = \frac{1}{(1+r)^{t+1}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = \frac{S_t}{(1+r)^t} = \tilde{S}_t.$$

解答 24.24. 风险中性概率 q 满足

$$100 = \frac{1}{1.05}(130q + 80(1-q)).$$

即

$$105 = 80 + 50q,$$

所以

$$q = 0.5.$$

解答 24.25. 用 $q = 0.5$,

$$\frac{1}{1.05} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1] = \frac{1}{1.05} (0.5 \cdot 130 + 0.5 \cdot 80) = \frac{105}{1.05} = 100 = S_0.$$

解答 24.26. 随机贴现因子 M_{t+1} 满足对任意资产 gross return R_{t+1} ,

$$1 = \mathbb{E}_t[M_{t+1}R_{t+1}].$$

解答 24.27. 若

$$P_t = \mathbb{E}_t[M_{t+1}X_{t+1}],$$

且 $R_{t+1} = X_{t+1}/P_t$, 则两边除以 P_t :

$$1 = \mathbb{E}_t[M_{t+1}R_{t+1}].$$

解答 24.28. 对无风险资产,

$$1 = \mathbb{E}_t[M_{t+1}R_f] = R_f \mathbb{E}_t[M_{t+1}].$$

因此

$$\mathbb{E}_t[M_{t+1}] = 1/R_f.$$

解答 24.29. 由

$$1 = \mathbb{E}_t[MR] = \mathbb{E}_t[M]\mathbb{E}_t[R] + \text{Cov}_t(M, R),$$

且 $\mathbb{E}_t[M] = 1/R_f$, 得

$$1 = \frac{\mathbb{E}_t[R]}{R_f} + \text{Cov}_t(M, R).$$

整理:

$$\mathbb{E}_t[R] - R_f = -R_f \text{Cov}_t(M, R).$$

解答 24.30. 风险中性定价要求贴现价格在某个等价概率下为鞅。鞅条件表示给定当前信息, 贴现价格没有可预测漂移, 这正是无套利定价的核心形式之一。

解答 24.31. 适应性要求 X_t 在第 t 期可观察, 即 $\mathcal{F}_t$ -可测。可预测性更强地要求 H_t 在第 $t-1$ 期已经决定, 即 $\mathcal{F}_{t-1}$ -可测。

解答 24.32. 若 M_t 是鞅, 则

$$\mathbb{E}[M_{t+1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{t+1} | \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[M_t].$$

递推得到 $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0]$ 。

解答 24.33. 若 M_t 是次鞅，则

$$\mathbb{E}[M_{t+1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{t+1} | \mathcal{F}_t]] \geq \mathbb{E}[M_t].$$

所以无条件期望随时间弱上升。

解答 24.34. 随机贴现因子在坏状态通常较高，反映边际效用高或状态价格高。资产若在坏状态支付少，就与贴现因子负相关，因此需要正风险溢价。

解答 24.35. 本章提供过滤、鞅、停时、贴现价格和随机贴现因子的语言，Ch28 可以在此基础上系统讨论无套利、风险中性测度和离散时间资产定价。

24.12 Computation Lab

本章计算实验关注有限树上的信息、条件期望和鞅检验。

Lab 1: 有限树过滤

在二叉树中，第 t 期节点划分生成 $\mathcal{F}_t$ 。计算条件期望时，只需在同一第 t 期节点之后的后继状态中按条件概率求平均。

Lab 2: 鞅检验表

给定过程 M_t ，在每个节点检查

$$M_t = \mathbb{E}[M_{t+1} | \mathcal{F}_t].$$

若所有节点都成立，则过程在该树上是鞅。若右边大于左边，则是次鞅候选。

Lab 3: 停时模拟

给定价格路径和目标 K ，计算

$$\tau = \inf\{t : S_t \geq K\}.$$

再构造停止过程 $M_{t \wedge \tau}$ ，检查停止后路径是否保持常数。

Lab 4: 二叉树风险中性概率

一期模型中, 风险中性概率满足

$$S_0 = \frac{1}{R_f}(qS_u + (1-q)S_d).$$

解得

$$q = \frac{R_f S_0 - S_d}{S_u - S_d}.$$

若 $q \notin [0, 1]$, 说明该简单二叉树参数存在套利迹象。

Lab 5: 随机贴现因子检验

给定状态概率、贴现因子 M_i 和资产收益 R_i , 计算

$$\sum_i p_i M_i R_i.$$

若结果接近 1, 则该资产满足一期 SDF 定价方程。

第二十五章 差分方程、稳定性与经济动态

25.1 离散时间动态的基本问题

动态经济模型通常从状态转移开始：

$$x_{t+1} = f(x_t).$$

这里 x_t 可以是资本、债务、价格、财富分布的低维摘要，或政策迭代中的误差。Ch25 以后，状态转移将进入 Bellman 方程；本章先学习如何分析状态本身的运动。

本章主线是：

差分方程 $\rightarrow$ 稳态 $\rightarrow$ 稳定性 $\rightarrow$ 线性系统 $\rightarrow$ 线性化与相图.

25.2 一阶差分方程与稳态

定义 25.1 (一阶差分方程). 一阶差分方程是形如

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

的递推关系。给定初值 x_0 ，它生成序列 $x_1, x_2, \dots$ 。

定义 25.2 (稳态). 若

$$x^* = f(x^*),$$

则称 x^* 是稳态或不动点。

例 25.1 (资本不变的稳态). 设资本演化为

$$k_{t+1} = sAk_t^\alpha + (1 - \delta)k_t, \quad 0 < \alpha < 1.$$

稳态满足

$$k^* = sA(k^*)^\alpha + (1 - \delta)k^*.$$

若 $k^* > 0$, 则

$$\delta k^* = sA(k^*)^\alpha,$$

所以

$$k^* = \left(\frac{sA}{\delta} \right)^{1/(1-\alpha)}.$$

经济含义是: 稳态时新增投资正好抵消折旧。

例 25.2 (债务稳定的稳态). 政府债务满足

$$b_{t+1} = (1+r)b_t - d,$$

其中 $d > 0$ 是每期基本盈余。稳态 b^* 满足

$$b^* = (1+r)b^* - d,$$

所以

$$rb^* = d, \quad b^* = \frac{d}{r}.$$

若债务高于该值, 利息负担超过盈余的稳定能力; 若低于该值, 盈余足以压低债务。

25.3 线性与仿射差分方程

命题 25.1 (标量线性差分方程解). 若

$$x_{t+1} = ax_t,$$

则

$$x_t = a^t x_0.$$

证明. 由递推,

$$x_1 = ax_0, \quad x_2 = a^2 x_0.$$

假设 $x_t = a^t x_0$, 则

$$x_{t+1} = ax_t = a^{t+1} x_0.$$

归纳得到结论。 □

命题 25.2 (仿射差分方程解). 若

$$x_{t+1} = ax_t + b, \quad a \neq 1,$$

则稳态为

$$x^* = \frac{b}{1-a},$$

且

$$x_t - x^* = a^t(x_0 - x^*).$$

证明. 稳态满足 $x^* = ax^* + b$, 所以 $x^* = b/(1-a)$ 。两边相减:

$$x_{t+1} - x^* = a(x_t - x^*).$$

应用线性方程解, 得到

$$x_t - x^* = a^t(x_0 - x^*).$$

□

例 25.3 (收敛的自回归过程). 设

$$x_{t+1} = 0.8x_t + 2.$$

稳态为

$$x^* = \frac{2}{1-0.8} = 10.$$

若 $x_0 = 0$, 则

$$x_t - 10 = 0.8^t(0 - 10),$$

所以 $x_t \rightarrow 10$ 。距离稳态的误差每期乘以 0.8。

例 25.4 (振荡收敛). 设

$$x_{t+1} = -0.5x_t + 3.$$

稳态为

$$x^* = \frac{3}{1+0.5} = 2.$$

误差满足

$$x_t - 2 = (-0.5)^t(x_0 - 2).$$

因为系数为负, 路径在稳态两侧交替; 因为绝对值小于 1, 振荡幅度收敛到零。

例 25.5 (爆炸路径). 若

$$x_{t+1} = 1.2x_t,$$

则

$$x_t = 1.2^t x_0.$$

除非 $x_0 = 0$, 否则 $|x_t|$ 发散。经济上, 这类方程可表示未被稳定规则约束的债务或价格泡沫路径。

25.4 稳定性

定义 25.3 (局部稳定). 稳态 x^* 局部稳定, 是指存在 x^* 的邻域, 使得从该邻域内任意初值出发, 路径收敛到 x^* 。

定义 25.4 (全局稳定). 若从允许状态空间内任意初值出发, 路径都收敛到 x^* , 则称 x^* 全局稳定。

命题 25.3 (一维局部稳定的斜率条件). 设 f 在稳态 x^* 附近可微, 且

$$|f'(x^*)| < 1.$$

则 x^* 局部稳定。

证明. 由可微性,

$$f(x) - f(x^*) = f'(x^*)(x - x^*) + o(|x - x^*|).$$

若 $|f'(x^*)| < 1$, 可取邻域使得在该邻域中

$$|f(x) - f(x^*)| \leq c|x - x^*|$$

其中 $c < 1$. 于是误差每期至少按比例 c 缩小, 路径收敛到 x^* . □

例 25.6 (Solow 映射的局部稳定). 资本映射

$$f(k) = sAk^\alpha + (1 - \delta)k$$

的导数为

$$f'(k) = sA\alpha k^{\alpha-1} + 1 - \delta.$$

在正稳态处, 利用 $\delta k^* = sA(k^*)^\alpha$, 得

$$sA(k^*)^{\alpha-1} = \delta.$$

所以

$$f'(k^*) = \alpha\delta + 1 - \delta = 1 - \delta(1 - \alpha).$$

若 $0 < \delta < 1$ 、 $0 < \alpha < 1$, 则该斜率在 0 与 1 之间, 稳态局部稳定。

例 25.7 (蛛网模型的稳定条件). 设价格调整为

$$p_{t+1} = a - bp_t, \quad b > 0.$$

稳态满足 $p^* = a/(1 + b)$, 误差满足

$$p_{t+1} - p^* = -b(p_t - p^*).$$

因此当 $b < 1$ 时价格振荡收敛; 当 $b > 1$ 时价格振荡发散。

25.5 线性系统

定义 25.5 (线性系统). 多维线性差分系统写为

$$x_{t+1} = Ax_t,$$

其中 $x_t \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。

定义 25.6 (谱半径). 矩阵 A 的谱半径为

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i|,$$

其中 λ_i 是 A 的特征值。

命题 25.4 (可对角化线性系统的稳定性). 若 $A = PDP^{-1}$, 且 $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 。若所有特征值满足

$$|\lambda_i| < 1,$$

则 $x_{t+1} = Ax_t$ 的零稳态全局稳定。

证明. 因为

$$x_t = A^t x_0 = PD^t P^{-1} x_0.$$

而

$$D^t = \text{diag}(\lambda_1^t, \dots, \lambda_n^t).$$

若所有 $|\lambda_i| < 1$, 则 $\lambda_i^t \rightarrow 0$, 所以 $D^t \rightarrow 0$, 进而 $x_t \rightarrow 0$ 。 □

例 25.8 (二维稳定系统). 令

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

则

$$x_t = \begin{pmatrix} 0.5^t x_{0,1} \\ 0.8^t x_{0,2} \end{pmatrix}.$$

两个特征值都在单位圆内, 因此系统收敛到零。第二个方向收敛较慢, 因为 0.8^t 下降慢于 0.5^t 。

例 25.9 (鞍型系统). 令

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{pmatrix}.$$

第一个方向稳定, 第二个方向不稳定。只有初值满足第二个坐标为零时, 路径才收敛到零。宏观动态中, 鞍路径稳定意味着只有某些初始跳变量选择能把经济放到收敛路径上。

25.6 仿射系统与去稳态化

仿射系统写为

$$x_{t+1} = Ax_t + b.$$

若稳态 x^* 满足

$$x^* = Ax^* + b,$$

则令 $\hat{x}_t = x_t - x^*$, 得到

$$\hat{x}_{t+1} = A\hat{x}_t.$$

因此仿射系统的稳定性由矩阵 A 决定。

例 25.10 (线性化债务和资本的二维系统). 设

$$\begin{pmatrix} k_{t+1} \\ b_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.1 & 1.05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_t \\ b_t \end{pmatrix}.$$

特征值是 0.9 和 1.05。资本方向本身收敛, 但债务方向有大于 1 的根。若没有财政规则稳定债务, 系统整体不稳定。

25.7 非线性系统与线性化

定义 25.7 (非线性动态系统). 多维非线性系统写为

$$x_{t+1} = F(x_t),$$

其中 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 。

命题 25.5 (稳态附近的线性化). 设 $x^* = F(x^*)$, 且 F 在 x^* 可微。令

$$J = DF(x^*)$$

为 *Jacobian* 矩阵。则稳态附近有近似

$$x_{t+1} - x^* \approx J(x_t - x^*).$$

证明. 由多元 Taylor 展开,

$$F(x) = F(x^*) + J(x - x^*) + o(\|x - x^*\|).$$

又 $F(x^*) = x^*$, 所以

$$x_{t+1} - x^* = F(x_t) - F(x^*) = J(x_t - x^*) + o(\|x_t - x^*\|).$$

□

例 25.11 (非线性资本动态的线性化). 对

$$k_{t+1} = sAk_t^\alpha + (1 - \delta)k_t,$$

稳态附近近似为

$$k_{t+1} - k^* \approx f'(k^*)(k_t - k^*).$$

前面已得

$$f'(k^*) = 1 - \delta(1 - \alpha).$$

因此收敛速度近似由该数控制。

25.8 相图与鞍路径入口

二维动态系统常写为

$$x_{t+1} = F(x_t, y_t), \quad y_{t+1} = G(x_t, y_t).$$

相图通过曲线

$$x_{t+1} = x_t, \quad y_{t+1} = y_t$$

描述变量上升或下降的区域。若一个方向稳定、另一个方向不稳定，稳态通常是鞍点。

例 25.12 (简单鞍路径选择). 考虑

$$x_{t+1} = 0.8x_t, \quad y_{t+1} = 1.2y_t.$$

要使路径收敛到零，必须选择 $y_0 = 0$ 。若 y 是跳变量，模型可通过选择初始 y_0 把经济放在稳定路径上；若 y_0 给定且非零，系统发散。

例 25.13 (价格跳变量的直觉). 在资产价格模型中，基本状态 x_t 可能缓慢演化，而价格 p_t 可以立即跳变。如果只有一条价格路径不产生爆炸，均衡会选择这条路径。数学上，这就是鞍路径稳定的入口直觉。

25.9 经济动态中的常见形式

例 25.14 (局部调整价格). 设目标价格为 p^* ，价格按

$$p_{t+1} = p_t + \gamma(p^* - p_t) = (1 - \gamma)p_t + \gamma p^*$$

调整。误差满足

$$p_{t+1} - p^* = (1 - \gamma)(p_t - p^*).$$

若 $0 < \gamma < 2$, 则 $|1 - \gamma| < 1$, 价格收敛; 若 $0 < \gamma < 1$, 单调收敛; 若 $1 < \gamma < 2$, 振荡收敛。

例 25.15 (债务规则稳定性). 设

$$b_{t+1} = (1 + r)b_t - \phi(b_t - \bar{b}),$$

其中 ϕ 是财政反应强度。稳态为 $\bar{b}$ 附近, 误差满足

$$b_{t+1} - \bar{b} = (1 + r - \phi)(b_t - \bar{b}).$$

稳定需要

$$|1 + r - \phi| < 1.$$

也就是财政反应既要足够强, 又不能强到产生过度振荡。

25.10 本章小结

差分方程描述离散时间状态演化。线性和仿射方程可以显式求解, 稳定性由误差系数或矩阵特征值控制。非线性系统在稳态附近可以线性化, Jacobian 的特征值决定局部动态。相图和鞍路径提供了理解跳变量和均衡路径选择的工具。下一章将把状态转移和目标函数结合起来, 进入确定性动态规划。

25.11 Exercises

习题 25.1. 定义一阶差分方程。

习题 25.2. 定义稳态。

习题 25.3. 对 $x_{t+1} = 0.7x_t$, 求 x_t 。

习题 25.4. 对 $x_{t+1} = 0.8x_t + 4$, 求稳态。

习题 25.5. 证明仿射方程 $x_{t+1} = ax_t + b$ 的误差形式。

习题 25.6. 说明 $|a| < 1$ 时 $x_{t+1} = ax_t + b$ 收敛。

习题 25.7. 解释 $a < 0$ 且 $|a| < 1$ 时为什么振荡收敛。

- 习题 25.8. 给出一个爆炸路径的标量例子。
- 习题 25.9. 定义局部稳定。
- 习题 25.10. 定义全局稳定。
- 习题 25.11. 陈述一维局部稳定的斜率条件。
- 习题 25.12. 对 $f(x) = 0.5x + 1$, 判断稳态稳定性。
- 习题 25.13. 对蛛网模型 $p_{t+1} = a - bp_t$, 给出稳定条件。
- 习题 25.14. 写出 Solow 映射的正稳态。
- 习题 25.15. 计算 Solow 映射在正稳态的导数。
- 习题 25.16. 定义线性系统 $x_{t+1} = Ax_t$ 。
- 习题 25.17. 定义谱半径。
- 习题 25.18. 说明可对角化线性系统的稳定条件。
- 习题 25.19. 设 $A = \text{diag}(0.6, 0.9)$ 。判断稳定性。
- 习题 25.20. 设 $A = \text{diag}(0.8, 1.1)$ 。判断稳定性并解释。
- 习题 25.21. 解释鞍型系统的含义。
- 习题 25.22. 说明仿射系统如何去稳态化。
- 习题 25.23. 定义非线性动态系统。
- 习题 25.24. 解释 Jacobian 在线性化中的作用。
- 习题 25.25. 推导 $x_{t+1} = F(x_t)$ 在稳态附近的一阶近似。
- 习题 25.26. 设 $x_{t+1} = x_t^2$ 。求稳态并判断 0 的局部稳定性。
- 习题 25.27. 设 $x_{t+1} = 2x_t - x_t^2$ 。求 0 和 1 两个稳态的局部稳定性。
- 习题 25.28. 定义相图中的不变曲线 $x_{t+1} = x_t$ 。
- 习题 25.29. 说明鞍路径稳定的经济含义。
- 习题 25.30. 对 $p_{t+1} = p_t + \gamma(p^* - p_t)$, 给出稳定条件。
- 习题 25.31. 对债务规则 $b_{t+1} = (1+r)b_t - \phi(b_t - \bar{b})$, 给出稳定条件。
- 习题 25.32. 解释为什么过强调整可能导致振荡。
- 习题 25.33. 说明差分方程如何连接动态规划。
- 习题 25.34. 比较稳定性分析和最优化分析的区别。
- 习题 25.35. 用一句话说明本章如何为 Ch25 做准备。

25.12 Solutions

本章解答的主线是把动态路径转化为误差动态。若误差趋于零，路径收敛到稳态；若误差放大，路径发散。

解答 25.1. 一阶差分方程是形如

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

的递推关系。给定 x_0 ，它决定后续路径。

解答 25.2. 稳态 x^* 满足

$$x^* = f(x^*).$$

若系统到达稳态，则下一期仍停在该点。

解答 25.3. 由线性递推，

$$x_t = 0.7^t x_0.$$

因为 $0.7^t \rightarrow 0$ ，若 x_0 有限，则 $x_t \rightarrow 0$ 。

解答 25.4. 稳态满足

$$x^* = 0.8x^* + 4.$$

所以

$$0.2x^* = 4, \quad x^* = 20.$$

解答 25.5. 稳态满足 $x^* = ax^* + b$ 。两式相减：

$$x_{t+1} - x^* = a(x_t - x^*).$$

于是

$$x_t - x^* = a^t(x_0 - x^*).$$

解答 25.6. 若 $|a| < 1$ ，则 $a^t \rightarrow 0$ 。由

$$x_t - x^* = a^t(x_0 - x^*)$$

可得 $x_t \rightarrow x^*$ 。

解答 25.7. 当 $a < 0$ 时，误差

$$x_t - x^* = a^t(x_0 - x^*)$$

符号随 t 交替；当 $|a| < 1$ 时，误差绝对值趋于零。因此路径在稳态两侧振荡收敛。

解答 25.8. 例如

$$x_{t+1} = 1.2x_t.$$

若 $x_0 \neq 0$, 则 $x_t = 1.2^t x_0$, 绝对值发散。

解答 25.9. 局部稳定是指存在稳态附近的邻域, 使得从该邻域内初值出发的路径收敛到稳态。

解答 25.10. 全局稳定是指从允许状态空间内任意初值出发, 路径都收敛到同一个稳态。

解答 25.11. 若 f 在稳态 x^* 附近可微, 且

$$|f'(x^*)| < 1,$$

则 x^* 局部稳定。

解答 25.12. 稳态满足

$$x^* = 0.5x^* + 1,$$

所以 $x^* = 2$ 。由于 $f'(x) = 0.5$, 且 $|0.5| < 1$, 稳态局部稳定; 该线性系统实际上全局稳定。

解答 25.13. 误差满足

$$p_{t+1} - p^* = -b(p_t - p^*).$$

稳定要求

$$|-b| < 1,$$

即 $b < 1$ 。

解答 25.14. Solow 映射为

$$k_{t+1} = sAk_t^\alpha + (1 - \delta)k_t.$$

正稳态满足

$$\delta k^* = sA(k^*)^\alpha,$$

所以

$$k^* = \left(\frac{sA}{\delta} \right)^{1/(1-\alpha)}.$$

解答 25.15.

$$f'(k) = sA\alpha k^{\alpha-1} + 1 - \delta.$$

在稳态,

$$sA(k^*)^{\alpha-1} = \delta.$$

所以

$$f'(k^*) = \alpha\delta + 1 - \delta = 1 - \delta(1 - \alpha).$$

解答 25.16. 线性系统是

$$x_{t+1} = Ax_t,$$

其中 $x_t \in \mathbb{R}^n$, A 是固定矩阵。

解答 25.17. 谱半径定义为

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i|,$$

其中 λ_i 是矩阵 A 的特征值。

解答 25.18. 若 A 可对角化, 且所有特征值都满足

$$|\lambda_i| < 1,$$

则 $A^t \rightarrow 0$, 所以 $x_t = A^t x_0 \rightarrow 0$. 零稳态稳定。

解答 25.19. 特征值为 0.6 和 0.9, 都在单位圆内。因此零稳态全局稳定。

解答 25.20. 特征值为 0.8 和 1.1。第二个特征值绝对值大于 1, 所以一般初值下系统不收敛到零。只有位于稳定方向的初值才会收敛。

解答 25.21. 鞍型系统同时有稳定方向和不稳定方向。路径要收敛到稳态, 初值或跳变量必须恰好落在稳定路径上。

解答 25.22. 若

$$x_{t+1} = Ax_t + b$$

且 $x^* = Ax^* + b$, 令 $\hat{x}_t = x_t - x^*$ 。则

$$\hat{x}_{t+1} = A\hat{x}_t.$$

因此稳定性由 A 决定。

解答 25.23. 非线性动态系统写为

$$x_{t+1} = F(x_t),$$

其中 F 可以是非线性映射。

解答 25.24. Jacobian $J = DF(x^*)$ 是稳态附近的一阶线性近似矩阵。它决定小偏离如何在下一期近似演化。

解答 25.25. 由 Taylor 展开,

$$F(x_t) = F(x^*) + F'(x^*)(x_t - x^*) + o(|x_t - x^*|).$$

因 $F(x^*) = x^*$,

$$x_{t+1} - x^* \approx F'(x^*)(x_t - x^*).$$

解答 25.26. 稳态满足 $x = x^2$, 所以 $x^* = 0$ 或 1 。对 $f(x) = x^2$, 有 $f'(x) = 2x$ 。在 0 处, $|f'(0)| = 0 < 1$, 所以 0 局部稳定。

解答 25.27. 稳态满足

$$x = 2x - x^2,$$

即 $x(1 - x) = 0$, 所以稳态为 $0, 1$ 。导数为

$$f'(x) = 2 - 2x.$$

在 0 处, $|f'(0)| = 2 > 1$, 不稳定。在 1 处, $|f'(1)| = 0 < 1$, 局部稳定。

解答 25.28. 曲线 $x_{t+1} = x_t$ 是使变量 x 下一期不变的点集。相图用这类曲线划分变量上升或下降的区域。

解答 25.29. 鞍路径稳定意味着稳态附近只有某些方向收敛。若存在跳变量, 均衡可能选择跳变量初值, 使经济落在稳定路径上。

解答 25.30. 误差满足

$$p_{t+1} - p^* = (1 - \gamma)(p_t - p^*).$$

稳定要求

$$|1 - \gamma| < 1,$$

即

$$0 < \gamma < 2.$$

解答 25.31. 误差满足

$$b_{t+1} - \bar{b} = (1 + r - \phi)(b_t - \bar{b}).$$

稳定条件为

$$|1 + r - \phi| < 1.$$

解答 25.32. 如果调整系数为负且绝对值小于 1 , 误差会在稳态两侧来回变号并逐渐缩小。若绝对值大于 1 , 过度调整会导致振荡发散。

解答 25.33. 动态规划中的状态转移通常写为

$$x_{t+1} = g(x_t, a_t).$$

差分方程分析帮助理解给定政策下状态如何收敛、发散或进入稳态。

解答 25.34. 稳定性分析关注给定动态规则下路径如何运动; 最优化分析关注主体如何选择规则或行动来最大化目标。动态规划会把二者结合起来。

解答 25.35. 本章提供状态转移、稳态和稳定性的语言, Ch25 将在这些状态动态上加入目标函数并建立 Bellman 方程。

25.13 Computation Lab

本章计算实验关注如何用简单迭代和矩阵计算观察动态稳定性。

Lab 1: 标量迭代

给定映射 f 和初值 x_0 , 递推

$$x_{t+1} = f(x_t).$$

记录误差 $|x_t - x^*|$ 。若误差近似按固定比例下降, 可估计收敛速度。

Lab 2: 蛛网图

对一维映射 $x_{t+1} = f(x_t)$, 在图上画 $y = f(x)$ 和 $y = x$ 。从 x_0 出发, 交替画竖线和横线, 得到蛛网路径。它直观显示单调收敛、振荡收敛或发散。

Lab 3: 特征值稳定性

给定矩阵 A , 计算特征值 λ_i 。若所有 $|\lambda_i| < 1$, 线性系统稳定; 若某些大于 1, 存在不稳定方向。

Lab 4: 资本动态模拟

对

$$k_{t+1} = sAk_t^\alpha + (1 - \delta)k_t,$$

先计算稳态 k^* , 再从不同 k_0 出发模拟路径。比较不同参数 s, A, δ, α 对收敛速度和稳态的影响。

Lab 5: 债务稳定规则

对

$$b_{t+1} - \bar{b} = (1 + r - \phi)(b_t - \bar{b}),$$

改变 ϕ 。当 $0 < \phi < r + 2$ 且满足 $|1 + r - \phi| < 1$ 时债务稳定; 若 ϕ 太小或太大, 路径可能发散或剧烈振荡。

第二十六章 确定性动态规划

26.1 从状态转移到最优路径

Ch24 研究给定转移方程

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

时状态如何运动。动态规划把行动放回模型：今天的选择不仅给出今天的收益，也改变明天的状态。因此，一个确定性动态规划问题通常写成

$$\max_{\{a_t\}_{t \geq 0}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, a_t)$$

subject to

$$a_t \in \Gamma(x_t), \quad x_{t+1} = g(x_t, a_t), \quad x_0 \text{ given},$$

其中 x_t 是状态， a_t 是行动， $\Gamma(x_t)$ 是可行行动集合， g 是确定性状态转移， $\beta \in (0, 1)$ 是折现因子。

定义 26.1 (确定性动态规划问题). 给定状态空间 X 、行动空间 A 、可行对应 $\Gamma : X \rightrightarrows A$ 、收益函数 $r : X \times A \rightarrow \mathbb{R}$ 、转移函数 $g : X \times A \rightarrow X$ 和折现因子 $\beta \in (0, 1)$ ，确定性动态规划问题是从初始状态 x_0 出发选择可行行动序列，使折现回报

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, a_t)$$

最大。

定义 26.2 (策略). 策略是函数

$$\pi : X \rightarrow A, \quad \pi(x) \in \Gamma(x).$$

它规定在每个状态 x 下采取什么行动。

例 26.1 (蛋糕消费问题). 设 $x_t \geq 0$ 是剩余蛋糕, 行动 $c_t \in [0, x_t]$ 是本期消费, 收益为 $u(c_t)$, 转移为

$$x_{t+1} = x_t - c_t.$$

序列问题为

$$\max_{\{c_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad \text{s.t.} \quad 0 \leq c_t \leq x_t, \quad x_{t+1} = x_t - c_t.$$

这里状态 x_t 记录未来还能消费多少, 行动 c_t 决定今天享受和未来资源之间的分配。

例 26.2 (确定性资本积累). 设 k_t 是资本, c_t 是消费, 产出为 $f(k_t)$, 折旧率为 δ . 资源约束为

$$c_t + k_{t+1} = f(k_t) + (1 - \delta)k_t.$$

若把行动设为 c_t , 则转移函数是

$$g(k, c) = f(k) + (1 - \delta)k - c.$$

可行集合为

$$\Gamma(k) = \{c : 0 \leq c \leq f(k) + (1 - \delta)k\}.$$

动态规划的作用是把无限多个消费选择压缩成一个递归选择规则。

例 26.3 (状态变量不能漏掉). 若企业有机器年龄 m_t 和生产率 z_t , 维修决策影响 m_{t+1} , 而利润同时依赖 z_t , 则只把机器年龄当作状态通常不够。正确状态至少应包含

$$x_t = (m_t, z_t),$$

否则相同的 m_t 会对应不同的当前收益和未来选择。动态规划的第一步不是写 Bellman 方程, 而是找出使未来问题独立于过去历史的状态。

26.2 值函数与 Bellman 方程

定义 26.3 (值函数). 值函数 $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为从状态 x 出发能达到的最大折现回报:

$$V(x) = \sup_{\{a_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, a_t),$$

其中 $x_0 = x$, 且路径满足 $a_t \in \Gamma(x_t)$ 、 $x_{t+1} = g(x_t, a_t)$ 。

定义 26.4 (Bellman 方程). 值函数若满足

$$V(x) = \sup_{a \in \Gamma(x)} \{r(x, a) + \beta V(g(x, a))\},$$

则称它满足 Bellman 方程。

定义 26.5 (Bellman 算子). Bellman 算子 T 对函数 $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ 的作用为

$$(TV)(x) = \sup_{a \in \Gamma(x)} \{r(x, a) + \beta V(g(x, a))\}.$$

Bellman 方程就是固定点方程

$$V = TV.$$

例 26.4 (蛋糕问题的 Bellman 方程). 蛋糕问题的 Bellman 方程为

$$V(x) = \max_{0 \leq c \leq x} \{u(c) + \beta V(x - c)\}.$$

如果选择今天消费 c , 剩余 $x - c$ 成为明天的状态, 因此未来价值是 $V(x - c)$ 。

例 26.5 (储蓄问题的 Bellman 方程). 设财富 w 满足

$$w' = (1 + r)(w - c) + y,$$

且 $0 \leq c \leq w$ 。Bellman 方程是

$$V(w) = \max_{0 \leq c \leq w} \{u(c) + \beta V((1 + r)(w - c) + y)\}.$$

这个方程把跨期预算约束变成状态转移: 消费少一点提高 w' , 但降低当期效用。

定理 26.1 (确定性最优性原理). 若从状态 x 出发的最优路径存在, 且第一期最优行动为 a^* , 下一期状态为 $x' = g(x, a^*)$, 则从 x' 开始的尾部路径必须是从 x' 出发的最优路径。

证明. 设最优路径的尾部从 x' 出发不是最优的。则存在另一条从 x' 出发的可行尾部路径, 给出更高的折现尾部回报。把第一期行动 a^* 保持不变, 并用这条更好的尾部路径替换原尾部, 就得到一条从 x 出发的可行路径, 而且总回报更高。这与原路径最优矛盾。因此尾部路径必须最优。□

例 26.6 (两期问题中的尾部最优). 设只有两期, 资源 $x_0 = 10$, 效用为 $\sqrt{c}$, 无生产, 必须 $c_0 + c_1 = 10$ 。若某个最优计划选择 $c_0 = 4$, 则剩余状态为 $x_1 = 6$ 。第二期没有未来, 所以尾部最优必然是 $c_1 = 6$ 。若尾部没有把剩余资源全部消费掉, 就可以提高第二期效用而不影响第一期。

26.3 Bellman 算子的压缩性

令 $B(X)$ 表示 X 上所有有界实值函数, 并配以上确界范数

$$\|V\|_\infty = \sup_{x \in X} |V(x)|.$$

本章先在有界收益的折现问题中建立最核心的存在唯一性结论。

命题 26.1 (Bellman 算子的单调性). 若 $V(x) \leq W(x)$ 对所有 $x \in X$ 成立, 则

$$TV(x) \leq TW(x)$$

对所有 $x \in X$ 成立。

证明. 对任意 $a \in \Gamma(x)$, 有

$$r(x, a) + \beta V(g(x, a)) \leq r(x, a) + \beta W(g(x, a)).$$

两边对可行行动取上确界, 即得 $TV(x) \leq TW(x)$ 。 □

命题 26.2 (Bellman 算子的折现性). 对任意常数 m ,

$$T(V + m)(x) = TV(x) + \beta m.$$

证明. 直接计算:

$$T(V + m)(x) = \sup_{a \in \Gamma(x)} \{r(x, a) + \beta[V(g(x, a)) + m]\} = TV(x) + \beta m.$$

□

定理 26.2 (Bellman 压缩定理). 若收益 r 有界且 $\beta \in (0, 1)$, 则 $T: B(X) \rightarrow B(X)$ 是压缩映射:

$$\|TV - TW\|_\infty \leq \beta \|V - W\|_\infty.$$

因此 Bellman 方程 $V = TV$ 在 $B(X)$ 中至多有一个固定点; 若 T 保持 $B(X)$, 则固定点存在唯一, 且值函数迭代 $V_{n+1} = TV_n$ 从任意初值收敛到它。

证明. 令 $d = \|V - W\|_\infty$ 。则

$$W - d \leq V \leq W + d.$$

由单调性和折现性,

$$T(W - d) \leq TV \leq T(W + d),$$

即

$$TW - \beta d \leq TV \leq TW + \beta d.$$

所以对所有 x ,

$$|TV(x) - TW(x)| \leq \beta d.$$

取上确界得到压缩不等式。存在唯一性和迭代收敛由 Banach 压缩映射定理给出。 □

例 26.7 (一状态问题中的压缩). 只有一个状态, 行动 $a \in \{0, 1\}$, 收益 $r(a) = a$, 状态不变。Bellman 方程是

$$V = \max\{0 + \beta V, 1 + \beta V\} = 1 + \beta V.$$

因此

$$V = \frac{1}{1 - \beta}.$$

如果 $\beta = 0.9$, 值函数为 10。值函数迭代从 $V_0 = 0$ 开始给出 $1, 1.9, 2.71, \dots$, 每轮误差大约乘以 0.9。

例 26.8 (确定性投资的价值函数迭代). 设状态 $k \in \{0, 1, 2\}$, 行动 $i \in \{0, 1\}$, 可行条件 $i \leq 2 - k$, 收益为 $r(k, i) = k - i$, 转移为 $k' = \min\{2, k + i\}$, $\beta = 1/2$ 。若从 $V_0(k) = 0$ 开始, 则

$$V_1(k) = \max_i r(k, i).$$

所以

$$V_1(0) = 0, \quad V_1(1) = 1, \quad V_1(2) = 2.$$

第二轮计算时, 投资的未来价值进入目标:

$$V_2(1) = \max\{1 + \frac{1}{2}V_1(1), 0 + \frac{1}{2}V_1(2)\} = \max\{1.5, 1\} = 1.5.$$

这个例子展示了值函数迭代如何把未来收益逐步传回当前状态。

26.4 策略评价与策略改进

给定策略 π , 不再优化, 只沿着

$$x_{t+1} = g(x_t, \pi(x_t))$$

计算回报。

定义 26.6 (策略值函数). 策略 π 的值函数为

$$V_\pi(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, \pi(x_t)),$$

其中 $x_0 = x$, $x_{t+1} = g(x_t, \pi(x_t))$ 。

例 26.9 (固定储蓄率的策略评价). 设收入恒为 y , 财富转移为

$$w' = (1 + r)(w - c) + y.$$

给定固定消费比例策略 $c = \alpha w$ 。则闭环系统为

$$w' = (1 + r)(1 - \alpha)w + y.$$

如果 $(1 + r)(1 - \alpha) < 1$ ，财富路径收敛到稳态

$$w^* = \frac{y}{1 - (1 + r)(1 - \alpha)}.$$

策略评价问的是沿这条规则得到多少效用，而不是这条规则是否最优。

命题 26.3 (策略改进引理). 若策略 π' 满足对所有 x ,

$$r(x, \pi'(x)) + \beta V_\pi(g(x, \pi'(x))) \geq V_\pi(x),$$

则

$$V_{\pi'}(x) \geq V_\pi(x)$$

对所有 x 成立。

证明. 从不等式出发并沿 π' 迭代。记 $x_{t+1} = g(x_t, \pi'(x_t))$ ，则

$$V_\pi(x_0) \leq r(x_0, \pi'(x_0)) + \beta V_\pi(x_1).$$

继续替换 $V_\pi(x_1)$ ，得到

$$V_\pi(x_0) \leq \sum_{t=0}^n \beta^t r(x_t, \pi'(x_t)) + \beta^{n+1} V_\pi(x_{n+1}).$$

若收益和值函数有界，令 $n \rightarrow \infty$ ，最后一项趋于零，右边收敛到 $V_{\pi'}(x_0)$ 。故 $V_{\pi'}(x_0) \geq V_\pi(x_0)$ 。□

例 26.10 (贪婪改进). 在三状态投资例中，若当前策略在 $k = 1$ 选择不投资，且已算出 $V_\pi(1) = 1.4$ 、 $V_\pi(2) = 3$ ，则比较

$$\text{不投资: } 1 + \beta V_\pi(1), \quad \text{投资: } 0 + \beta V_\pi(2).$$

若 $\beta = 0.8$ ，两者分别为 2.12 与 2.4。因此在 $k = 1$ 改为投资会提高基于 V_π 的一步回报，策略改进引理说明新策略不劣。

26.5 Euler 方程与包络条件

Bellman 方程给出递归表达：在光滑内部解中，它还能导出熟悉的一阶条件。考虑

$$V(x) = \max_{a \in \Gamma(x)} \{r(x, a) + \beta V(g(x, a))\}.$$

若最优行动 $a = \pi(x)$ 是内部解，则一阶条件为

$$r_a(x, a) + \beta V_x(g(x, a))g_a(x, a) = 0.$$

命题 26.4 (确定性 Euler 方程). 若问题足够光滑，且最优选择为内部解，则最优路径满足

$$r_a(x_t, a_t) + \beta V_x(x_{t+1})g_a(x_t, a_t) = 0.$$

若再用下一期包络条件消去 $V_x(x_{t+1})$ ，可得到只含相邻期变量的 Euler 方程。

证明. 在状态 x_t 下，Bellman 右侧对行动 a_t 最大化。内部解的一阶条件就是

$$\frac{\partial}{\partial a} \{r(x_t, a) + \beta V(g(x_t, a))\} = 0.$$

链式法则给出

$$r_a(x_t, a_t) + \beta V_x(g(x_t, a_t))g_a(x_t, a_t) = 0.$$

又 $x_{t+1} = g(x_t, a_t)$ ，故得到结论。 □

命题 26.5 (包络条件). 在光滑内部情形下，

$$V_x(x) = r_x(x, \pi(x)) + \beta V_x(g(x, \pi(x)))g_x(x, \pi(x)).$$

证明. 对 Bellman 方程右侧关于状态 x 求导。由于 $\pi(x)$ 是最优行动，行动变化带来的一阶效应由一阶条件抵消，剩下状态的直接效应：

$$V_x(x) = r_x(x, \pi(x)) + \beta V_x(g(x, \pi(x)))g_x(x, \pi(x)).$$

□

例 26.11 (对数蛋糕问题). 设

$$V(x) = \max_{0 < c < x} \{\log c + \beta V(x - c)\}.$$

猜测

$$V(x) = A + B \log x.$$

则

$$V(x) = \max_c \{\log c + \beta A + \beta B \log(x - c)\}.$$

一阶条件为

$$\frac{1}{c} - \frac{\beta B}{x - c} = 0,$$

所以

$$c = \frac{x}{1 + \beta B}.$$

比较 $\log x$ 的系数可得

$$B = 1 + \beta B, \quad B = \frac{1}{1 - \beta}.$$

因此最优消费比例为

$$\frac{c}{x} = 1 - \beta.$$

这说明折现越低, 越愿意把蛋糕留给未来。

例 26.12 (增长模型的 Euler 方程). 确定性增长问题为

$$V(k) = \max_{0 \leq c \leq f(k) + (1 - \delta)k} \{u(c) + \beta V(f(k) + (1 - \delta)k - c)\}.$$

令

$$k' = f(k) + (1 - \delta)k - c.$$

消费的一阶条件为

$$u'(c) = \beta V_k(k').$$

下一期包络条件为

$$V_k(k') = u'(c')\{f'(k') + 1 - \delta\}.$$

合并得到

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})\{f'(k_{t+1}) + 1 - \delta\}.$$

这就是确定性增长模型的 Euler 方程。

例 26.13 (借贷约束下的角点). 若储蓄 $a' \geq 0$, 预算为

$$c + a' = Ra + y,$$

则 Bellman 方程为

$$V(a) = \max_{0 \leq a' \leq Ra + y} \{u(Ra + y - a') + \beta V(a')\}.$$

内部解满足

$$u'(c) = \beta V_a(a').$$

但若约束绑定 $a' = 0$ ，一阶等式通常变成不等式：

$$u'(c) \geq \beta V_a(0).$$

经济含义是主体想借更多，但被下界约束挡住。

26.6 典型确定性模型

例 26.14 (机器替换问题). 机器年龄为 m 。若继续使用，收益为 $q(m)$ ，下一期年龄为 $m+1$ ；若替换，支付成本 C ，收益为 $q(0) - C$ ，下一期年龄为 1。Bellman 方程为

$$V(m) = \max\{q(m) + \beta V(m+1), q(0) - C + \beta V(1)\}.$$

当旧机器带来的当前收益损失和未来损失足够大时，替换成为最优。

例 26.15 (确定性资产积累). 家庭选择下一期资产 a' ：

$$V(a) = \max_{a' \geq a} \{u(Ra + y - a') + \beta V(a')\}.$$

状态是资产 a ，行动是下一期资产 a' ，消费由预算约束残差决定。这个写法常比直接把消费作为行动更方便，因为状态转移简单地是 $a_{t+1} = a'$ 。

例 26.16 (不可逆投资). 若资本只能增加不能减少，则行动 $i \geq 0$ ，

$$k' = (1 - \delta)k + i.$$

不可逆约束会让最优投资出现等待区域：当当前资本已经太高时，企业不能卖掉资本，只能通过折旧慢慢调整。Bellman 方程仍然成立，但 Euler 等式会被互补松弛条件替代。

例 26.17 (确定性 Ramsey 问题的递归形式). 社会规划者最大化

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

subject to

$$c_t + k_{t+1} = f(k_t) + (1 - \delta)k_t.$$

递归形式是

$$V(k) = \max_{0 \leq k' \leq f(k) + (1-\delta)k} \{u(f(k) + (1 - \delta)k - k') + \beta V(k')\}.$$

这里选择 k' 而不是 c ，能让转移 $k_{t+1} = k'$ 变得最干净。

26.7 通往随机动态规划

本章的核心结构是

$$V(x) = \max_{a \in \Gamma(x)} \{r(x, a) + \beta V(g(x, a))\}.$$

Ch26 会把确定性转移 $g(x, a)$ 替换为 Markov 转移:

$$V(x) = \max_{a \in \Gamma(x)} \left\{ r(x, a) + \beta \int V(x') Q(dx' | x, a) \right\}.$$

因此, 本章已经建立了最重要的递归思维: 状态总结过去, 行动权衡今天和未来, Bellman 算子把无限期问题变成固定点问题。

26.8 Exercises

习题 26.1. 定义确定性动态规划问题的状态、行动、收益和转移。

习题 26.2. 解释为什么状态变量必须包含所有影响未来可行性和收益的信息。

习题 26.3. 写出蛋糕消费问题的 Bellman 方程。

习题 26.4. 写出确定性资本积累问题的 Bellman 方程, 其中行动为消费。

习题 26.5. 把确定性资本积累问题改写为选择下一期资本 k' 的 Bellman 方程。

习题 26.6. 证明 Bellman 算子的单调性。

习题 26.7. 证明 Bellman 算子的折现性。

习题 26.8. 用单调性和折现性证明 Bellman 算子是压缩映射。

习题 26.9. 说明 $\beta < 1$ 在压缩映射证明中的作用。

习题 26.10. 一状态问题满足 $V = 2 + 0.8V$ 。求 V 。

习题 26.11. 一状态问题有两个行动, 收益分别为 1 和 3, 状态不变, $\beta = 0.5$ 。求最优值。

习题 26.12. 设 $V_0 = 0$, 一状态问题为 $TV = 1 + \beta V$ 。求 V_1, V_2, V_3 。

习题 26.13. 给定策略 π , 定义 V_π 。

习题 26.14. 证明策略值函数满足递归方程。

习题 26.15. 陈述并证明策略改进引理。

习题 26.16. 在两状态有限模型中, 说明策略评价为何可化为线性方程。

习题 26.17. 对 $V(x) = \max_{0 \leq c \leq x} \{\sqrt{c} + \beta V(x - c)\}$, 写出内部一阶条件。

习题 26.18. 对增长模型推导 Euler 方程。

习题 26.19. 解释包络条件的经济含义。

习题 26.20. 说明借贷约束绑定时 Euler 等式为何变成不等式。

习题 26.21. 设 $V(x) = A + B \log x$ 解对数蛋糕问题。求 B 。

习题 26.22. 在对数蛋糕问题中求最优消费比例。

习题 26.23. 写出机器替换问题的 Bellman 方程。

习题 26.24. 解释不可逆投资为什么会产生等待区域。

习题 26.25. 区分值函数迭代和策略迭代。

习题 26.26. 若 $\|V_0 - V^*\|_\infty \leq 10$ 、 $\beta = 0.9$, 给出第 n 次迭代误差上界。

习题 26.27. 若 $\beta = 0.5$, 要使误差上界低于 0.01, 需要多少次迭代可保证?

习题 26.28. 说明确定性动态规划和 Ch26 随机动态规划的主要差别。

习题 26.29. 给出一个行动影响未来状态但不影响当前收益的例子。

习题 26.30. 给出一个行动影响当前收益但不影响未来状态的例子。

习题 26.31. 若 r 无界, 为什么本章的简单压缩定理不能直接套用?

习题 26.32. 解释为什么最大值存在通常需要紧致性和连续性条件。

习题 26.33. 在资产积累问题中, 为什么选择 a' 作为行动常比选择 c 更方便?

习题 26.34. 写出确定性 Ramsey 问题的递归形式。

习题 26.35. 用一句话概括 Bellman 方程的学习逻辑。

26.9 Solutions

本章解答的关键是始终追问三件事：状态是否充分，行动是否可行，今天的选择如何改变明天的状态。

解答 26.1. 状态 x 总结与未来有关的信息；行动 a 是当前可选控制；收益 $r(x, a)$ 是当期回报；转移 $g(x, a)$ 给出下一期状态。确定性问题没有随机冲击，因此给定 x 和 a 后， $x' = g(x, a)$ 是确定的。

解答 26.2. 如果状态遗漏了影响未来的变量，则相同状态会对应不同的未来可行集或收益。这样从“同一个状态”出发的问题并不相同，Bellman 方程无法成立。状态必须让未来问题只依赖当前状态，而不依赖更早历史。

解答 26.3. 若状态为剩余蛋糕 x ，消费 $c \in [0, x]$ ，转移 $x' = x - c$ ，则

$$V(x) = \max_{0 \leq c \leq x} \{u(c) + \beta V(x - c)\}.$$

解答 26.4. 若行动为消费 c ，资源为 $f(k) + (1 - \delta)k$ ，则

$$V(k) = \max_{0 \leq c \leq f(k) + (1 - \delta)k} \{u(c) + \beta V(f(k) + (1 - \delta)k - c)\}.$$

解答 26.5. 令行动为 k' 。消费由

$$c = f(k) + (1 - \delta)k - k'$$

决定。Bellman 方程为

$$V(k) = \max_{0 \leq k' \leq f(k) + (1 - \delta)k} \{u(f(k) + (1 - \delta)k - k') + \beta V(k')\}.$$

解答 26.6. 若 $V \leq W$ ，则对任意可行 a ，

$$r(x, a) + \beta V(g(x, a)) \leq r(x, a) + \beta W(g(x, a)).$$

对 a 取上确界，得 $TV(x) \leq TW(x)$ 。

解答 26.7. 对常数 m ，

$$T(V + m)(x) = \sup_a \{r(x, a) + \beta V(g(x, a)) + \beta m\} = TV(x) + \beta m.$$

解答 26.8. 令 $d = \|V - W\|_\infty$ 。则 $W - d \leq V \leq W + d$ 。由单调性和折现性，

$$TW - \beta d \leq TV \leq TW + \beta d.$$

所以

$$\|TV - TW\|_\infty \leq \beta d = \beta \|V - W\|_\infty.$$

解答 26.9. $\beta < 1$ 使误差被严格缩小。如果 $\beta = 1$, 只能得到非扩张映射, 压缩映射定理不能保证唯一固定点和从任意初值收敛。

解答 26.10.

$$V = 2 + 0.8V \Rightarrow 0.2V = 2 \Rightarrow V = 10.$$

解答 26.11. 状态不变, 所以总是选收益较高的行动 3。值函数满足

$$V = 3 + 0.5V,$$

故

$$V = 6.$$

解答 26.12. 由 $V_{n+1} = 1 + \beta V_n$ 且 $V_0 = 0$,

$$V_1 = 1, \quad V_2 = 1 + \beta, \quad V_3 = 1 + \beta + \beta^2.$$

解答 26.13. 给定策略 π 后, 策略值函数为

$$V_\pi(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, \pi(x_t)),$$

其中 $x_0 = x$, $x_{t+1} = g(x_t, \pi(x_t))$ 。

解答 26.14. 把第一期收益和剩余尾部收益分开:

$$V_\pi(x) = r(x, \pi(x)) + \beta \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} r(x_t, \pi(x_t)).$$

尾部从 $x_1 = g(x, \pi(x))$ 开始, 因此

$$V_\pi(x) = r(x, \pi(x)) + \beta V_\pi(g(x, \pi(x))).$$

解答 26.15. 若

$$r(x, \pi'(x)) + \beta V_\pi(g(x, \pi'(x))) \geq V_\pi(x),$$

沿 π' 反复代入, 得

$$V_\pi(x_0) \leq \sum_{t=0}^n \beta^t r(x_t, \pi'(x_t)) + \beta^{n+1} V_\pi(x_{n+1}).$$

有界性和 $\beta < 1$ 使最后一项趋于零, 故 $V_\pi(x_0) \leq V_{\pi'}(x_0)$ 。

解答 26.16. 有限状态下, 给定策略 π 诱导收益向量 r_π 和确定性转移矩阵 P_π 。策略值满足

$$V_\pi = r_\pi + \beta P_\pi V_\pi,$$

即

$$(I - \beta P_\pi)V_\pi = r_\pi.$$

这是线性方程组。

解答 26.17. 内部解对 c 求导:

$$\frac{1}{2\sqrt{c}} - \beta V'(x - c) = 0.$$

第一项是当前边际效用, 第二项是留下蛋糕的折现边际价值。

解答 26.18. Bellman 方程为

$$V(k) = \max_c \{u(c) + \beta V(f(k) + (1 - \delta)k - c)\}.$$

一阶条件:

$$u'(c_t) = \beta V_k(k_{t+1}).$$

下一期包络:

$$V_k(k_{t+1}) = u'(c_{t+1})(f'(k_{t+1}) + 1 - \delta).$$

合并得

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})(f'(k_{t+1}) + 1 - \delta).$$

解答 26.19. 包络条件说明状态多一单位时, 值函数增加多少。它包含当前收益的直接变化, 以及状态通过转移函数影响未来价值的间接变化。

解答 26.20. 当约束绑定时, 主体无法选择无约束一阶条件要求的行动。此时最优性要求可行方向上不能提高目标, 所以边际条件变成不等式, 而不是等式。

解答 26.21. 对数蛋糕问题中比较 $\log x$ 的系数:

$$B = 1 + \beta B.$$

因此

$$B = \frac{1}{1 - \beta}.$$

解答 26.22. 一阶条件给出

$$c = \frac{x}{1 + \beta B}.$$

代入 $B = 1/(1 - \beta)$, 得

$$c = (1 - \beta)x.$$

解答 26.23. 若继续使用机器:

$$q(m) + \beta V(m + 1).$$

若替换:

$$q(0) - C + \beta V(1).$$

所以

$$V(m) = \max\{q(m) + \beta V(m + 1), q(0) - C + \beta V(1)\}.$$

解答 26.24. 不可逆投资要求 $i \geq 0$, 因此资本太高时不能立即降到理想水平, 只能等待折旧。等待区域中, 调整的边际收益不足以覆盖投资成本, 所以企业选择零投资。

解答 26.25. 值函数迭代反复更新 $V_{n+1} = TV_n$ 。策略迭代先评价一个策略, 再用评价结果改进策略。前者稳健简单, 后者在有限状态中常更快。

解答 26.26. 压缩映射给出

$$\|V_n - V^*\|_\infty \leq \beta^n \|V_0 - V^*\|_\infty.$$

所以误差上界为

$$10(0.9)^n.$$

解答 26.27. 需要

$$10(0.5)^n < 0.01,$$

即

$$(0.5)^n < 0.001.$$

因为 $2^{10} = 1024$, 所以 $n = 10$ 次足够。

解答 26.28. 确定性动态规划中 $x' = g(x, a)$ 是确定的; 随机动态规划中下一期状态服从 $Q(\cdot|x, a)$, 未来价值变成条件期望或积分。

解答 26.29. 投资就是例子: 投资 i 可能降低当前净收益, 但提高下一期资本 k' , 从而提高未来产出。

解答 26.30. 一次性努力成本影响当前收益，但若状态永远不变，例如单状态行动选择问题，则行动不影响未来状态。

解答 26.31. 若 r 无界， T 可能不把有界函数映到有界函数，值函数也可能无界。因此不能直接在 $B(X)$ 上应用简单压缩定理，需要加权范数或增长条件。

解答 26.32. Bellman 右侧通常要对行动集合取最大值。连续函数在紧集上能取到最大值；若缺少紧致性或连续性，最大值可能只存在上确界而没有最优行动。

解答 26.33. 选择 a' 时，下一期状态直接等于行动，预算约束自动决定消费：

$$c = Ra + y - a'.$$

这样转移最简单，适合资产积累问题。

解答 26.34. 递归形式为

$$V(k) = \max_{0 \leq k' \leq f(k) + (1-\delta)k} \{u(f(k) + (1-\delta)k - k') + \beta V(k')\}.$$

解答 26.35. Bellman 方程把“从今天开始的无限期最优选择”写成“今天最优行动加上明天状态的最优价值”。

26.10 Computation Lab

本章计算实验围绕确定性 Bellman 算子展开。所有实验都应保存参数、网格、停止准则和误差序列，避免只报告最终策略。

1. 在有限网格上实现蛋糕消费问题的值函数迭代，记录 $\|V_{n+1} - V_n\|_\infty$ 。
2. 对确定性增长模型离散化资本网格，比较选择 c 和选择 k' 两种写法的计算便利性。
3. 实现三状态投资问题，分别做值函数迭代和策略迭代，比较迭代次数。
4. 在资产积累问题中加入借贷约束 $a' \geq 0$ ，画出最优储蓄规则并标出约束绑定区域。
5. 用不同 β 重复值函数迭代，验证折现因子越接近 1，收敛越慢。

最小伪代码如下：

```
choose grid  $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ ;
initialize  $V_0(x_i) = 0$ ;
for  $n = 0, 1, \dots$ :
     $V_{n+1}(x_i) = \max_{a \in \Gamma(x_i)} \{r(x_i, a) + \beta V_n(g(x_i, a))\}$ ;
stop if  $\|V_{n+1} - V_n\|_\infty < \varepsilon$ .
```

若 $g(x_i, a)$ 不落在网格上，需要插值。初版实验可以先使用会落在网格上的离散状态模型，后续再加入线性插值。

第二十七章 随机动态规划与 Markov 决策

27.1 从确定性转移到随机转移

Ch25 的 Bellman 方程是

$$V(x) = \sup_{a \in \Gamma(x)} \{r(x, a) + \beta V(g(x, a))\}.$$

如果下一期状态受到收入冲击、就业冲击、生产率冲击或资产收益冲击影响，那么给定 x 和 a 后， x' 不再是一个确定点，而是一个条件分布。随机动态规划把未来价值写成条件期望：

$$V(x) = \sup_{a \in \Gamma(x)} \left\{ r(x, a) + \beta \int V(x') Q(dx' | x, a) \right\}.$$

这里 $Q(\cdot | x, a)$ 是 Markov 核。

定义 27.1 (Markov 决策问题). Markov 决策问题由状态空间 X 、行动空间 A 、可行对应 $\Gamma: X \rightrightarrows A$ 、当期收益 $r(x, a)$ 、折现因子 $\beta \in (0, 1)$ 和转移核 $Q(\cdot | x, a)$ 构成。给定当前状态 x 和行动 a ，下一期状态 x' 按 $Q(\cdot | x, a)$ 分布。

定义 27.2 (Markov 策略). Markov 策略是函数

$$\pi: X \rightarrow A, \quad \pi(x) \in \Gamma(x).$$

它只依赖当前状态，而不依赖完整历史。

例 27.1 (就业状态与储蓄). 状态为 $x = (a, e)$ ，其中 a 是资产， $e \in \{0, 1\}$ 表示失业或就业。家庭选择下一期资产 a' ，消费为

$$c = Ra + y(e) - a'.$$

就业状态按矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

转移。这里行动影响资产，随机冲击影响就业状态，因此下一期状态 (a', e') 的分布由 $P(e, e')$ 给出。

例 27.2 (确定性模型是随机模型的特例). 若确定性转移为 $x' = g(x, a)$ ，可定义

$$Q(B \mid x, a) = \mathbf{1}_{\{g(x, a) \in B\}}.$$

于是

$$\int V(x') Q(dx' \mid x, a) = V(g(x, a)).$$

所以 Ch25 的 Bellman 方程是本章随机 Bellman 方程的退化特例。

27.2 有限状态 Markov 决策

先从有限状态看。设

$$X = \{1, \dots, n\}.$$

给定行动 a ，转移概率为

$$P_{ij}(a) = \Pr(x_{t+1} = j \mid x_t = i, a_t = a).$$

Bellman 方程为

$$V(i) = \max_{a \in \Gamma(i)} \left\{ r(i, a) + \beta \sum_{j=1}^n P_{ij}(a) V(j) \right\}.$$

例 27.3 (两状态维修决策). 机器状态 1 表示好，状态 2 表示坏。行动 $a = 0$ 表示继续使用， $a = 1$ 表示维修。若继续使用，好机器变坏概率较高；若维修，下一期变好的概率较高。

Bellman 方程是

$$V(i) = \max_{a \in \{0,1\}} \left\{ r(i, a) + \beta \sum_{j=1}^2 P_{ij}(a) V(j) \right\}.$$

维修的成本降低当前收益，但改善未来状态分布。

例 27.4 (有限状态收入风险). 资产 $a \in \{0, 1, 2\}$ ，收入 $y \in \{y_L, y_H\}$ 。状态是 (a, y) 。若选择 a' ，消费为

$$c = Ra + y - a'.$$

收入转移矩阵为 P 。Bellman 方程为

$$V(a, y) = \max_{a' \in \Gamma(a, y)} \left\{ u(Ra + y - a') + \beta \sum_{y'} P(y, y') V(a', y') \right\}.$$

相比确定性储蓄问题，未来价值现在是不同收入状态下价值的加权平均。

例 27.5 (行动改变转移概率). 失业者可选择低努力或高努力找工作。高努力成本为 c_H ，但就业概率更高。若 $e = 0$ 表示失业， $e = 1$ 表示就业，则

$$\Pr(e' = 1 \mid e = 0, H) > \Pr(e' = 1 \mid e = 0, L).$$

Bellman 方程中，高努力同时降低当前收益并提高未来就业状态的分布。

27.3 一般状态空间与 Markov 核

Ch21 已经引入 Markov 核。这里它进入控制问题。

定义 27.3 (转移核). 给定状态 x 和行动 a ， $Q(\cdot \mid x, a)$ 是 X 上的概率测度。对每个可测集合 $B \subset X$ ，

$$Q(B \mid x, a)$$

表示下一期状态落在 B 中的条件概率。

定义 27.4 (随机 Bellman 算子). 对有界函数 $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ ，定义

$$(TV)(x) = \sup_{a \in \Gamma(x)} \left\{ r(x, a) + \beta \int V(x') Q(dx' \mid x, a) \right\}.$$

例 27.6 (连续收入冲击). 设资产状态为 a ，收入冲击 z' 服从分布 $F(\cdot \mid z)$ ，下一期资产由行动 a' 决定。状态为 (a, z) ，下一期状态为 (a', z') 。Bellman 方程是

$$V(a, z) = \max_{a' \in \Gamma(a, z)} \left\{ u(Ra + y(z) - a') + \beta \int V(a', z') F(dz' \mid z) \right\}.$$

这里积分只对外生冲击 z' 进行，因为 a' 已由行动选定。

例 27.7 (库存问题). 库存 s 是状态，订货量 q 是行动，需求 D' 随机。下一期库存为

$$s' = \max\{0, s + q - D'\}.$$

若需求分布为 F ，则

$$\int V(s') Q(ds' \mid s, q) = \int V(\max\{0, s + q - d\}) F(dd).$$

订货提高满足需求的概率，但也提高持有成本。

27.4 策略值函数

给定 Markov 策略 π , 状态按

$$Q_\pi(\cdot | x) = Q(\cdot | x, \pi(x))$$

转移, 当期收益为

$$r_\pi(x) = r(x, \pi(x)).$$

定义 27.5 (策略值函数). 策略 π 的值函数定义为

$$V_\pi(x) = \mathbb{E}_x^\pi \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, \pi(x_t)) \right].$$

定理 27.1 (Markov 策略值递归). 若收益有界, 则策略值函数满足

$$V_\pi(x) = r(x, \pi(x)) + \beta \int V_\pi(x') Q(dx' | x, \pi(x)).$$

证明. 把总回报分为第一期收益和尾部收益:

$$V_\pi(x) = r(x, \pi(x)) + \mathbb{E}_x^\pi \left[\sum_{t=1}^{\infty} \beta^t r(x_t, \pi(x_t)) \right].$$

将尾部折现提出一项:

$$V_\pi(x) = r(x, \pi(x)) + \beta \mathbb{E}_x^\pi \left[\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} r(x_t, \pi(x_t)) \right].$$

给定 $x_1 = x'$ 后, 括号内的条件期望正是 $V_\pi(x')$ 。对 x' 的条件分布 $Q(dx' | x, \pi(x))$ 积分, 得到结论。□

例 27.8 (有限状态策略评价). 有限状态下, 给定策略 π 后有收益向量 r_π 和转移矩阵 P_π 。策略值满足

$$V_\pi = r_\pi + \beta P_\pi V_\pi.$$

因此

$$(I - \beta P_\pi) V_\pi = r_\pi.$$

这和 Ch25 的确定性策略评价形式相同, 只是 P_π 现在是真正的概率转移矩阵。

例 27.9 (两状态策略值计算). 设

$$r_\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P_\pi = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad \beta = 0.5.$$

则

$$(I - 0.5P_\pi) V_\pi = r_\pi.$$

解这个二元线性方程即可得到两个状态下沿策略 π 的期望折现回报。

27.5 随机 Bellman 算子的压缩性

命题 27.1 (随机 Bellman 算子的单调性). 若 $V(x) \leq W(x)$ 对所有 x 成立, 则

$$TV(x) \leq TW(x)$$

对所有 x 成立。

证明. 对任意 $a \in \Gamma(x)$, 由于 $Q(\cdot | x, a)$ 是概率测度,

$$\int V(x')Q(dx' | x, a) \leq \int W(x')Q(dx' | x, a).$$

加上相同的 $r(x, a)$, 再对 a 取上确界, 得到结论。 $\square$

命题 27.2 (随机 Bellman 算子的折现性). 对任意常数 m ,

$$T(V + m)(x) = TV(x) + \beta m.$$

证明. 因为 $Q(\cdot | x, a)$ 是概率测度,

$$\int [V(x') + m]Q(dx' | x, a) = \int V(x')Q(dx' | x, a) + m.$$

代回 Bellman 算子, 得到 $T(V + m) = TV + \beta m$ 。 $\square$

定理 27.2 (随机 Bellman 压缩定理). 若 r 有界、 $\beta \in (0, 1)$, 且 T 作用在有界函数空间 $B(X)$ 上, 则

$$\|TV - TW\|_{\infty} \leq \beta \|V - W\|_{\infty}.$$

因此 Bellman 方程 $V = TV$ 有唯一有界解, 并且值函数迭代从任意有界初值收敛。

证明. 令 $d = \|V - W\|_{\infty}$ 。则

$$W - d \leq V \leq W + d.$$

由单调性和折现性,

$$TW - \beta d \leq TV \leq TW + \beta d.$$

所以

$$|TV(x) - TW(x)| \leq \beta d$$

对所有 x 成立。取上确界即得压缩不等式。唯一性和迭代收敛由 Banach 压缩映射定理推出。 $\square$

例 27.10 (随机与确定性收敛速度相同). 压缩常数仍是 β , 不是冲击方差。若 $\beta = 0.95$, 即使状态转移非常随机, 值函数迭代的最坏情形误差上界仍按 0.95^n 收缩。随机性改变 Bellman 算子的内容, 但折现因子控制全局压缩速度。

例 27.11 (值函数迭代的有限状态一步). 两状态问题中, 若

$$V_0 = (0, 0), \quad r(1, a) = 1, \quad r(2, a) = 2,$$

且只有一个行动, 则

$$V_1 = (1, 2).$$

第二步为

$$V_2(i) = r(i) + \beta \sum_j P_{ij} V_1(j).$$

这一步把下一期不同状态的价值按转移概率加权。

27.6 策略改进与最优策略

对任意函数 V , 定义贪婪策略 π_V 为

$$\pi_V(x) \in \arg \max_{a \in \Gamma(x)} \left\{ r(x, a) + \beta \int V(x') Q(dx' | x, a) \right\},$$

若最大值存在。

命题 27.3 (随机策略改进引理). 若策略 π' 满足

$$r(x, \pi'(x)) + \beta \int V_\pi(x') Q(dx' | x, \pi'(x)) \geq V_\pi(x)$$

对所有 x 成立, 则

$$V_{\pi'}(x) \geq V_\pi(x)$$

对所有 x 成立。

证明. 沿策略 π' 迭代上述不等式。设 x_{t+1} 按 $Q(\cdot | x_t, \pi'(x_t))$ 抽取, 则

$$V_\pi(x_0) \leq \mathbb{E}_{x_0}^{\pi'} \left[\sum_{t=0}^n \beta^t r(x_t, \pi'(x_t)) + \beta^{n+1} V_\pi(x_{n+1}) \right].$$

若 V_π 有界, 最后一项随 $n \rightarrow \infty$ 消失。极限给出

$$V_\pi(x_0) \leq V_{\pi'}(x_0).$$

□

例 27.12 (搜索问题中的保留工资). 失业者每期收到工资报价 w , 选择接受或拒绝。接受后得到工作价值 $W(w)$, 拒绝则获得失业补助 b 并等待下一期新报价。Bellman 方程形如

$$V(w) = \max \left\{ W(w), b + \beta \int V(w') F(dw') \right\}.$$

若 $W(w)$ 随 w 上升, 则存在保留工资规则: 高于阈值接受, 低于阈值拒绝。

例 27.13 (资产储蓄中的预防性储蓄). 收入有风险时, Bellman 方程为

$$V(a, y) = \max_{a' \geq \underline{a}} \left\{ u(Ra + y - a') + \beta \sum_{y'} P(y, y') V(a', y') \right\}.$$

较高的未来低收入概率会提高储蓄倾向, 因为 a' 同时影响所有未来收入状态下的消费缓冲。

27.7 随机 Euler 方程

考虑资产积累问题

$$V(a, y) = \max_{a' \geq \underline{a}} \{ u(Ra + y - a') + \beta \mathbb{E}[V(a', y') | y] \}.$$

若最优 a' 是内部解, 则一阶条件为

$$u'(c_t) = \beta \mathbb{E}[V_a(a_{t+1}, y_{t+1}) | y_t].$$

若包络条件为

$$V_a(a_t, y_t) = Ru'(c_t),$$

则得到随机 Euler 方程

$$u'(c_t) = \beta RE[u'(c_{t+1}) | y_t].$$

命题 27.4 (随机 Euler 方程). 在光滑、内部、可交换微分与期望的条件下, 资产积累问题的最优路径满足

$$u'(c_t) = \beta RE[u'(c_{t+1}) | x_t].$$

证明. Bellman 方程中选择 a' , 消费为 $c = Ra + y - a'$ 。内部一阶条件为

$$-u'(c) + \beta \mathbb{E}[V_a(a', y') | y] = 0.$$

下一期包络条件给出

$$V_a(a', y') = Ru'(c').$$

代入一阶条件, 得到

$$u'(c) = \beta R \mathbb{E}[u'(c') \mid y].$$

沿最优路径记号化即得结论。 $\square$

例 27.14 (无风险利率下的随机消费平滑). 若 $\beta R = 1$, Euler 方程变成

$$u'(c_t) = \mathbb{E}[u'(c_{t+1}) \mid x_t].$$

边际效用是鞅。若效用严格凹, 收入风险会让主体倾向持有缓冲资产, 因为低消费状态的边际效用特别高。

例 27.15 (借贷约束绑定). 若 $a' \geq \underline{a}$ 绑定, 则内部 Euler 等式变为

$$u'(c_t) \geq \beta R \mathbb{E}[u'(c_{t+1}) \mid x_t].$$

左边更大说明主体希望把消费移向未来或借更多, 但约束使其无法降低当前资产到约束以下。

27.8 计算与模拟

例 27.16 (有限状态矩阵算法). 有限状态 MDP 的值函数迭代为

$$V_{n+1}(i) = \max_{a \in \Gamma(i)} \left\{ r(i, a) + \beta \sum_j P_{ij}(a) V_n(j) \right\}.$$

每轮只需对每个状态、每个行动计算一个加权和。若状态数为 N 、行动数为 M , 朴素一轮复杂度约为 $O(N^2 M)$ 。

例 27.17 (连续资产网格). 资产储蓄问题中, 把资产网格设为

$$a_1 < \cdots < a_N.$$

对每个当前状态 (a_i, y) , 枚举可行 a'_j , 计算

$$u(Ra_i + y - a'_j) + \beta \sum_{y'} P(y, y') V_n(a'_j, y').$$

这避免了插值, 适合作为第一版程序。之后可以允许 a' 连续并对 $V_n(a', y')$ 插值。

例 27.18 (模拟策略诱导路径). 一旦得到策略 $\pi(a, y)$, 可从 (a_0, y_0) 出发模拟:

$$a_{t+1} = \pi(a_t, y_t),$$

再按 $P(y_t, \cdot)$ 抽取 y_{t+1} 。重复很多期后, 可以估计平均资产、约束绑定频率和消费波动。这些模拟量帮助检查策略的经济含义。

27.9 与后续章节的接口

本章建立了

$$V(x) = \max_{a \in \Gamma(x)} \left\{ r(x, a) + \beta \int V(x') Q(dx' | x, a) \right\}.$$

Ch27 会把单个主体的随机动态规划放进均衡中, 使价格、分布和个体政策同时决定。Ch28 会把条件期望、随机贴现因子和资产价格结合起来。后续连续时间章节会把离散时间条件期望极限化为 HJB 方程。这里最重要的概念已经出现: 状态、Markov 核、策略、Bellman 固定点和期望下的最优性。

27.10 Exercises

习题 27.1. 定义 Markov 决策问题。

习题 27.2. 解释确定性转移函数和 Markov 核的区别。

习题 27.3. 写出有限状态 Markov 决策问题的 Bellman 方程。

习题 27.4. 写出一般状态空间中的积分型 Bellman 方程。

习题 27.5. 说明确定性动态规划如何作为随机动态规划的特例。

习题 27.6. 定义 Markov 策略。

习题 27.7. 定义给定策略 π 的策略值函数。

习题 27.8. 证明 Markov 策略值递归。

习题 27.9. 有限状态下, 写出策略评价的矩阵方程。

习题 27.10. 证明随机 Bellman 算子的单调性。

习题 27.11. 证明随机 Bellman 算子的折现性。

习题 27.12. 证明随机 Bellman 算子的压缩性。

习题 27.13. 说明为什么压缩常数仍然是 β 。

习题 27.14. 一状态随机问题满足 $V = 5 + 0.9V$ 。求 V 。

习题 27.15. 两状态单行动模型中, 给定 $r = (1, 2)'$ 、 $\beta = 0.5$ 和转移矩阵 P 。写出 V 的线性方程。

- 习题 27.16. 写出收入风险储蓄问题的 Bellman 方程。
- 习题 27.17. 在收入风险储蓄问题中, 说明为什么未来价值要对 y' 求期望。
- 习题 27.18. 推导资产积累问题的随机 Euler 方程。
- 习题 27.19. 解释随机 Euler 方程中的条件期望。
- 习题 27.20. 说明借贷约束绑定时 Euler 等式如何变成不等式。
- 习题 27.21. 写出搜索模型的接受/拒绝 Bellman 方程。
- 习题 27.22. 解释保留工资规则的直觉。
- 习题 27.23. 写出库存问题中的转移函数。
- 习题 27.24. 说明行动如何影响转移概率。
- 习题 27.25. 陈述随机策略改进引理。
- 习题 27.26. 证明随机策略改进引理。
- 习题 27.27. 区分值函数迭代和策略迭代在随机模型中的步骤。
- 习题 27.28. 若 $\beta = 0.95$, 给出值函数迭代 n 轮后的误差收缩上界。
- 习题 27.29. 有限状态模型中, 为什么策略模拟需要随机抽样?
- 习题 27.30. 连续状态模型中, 为什么常需要插值?
- 习题 27.31. 说明 Markov 核的可测性为什么重要。
- 习题 27.32. 给出一个外生冲击和内生状态同时存在的例子。
- 习题 27.33. 说明 Ch26 与 Ch27 递归竞争均衡的关系。
- 习题 27.34. 说明 Ch26 与 Ch28 离散时间资产定价的关系。
- 习题 27.35. 用一句话概括随机动态规划的核心变化。

27.11 Solutions

本章解答的核心是把“未来价值”从确定性点值改成条件期望。只要看清楚下一期状态的分布，随机 Bellman 方程就和确定性版本有同一骨架。

解答 27.1. Markov 决策问题由状态空间 X 、行动空间 A 、可行对应 $\Gamma(x)$ 、收益 $r(x, a)$ 、折现因子 β 和转移核 $Q(\cdot | x, a)$ 构成。主体在状态 x 选择 a ，得到当期收益，并使下一期状态按 $Q(\cdot | x, a)$ 分布。

解答 27.2. 确定性转移函数 $g(x, a)$ 给出唯一下一期状态。Markov 核 $Q(\cdot | x, a)$ 给出下一期状态的条件分布。因此随机模型中的未来价值是积分或期望，而不是单点值。

解答 27.3. 有限状态下，

$$V(i) = \max_{a \in \Gamma(i)} \left\{ r(i, a) + \beta \sum_j P_{ij}(a) V(j) \right\}.$$

解答 27.4. 一般状态空间中，

$$V(x) = \sup_{a \in \Gamma(x)} \left\{ r(x, a) + \beta \int V(x') Q(dx' | x, a) \right\}.$$

解答 27.5. 若 Q 把全部概率放在 $g(x, a)$ 上，即

$$Q(B | x, a) = \mathbf{1}_{\{g(x, a) \in B\}},$$

则

$$\int V(x') Q(dx' | x, a) = V(g(x, a)).$$

这就回到确定性 Bellman 方程。

解答 27.6. Markov 策略是只依赖当前状态的可行行动规则：

$$\pi(x) \in \Gamma(x).$$

它不依赖完整历史。

解答 27.7. 策略 π 的值函数为

$$V_\pi(x) = \mathbb{E}_x^\pi \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, \pi(x_t)).$$

解答 27.8. 拆出第一期收益:

$$V_{\pi}(x) = r(x, \pi(x)) + \beta \mathbb{E}[V_{\pi}(x_1) \mid x_0 = x].$$

而 x_1 的条件分布为 $Q(dx' \mid x, \pi(x))$, 所以

$$V_{\pi}(x) = r(x, \pi(x)) + \beta \int V_{\pi}(x') Q(dx' \mid x, \pi(x)).$$

解答 27.9. 有限状态下, 策略 π 诱导收益向量 r_{π} 和转移矩阵 P_{π} , 策略值满足

$$V_{\pi} = r_{\pi} + \beta P_{\pi} V_{\pi},$$

即

$$(I - \beta P_{\pi}) V_{\pi} = r_{\pi}.$$

解答 27.10. 若 $V \leq W$, 则对任何概率测度 $Q(\cdot \mid x, a)$,

$$\int V dQ \leq \int W dQ.$$

代入 Bellman 算子并对行动取上确界, 得到 $TV \leq TW$ 。

解答 27.11. 因为 Q 是概率测度,

$$\int (V + m) dQ = \int V dQ + m.$$

因此

$$T(V + m) = TV + \beta m.$$

解答 27.12. 令 $d = \|V - W\|_{\infty}$ 。有 $W - d \leq V \leq W + d$ 。由单调性和折现性,

$$TW - \beta d \leq TV \leq TW + \beta d.$$

所以

$$\|TV - TW\|_{\infty} \leq \beta \|V - W\|_{\infty}.$$

解答 27.13. 随机转移只是在未来状态上取概率加权平均。概率平均不会放大上确界误差; 真正缩小误差的是外面的折现因子 β 。

解答 27.14.

$$V = 5 + 0.9V \quad \Rightarrow \quad 0.1V = 5 \quad \Rightarrow \quad V = 50.$$

解答 27.15. 线性方程为

$$V = r + \beta PV,$$

即

$$(I - 0.5P)V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

解答 27.16. 若状态为 (a, y) , 选择 a' , 消费 $c = Ra + y - a'$, 收入转移为 $P(y, y')$, 则

$$V(a, y) = \max_{a' \in \Gamma(a, y)} \left\{ u(Ra + y - a') + \beta \sum_{y'} P(y, y') V(a', y') \right\}.$$

解答 27.17. 因为当前选择 a' 后, 下一期收入 y' 仍不确定。未来价值依赖 y' , 所以要按 y' 的条件概率加权平均。

解答 27.18. 内部一阶条件给出

$$u'(c_t) = \beta \mathbb{E}[V_a(a_{t+1}, y_{t+1}) \mid y_t].$$

包络条件为

$$V_a(a_{t+1}, y_{t+1}) = Ru'(c_{t+1}).$$

代入得

$$u'(c_t) = \beta RE[u'(c_{t+1}) \mid y_t].$$

解答 27.19. 条件期望表示在今天信息下, 对明天不同收入或状态的边际效用加权平均。它不是事后实现值, 而是决策时面对的不确定未来价值。

解答 27.20. 约束绑定时, 主体不能按无约束最优条件调整 a' 。若下界绑定, 通常有

$$u'(c_t) \geq \beta RE[u'(c_{t+1}) \mid x_t],$$

表示主体想更多地把资源移向未来或放松约束, 但不可行。

解答 27.21. 若工资报价为 w , 接受价值为 $W(w)$, 拒绝获得补助 b 并等待新报价, 则

$$V(w) = \max \left\{ W(w), b + \beta \int V(w') F(dw') \right\}.$$

解答 27.22. 接受价值随工资上升, 拒绝价值通常与当前工资无关或较平。于是存在一个工资阈值: 低工资时等待更好报价, 高工资时接受。

解答 27.23. 若库存为 s , 订货量为 q , 需求为 D' , 则下一期库存可写为

$$s' = \max\{0, s + q - D'\}.$$

解答 27.24. 行动可能改变下一期状态的概率。例如求职努力越高, 就业概率越大; 维修机器会提高下一期机器处于好状态的概率。

解答 27.25. 若策略 π' 满足

$$r(x, \pi'(x)) + \beta \int V_{\pi}(x') Q(dx' | x, \pi'(x)) \geq V_{\pi}(x),$$

则 $V_{\pi'}(x) \geq V_{\pi}(x)$ 对所有 x 成立。

解答 27.26. 沿 π' 迭代上式并取期望:

$$V_{\pi}(x_0) \leq \mathbb{E}^{\pi'} \left[\sum_{t=0}^n \beta^t r(x_t, \pi'(x_t)) + \beta^{n+1} V_{\pi}(x_{n+1}) \right].$$

有界性使最后一项趋于零, 极限即为 $V_{\pi'}(x_0)$, 所以 $V_{\pi'} \geq V_{\pi}$ 。

解答 27.27. 值函数迭代反复应用最优 Bellman 算子。策略迭代先固定策略求 V_{π} , 再用 V_{π} 构造改进策略。随机模型中策略评价通常涉及期望或转移矩阵。

解答 27.28. 误差满足

$$\|V_n - V^*\|_{\infty} \leq 0.95^n \|V_0 - V^*\|_{\infty}.$$

解答 27.29. 给定策略后, 下一期状态仍按转移概率随机实现。模拟路径必须根据这些概率抽样, 才能反映策略诱导的状态分布。

解答 27.30. 连续状态下, 转移后的状态或选择的 a' 往往不落在预设网格上。为了计算 $V(a')$, 需要用附近网格点的值进行插值。

解答 27.31. 可测性保证 $x \mapsto \int V(x') Q(dx' | x, a)$ 是可测函数, 也保证策略和期望对象有良好定义。没有这些条件, Bellman 算子可能不把可测函数映到可测函数。

解答 27.32. 资产储蓄模型就是例子: 资产 a 是内生状态, 收入 y 是外生冲击。状态为 (a, y) , 行动 a' 控制资产, 收入按 Markov 链转移。

解答 27.33. Ch26 给出单个主体在给定价格和转移下的最优决策。Ch27 会把许多个体决策、价格和分布演化放在一起, 形成递归竞争均衡。

解答 27.34. Ch26 的条件期望和状态价格思想为 Ch28 做准备。资产定价中, 未来支付依赖随机状态, 价格由折现后的条件期望刻画。

解答 27.35. 随机动态规划把确定性未来价值

$$V(g(x, a))$$

替换为未来价值的条件期望

$$\int V(x') Q(dx' | x, a).$$

27.12 Computation Lab

本章计算实验的目标是把 Markov 核变成可计算的转移矩阵、加权和或模拟抽样。

1. 实现两状态维修问题的值函数迭代，输出最优维修规则。
2. 给定一个策略，构造 P_π 和 r_π ，用线性方程 $(I - \beta P_\pi)V_\pi = r_\pi$ 做策略评价。
3. 在收入风险储蓄问题中离散化资产和收入，枚举 a' ，计算最优储蓄规则。
4. 对同一个储蓄模型模拟 10000 期，报告平均资产、平均消费和约束绑定频率。
5. 比较不同收入持续性下的储蓄政策，观察预防性储蓄如何变化。

有限状态值函数迭代的伪代码为

```

initialize  $V_0(i) = 0$ ;
for  $n = 0, 1, \dots$  :
    for each state  $i$  :
         $V_{n+1}(i) = \max_{a \in \Gamma(i)} \left\{ r(i, a) + \beta \sum_j P_{ij}(a) V_n(j) \right\}$ ;
    stop if  $\|V_{n+1} - V_n\|_\infty < \varepsilon$ .

```

连续状态初版可先把状态和行动都限制在网格上。若最优行动或转移状态不落在网格上，再加入线性插值；在正式数值章节中再讨论误差和加速。

第二十八章 递归竞争均衡与异质性主体模型

28.1 从单个主体到均衡系统

Ch26 研究给定转移核、价格和约束时，一个主体如何求解随机动态规划。宏观金融和异质性主体模型还需要一步：价格本身要由所有主体的选择共同决定，个体状态分布也要由个体政策共同推动。因此递归竞争均衡的对象不只是值函数，而是一组相互一致的对象：

价格 政策函数 分布 市场清算 分布运动规律.

定义 28.1 (个体状态与总体状态). 个体状态 s 描述单个主体的资产、收入、生产率或就业状态。总体状态 S 描述价格、总资本、总生产率或个体状态分布等影响所有主体决策的变量。

定义 28.2 (分布状态). 若经济中有连续统主体，个体状态 $s \in X$ 的横截面分布记为 $\mu \in \mathcal{P}(X)$ 。分布 μ 本身可以作为总体状态的一部分。

例 28.1 (资产和收入的横截面分布). 家庭状态为 $s = (a, y)$ ，其中 a 是资产， y 是收入状态。分布 $\mu(a, y)$ 表示经济中处于资产 a 、收入 y 的家庭比例。总资产供给为

$$A(\mu) = \sum_{a,y} a \mu(a, y)$$

在有限状态近似中。市场清算会要求这个总资产供给等于企业或政府需要吸收的资产量。

例 28.2 (总体生产率作为公共状态). 若所有家庭面对同一个总生产率 Z_t ，且 Z_t 按 Markov 链转移，那么总体状态至少包含 Z_t 。若个体资产分布影响资本供给和利率，总体状态还应包含 μ_t 。因此自然的总体状态是

$$S_t = (Z_t, \mu_t).$$

28.2 给定价格下的个体递归问题

先固定价格序列或递归价格函数。家庭在给定工资 w 、利率 r 和收入转移矩阵 P 下，选择下一期资产。

例 28.3 (给定价格的家庭问题). 设家庭收入状态为 y ，资产为 a ，工资为 w ，利率为 r 。预算约束为

$$c + a' = (1 + r)a + wy.$$

若借贷下界为 $\underline{a}$ ，Bellman 方程为

$$V(a, y) = \max_{a' \geq \underline{a}} \left\{ u((1 + r)a + wy - a') + \beta \sum_{y'} P(y, y') V(a', y') \right\}.$$

这里 w, r 被家庭当作给定，但在均衡中它们由总资本和劳动共同决定。

定义 28.3 (个体政策函数). 给定价格和总体状态，个体最优政策函数写作

$$a' = g_a(a, y; S), \quad c = g_c(a, y; S).$$

政策函数把当前个体状态和总体状态映射到行动。

例 28.4 (借贷约束和储蓄政策). 若低收入家庭资产接近下界 $\underline{a}$ ，其最优 a' 可能等于 $\underline{a}$ 。高资产或高收入家庭通常选择更高 a' 。政策函数 $g_a(a, y)$ 的形状决定了下一期资产分布如何由今天的分布推出。

28.3 分布运动规律

给定个体政策和外生冲击转移，横截面分布会被推动到下一期。有限状态下，这就是矩阵乘法；一般状态下，这是推前测度和 Markov 核的组合。

定义 28.4 (政策诱导的转移核). 若个体状态为 $s = (a, y)$ ，政策为 $a' = g_a(a, y)$ ，收入转移为 $P(y, y')$ ，则政策诱导的转移核为

$$Q_g((a', y') | a, y) = \mathbf{1}_{\{a' = g_a(a, y)\}} P(y, y')$$

在离散资产网格上。

命题 28.1 (政策诱导的分布更新). 有限状态下，若当前分布为行向量 μ_t ，政策诱导转移矩阵为 Q_g ，则

$$\mu_{t+1} = \mu_t Q_g.$$

证明. 下一期处于状态 j 的比例等于所有今天状态 i 的比例乘以从 i 到 j 的概率后求和:

$$\mu_{t+1}(j) = \sum_i \mu_t(i) Q_g(i, j).$$

这正是行向量矩阵乘法 $\mu_{t+1} = \mu_t Q_g$. □

例 28.5 (两资产两收入的转移). 资产 $a \in \{0, 1\}$, 收入 $y \in \{L, H\}$, 共有四个状态。若政策规定低收入低资产家庭保持 $a' = 0$, 高收入低资产家庭转到 $a' = 1$, 则每个当前状态的下一期资产由政策确定, 下一期收入由 P 随机决定。把四个状态排序后, 就能写出 4×4 的 Q_g 。

定义 28.5 (不变分布). 若分布 μ^* 满足

$$\mu^* = \mu^* Q_g,$$

则称 μ^* 是政策 g 下的不变分布。

命题 28.2 (不变分布的固定点条件). 有限状态下, μ^* 是不变分布, 当且仅当它是转移矩阵 Q_g 的左特征向量, 且对应特征值为 1, 并满足

$$\sum_i \mu_i^* = 1, \quad \mu_i^* \geq 0.$$

证明. 不变分布定义为 $\mu^* = \mu^* Q_g$. 这等价于

$$\mu^* Q_g = 1 \cdot \mu^*,$$

即 μ^* 是左特征向量, 对应特征值为 1。概率分布还必须非负且总和为 1。 □

例 28.6 (不变就业分布). 若就业状态转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix},$$

不变分布 $(p, 1-p)$ 满足

$$p = 0.8p + 0.1(1-p).$$

解得

$$0.3p = 0.1, \quad p = \frac{1}{3}.$$

所以长期低收入或失业比例为 $1/3$, 高收入或就业比例为 $2/3$ 。

28.4 价格、企业和市场清算

在竞争均衡中，家庭把价格当作给定；价格又由市场清算决定。最简单的生产部门为

$$Y = F(K, L).$$

竞争企业的一阶条件给出

$$r + \delta = F_K(K, L), \quad w = F_L(K, L).$$

例 28.7 (Cobb-Douglas 价格). 若

$$F(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha},$$

则

$$r = \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - \delta, \quad w = (1 - \alpha) K^\alpha L^{-\alpha}.$$

给定总劳动 L ，总资本 K 越高，利率越低、工资越高。家庭储蓄决定资本供给，资本又决定价格。

定义 28.6 (市场清算). 市场清算要求个体选择加总后等于总量需求。例如资本市场清算为

$$K = \int a \, d\mu(a, y),$$

劳动市场清算可写为

$$L = \int y \, d\mu(a, y)$$

或由外生劳动供给给定。

例 28.8 (资本供给和利率). 给定利率 r ，家庭问题产生政策 g_a^r 和不变分布 μ^r 。资本供给为

$$A(r) = \int a \, d\mu^r(a, y).$$

企业资本需求由

$$r + \delta = F_K(K, L)$$

决定，记为 $K^d(r)$ 。均衡利率满足

$$A(r) = K^d(r).$$

命题 28.3 (资本市场清算的固定点直觉). 若资本供给 $A(r)$ 连续递增, 资本需求 $K^d(r)$ 连续递减, 且存在 r_L, r_H 使

$$A(r_L) \leq K^d(r_L), \quad A(r_H) \geq K^d(r_H),$$

则存在 $r^* \in [r_L, r_H]$ 使

$$A(r^*) = K^d(r^*).$$

证明. 定义超额供给

$$Z(r) = A(r) - K^d(r).$$

由连续性, Z 连续。条件给出 $Z(r_L) \leq 0$ 、 $Z(r_H) \geq 0$ 。由介值定理, 存在 r^* 使 $Z(r^*) = 0$, 即市场清算。□

28.5 平稳递归竞争均衡

定义 28.7 (平稳递归竞争均衡). 平稳递归竞争均衡由价格 (r, w) 、个体值函数 V 、政策函数 g_a, g_c 、不变分布 μ 和总量 (K, L) 构成, 满足:

1. 给定 (r, w) , V 满足家庭 Bellman 方程, 政策 g_a, g_c 最优。
2. 给定政策和收入转移, μ 是不变分布。
3. 总量由分布加总得到:

$$K = \int a d\mu, \quad L = \int y d\mu.$$

4. 企业最优给出价格:

$$r + \delta = F_K(K, L), \quad w = F_L(K, L).$$

5. 资源或市场清算条件成立。

例 28.9 (Aiyagari 型均衡的对象). 一个 Aiyagari 型经济的平稳均衡包含:

$$(r, w, V, g_a, g_c, \mu, K, L).$$

其中 V, g_a, g_c 来自家庭问题, μ 来自政策诱导分布不动点, K, L 来自加总, (r, w) 来自企业一阶条件。少掉任何一个一致性条件, 都还不是均衡。

例 28.10 (借贷约束如何影响总储蓄). 若借贷下界 $\underline{a}$ 更紧, 低收入家庭更容易受到约束。为了自我保险, 未受约束家庭可能提高储蓄。均衡总资本可能上升, 也可能因贫困家庭无法储蓄而下降; 方向取决于收入风险、耐心程度和生产价格反馈。

例 28.11 (均衡条件的检查顺序). 假设已经求出一组候选对象 $(r, w, V, g_a, g_c, \mu, K, L)$ 。检查时不要只看家庭最优。还要逐项确认：

$$\mu = \mu Q_g, \quad K = \int a d\mu, \quad r + \delta = F_K(K, L), \quad w = F_L(K, L).$$

若家庭最优成立但 $K \neq \int a d\mu$ ，说明个体问题解对了，但加总和市场清算还没有闭合。

28.6 转移动态与分布状态

平稳均衡只研究不变分布。若经济受到冲击，分布会沿时间移动：

$$\mu_{t+1} = \Phi(\mu_t, Z_t),$$

价格也随总体状态变化。

定义 28.8 (递归竞争均衡). 递归竞争均衡由价格函数、值函数、政策函数和分布运动规律组成，使得对每个总体状态 S ：

1. 个体在给定价格函数和总体状态运动规律下最优。
2. 个体政策推动分布，得到实际的 μ' 。
3. 猜测的总体运动规律与实际分布更新一致。
4. 每期市场清算。

例 28.12 (分布作为巨大状态). 若总体状态为完整分布 μ ，家庭 Bellman 方程可写成

$$V(a, y, \mu) = \max_{a'} \left\{ u(c) + \beta \sum_{y'} P(y, y') V(a', y', \mu') \right\},$$

其中 $\mu' = \Phi(\mu)$ 。难点是 μ 是高维对象，这也是异质性主体模型计算困难的来源。

28.7 近似总量规律

Krusell-Smith 思路是用少数总量矩近似完整分布。例如，用总资本 K 近似分布状态对价格的影响，并猜测

$$\log K' = b_0 + b_1 \log K + b_2 \log Z.$$

定义 28.9 (总量规律一致性). 给定一个猜测的总量规律 H ，个体用它求解政策。模拟大量主体后得到实际总量序列 K_{t+1}^{sim} 。若把实际序列回归或投影到同一函数族后得到的规律接近 H ，则称该总量规律近似一致。

命题 28.4 (近似总量规律的一致性判据). 若猜测规律 H_θ 生成政策 g_θ , 模拟得到的总量转移在选定函数族中投影为 $H_{\theta'}$, 则近似一致性要求

$$\theta' \approx \theta.$$

若 $\theta' = \theta$, 则 H_θ 是该近似函数族内的固定点。

证明. 算法把猜测参数 θ 映射为模拟后重新估计的参数 θ' 。一致性要求主体求解时相信的总量规律, 与他们的政策实际生成的总量规律相同。因此固定点条件就是 $\theta' = \theta$ 。若只求数值近似, 则使用 $\theta' \approx \theta$ 。□

例 28.13 (总资本的一阶对数规律). 假设总生产率 $Z \in \{L, H\}$, 分别估计

$$\log K' = b_0(Z) + b_1(Z) \log K.$$

家庭只需把 K, Z 当作总体状态, 而不需要跟踪完整财富分布。若模拟后回归的 b_0, b_1 与猜测接近, 则总资本近似总结了分布对价格的影响。

例 28.14 (近似规律失败的信号). 若用

$$\log K' = b_0 + b_1 \log K$$

预测总资本, 但模拟中相同 K 下不同财富不平等程度导致明显不同的 K' , 则单独用 K 作为总体状态不够。此时可加入更高矩, 例如财富方差或贫困人口比例, 或者回到更丰富的分布状态。

28.8 均衡计算的固定点流程

例 28.15 (平稳 Aiyagari 计算流程). 一个基础计算流程是:

1. 猜测利率 r , 由企业一阶条件得到工资 w 。
2. 解家庭动态规划, 得到 g_a 。
3. 用 g_a 和收入转移构造 Q_g 。
4. 迭代 $\mu_{n+1} = \mu_n Q_g$, 得到不变分布。
5. 计算资本供给 $A(r) = \int a d\mu$ 。
6. 与企业资本需求比较, 调整 r 。

外层是市场清算固定点，内层是家庭最优和分布不动点。

例 28.16 (转移动态计算流程). 若从初始分布 μ_0 到新稳态，通常猜测价格路径 $\{r_t, w_t\}_{t=0}^T$ ，向后解家庭问题，向前推分布路径，再检查每期市场清算。若不清算，更新价格路径。这个问题比平稳均衡多了一整条时间路径的固定点。

28.9 与资产定价和连续时间模型的接口

异质性主体均衡给出每个状态下的边际效用和资产持有。Ch28 会利用这些对象刻画资产价格：

$$p_t = \mathbb{E}_t[M_{t+1}x_{t+1}].$$

后续连续时间异质性主体模型会把分布运动写成 Kolmogorov forward 或 Fokker-Planck 方程，把个体问题写成 HJB 方程。本章的离散时间版本已经包含同一个结构：个体最优、分布演化、价格清算和一致性固定点。

28.10 Exercises

习题 28.1. 定义个体状态、总体状态和分布状态。

习题 28.2. 解释为什么异质性主体模型需要跟踪分布。

习题 28.3. 写出给定利率和工资下的家庭储蓄 Bellman 方程。

习题 28.4. 定义个体政策函数。

习题 28.5. 说明政策函数如何推动下一期分布。

习题 28.6. 有限状态下证明 $\mu_{t+1} = \mu_t Q_g$ 。

习题 28.7. 定义不变分布。

习题 28.8. 证明有限状态不变分布是 Q_g 的左特征向量。

习题 28.9. 给定两状态转移矩阵，写出不变分布方程。

习题 28.10. 写出 Cobb-Douglas 生产函数下的利率和工资。

习题 28.11. 定义资本市场清算。

习题 28.12. 解释资本供给曲线和资本需求曲线如何决定均衡利率。

- 习题 28.13. 证明资本市场清算固定点的介值定理版本。
- 习题 28.14. 定义平稳递归竞争均衡。
- 习题 28.15. 列出 Aiyagari 型均衡的对象。
- 习题 28.16. 说明借贷约束为何影响总储蓄。
- 习题 28.17. 区分平稳均衡和转移动态。
- 习题 28.18. 定义递归竞争均衡。
- 习题 28.19. 说明完整分布作为状态为何带来计算困难。
- 习题 28.20. 解释 Krusell-Smith 近似总量规律的思想。
- 习题 28.21. 写出一个总资本对数线性规律。
- 习题 28.22. 定义总量规律一致性。
- 习题 28.23. 证明近似总量规律固定点条件。
- 习题 28.24. 说明平稳 Aiyagari 计算中的内外层固定点。
- 习题 28.25. 为什么转移动态要向后解个体问题、向前推分布？
- 习题 28.26. 说明 Ch27 和 Ch28 资产定价的联系。
- 习题 28.27. 给出一个市场清算失败的例子。
- 习题 28.28. 若资本供给大于资本需求，利率通常应如何调整？
- 习题 28.29. 解释政策诱导转移矩阵 Q_g 与外生收入转移矩阵 P 的区别。
- 习题 28.30. 为什么连续统主体能用分布表示加总？
- 习题 28.31. 说明个体把价格当作给定与均衡中价格内生之间的关系。
- 习题 28.32. 写出劳动力供给外生时的总劳动公式。
- 习题 28.33. 解释不完全市场在 Aiyagari 模型中的含义。
- 习题 28.34. 说明本章为什么不需要结构估计或因果识别。
- 习题 28.35. 用一句话概括递归竞争均衡的固定点结构。

28.11 Solutions

本章解答的主线是：个体最优生成政策，政策推动分布，分布加总生成总量，总量决定价格，价格又回到个体问题。

解答 28.1. 个体状态描述单个主体的资产、收入、就业或生产率。总体状态描述所有主体共同面对的变量，如总生产率、价格或分布。分布状态是个体状态在横截面上的概率分布。

解答 28.2. 异质性主体的选择取决于自身状态，而价格和总量取决于所有主体状态的加总。只知道平均资产通常不够，因为不同资产和收入位置的主体储蓄反应不同，所以需要跟踪分布。

解答 28.3. 给定 r, w ，家庭问题为

$$V(a, y) = \max_{a' \geq a} \left\{ u((1+r)a + wy - a') + \beta \sum_{y'} P(y, y') V(a', y') \right\}.$$

解答 28.4. 个体政策函数把当前个体状态和总体状态映射到行动。例如

$$a' = g_a(a, y; S), \quad c = g_c(a, y; S).$$

解答 28.5. 给定当前状态 (a, y) ，政策决定下一期资产 $a' = g_a(a, y)$ ，外生收入按 $P(y, y')$ 转移。因此每个当前状态的质量被分配到若干下一期状态，形成下一期分布。

解答 28.6. 下一期状态 j 的质量等于所有当前状态 i 的质量乘以 $i \rightarrow j$ 的转移概率后求和：

$$\mu_{t+1}(j) = \sum_i \mu_t(i) Q_g(i, j).$$

这就是 $\mu_{t+1} = \mu_t Q_g$ 。

解答 28.7. 不变分布 μ^* 满足

$$\mu^* = \mu^* Q_g.$$

若当前分布为 μ^* ，按政策和冲击转移一期后分布不变。

解答 28.8. 由不变分布定义，

$$\mu^* Q_g = \mu^*.$$

这等价于

$$\mu^* Q_g = 1 \cdot \mu^*,$$

所以 μ^* 是 Q_g 对应特征值 1 的左特征向量，并且还要满足非负和总和为 1。

解答 28.9. 若两状态转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix},$$

不变分布 (μ_1, μ_2) 满足

$$\mu_1 = \mu_1 p_{11} + \mu_2 p_{21}, \quad \mu_2 = \mu_1 p_{12} + \mu_2 p_{22},$$

以及 $\mu_1 + \mu_2 = 1$ 。

解答 28.10. 若

$$F(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha},$$

竞争价格为

$$r = F_K(K, L) - \delta = \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - \delta,$$

$$w = F_L(K, L) = (1 - \alpha) K^\alpha L^{-\alpha}.$$

解答 28.11. 资本市场清算要求家庭加总资产等于企业使用的总资本:

$$K = \int a \, d\mu(a, y).$$

有限状态下就是

$$K = \sum_{a, y} a \mu(a, y).$$

解答 28.12. 给定利率, 家庭问题和不变分布给出资本供给 $A(r)$ 。企业一阶条件给出资本需求 $K^d(r)$ 。均衡利率使

$$A(r) = K^d(r).$$

解答 28.13. 令

$$Z(r) = A(r) - K^d(r).$$

若 Z 连续, 且 $Z(r_L) \leq 0$ 、 $Z(r_H) \geq 0$, 则介值定理给出某个 r^* 使 $Z(r^*) = 0$ 。这就是资本市场清算。

解答 28.14. 平稳递归竞争均衡由价格、值函数、政策函数、不变分布和总量组成, 满足个体最优、分布不变、总量加总、企业最优和市场清算。

解答 28.15. 对象为

$$(r, w, V, g_a, g_c, \mu, K, L).$$

其中 V, g_a, g_c 来自家庭最优, μ 是政策诱导不变分布, K, L 是加总, r, w 来自企业一阶条件。

解答 28.16. 借贷约束限制低资产家庭跨期平滑消费。约束越紧，家庭可能为了防范收入风险而增加预防性储蓄；但低资产家庭也可能被迫低储蓄。总效应取决于分布和价格反馈。

解答 28.17. 平稳均衡中分布和价格不随时间变。转移动态研究从一个分布到另一个分布的路径，价格、政策和分布都可能随时间变化。

解答 28.18. 递归竞争均衡是一组价格函数、值函数、政策函数和总体运动规律，使得给定总体状态时个体最优、市场清算、政策推动的实际分布运动与猜测的总体运动一致。

解答 28.19. 完整分布是高维对象。若资产有许多网格点、收入有多个状态，分布维度很高；连续状态下分布甚至是无限维对象。因此直接把完整分布作为状态会造成严重计算负担。

解答 28.20. Krusell-Smith 思路是用少数总量矩，如总资本 K ，近似完整分布对价格和个体决策的影响。主体用猜测的总量规律求解，模拟后检查该规律是否近似自治。

解答 28.21. 一个例子是

$$\log K' = b_0 + b_1 \log K + b_2 \log Z.$$

若按总生产率状态分别估计，也可写成

$$\log K' = b_0(Z) + b_1(Z) \log K.$$

解答 28.22. 总量规律一致性要求：主体求解时使用的总量转移规律，与主体政策在模拟中实际生成的总量转移规律相同或足够接近。

解答 28.23. 猜测参数 θ 生成政策和模拟数据，重新估计得到 θ' 。若 $\theta' = \theta$ ，猜测规律就是该近似函数族中的固定点；若 θ' 接近 θ ，则近似一致。

解答 28.24. 内层固定点包括家庭 Bellman 方程和政策诱导的不变分布。外层固定点是利率或价格调整，使资本供给等于资本需求。

解答 28.25. 给定未来价格路径，家庭最优需要从终端向前递推。得到政策路径后，分布由初始分布开始按政策向前推进。两者方向相反，所以转移动态通常是向后解政策、向前推分布。

解答 28.26. Ch27 产生均衡中的分布、消费、资产和边际效用。Ch28 资产定价会用这些状态相关边际效用或随机贴现因子来给未来支付定价。

解答 28.27. 例如给定利率太高，家庭储蓄很多而企业资本需求很少，则

$$A(r) > K^d(r).$$

这表示资本市场供过于求，价格不清算。

解答 28.28. 若资本供给大于资本需求，通常应降低利率，使家庭少储蓄、企业多需求资本，直到市场清算。

解答 28.29. P 只描述外生收入状态转移。 Q_g 同时包含外生收入转移和内生政策对资产状态的影响，因此是完整个体状态的转移矩阵。

解答 28.30. 连续统主体使个体风险在横截面上按大数法则稳定下来。单个主体质量为零，整体状态可由分布而不是逐个主体列表表示。

解答 28.31. 竞争主体认为自己太小，无法影响价格，所以把价格当作给定。但所有主体的选择加总后决定总量，进而通过市场清算决定均衡价格。

解答 28.32. 若有效劳动 y 外生，则

$$L = \int y d\mu(a, y).$$

有限状态下为

$$L = \sum_{a,y} y \mu(a, y).$$

解答 28.33. 不完全市场意味着家庭不能完全保险所有收入风险，通常只能用无风险资产或少数资产自我保险。因此收入冲击会影响消费、储蓄和财富分布。

解答 28.34. 本章目标是建立均衡数学结构：递归问题、分布演化和市场清算。结构估计和因果识别属于实证方法，不进入本书初版主线。

解答 28.35. 递归竞争均衡是“个体最优、分布演化、价格清算和总体规律一致”同时成立的固定点。

28.12 Computation Lab

本章计算实验以平稳 Aiyagari 型模型为主。初版实现应优先使用有限资产网格和有限收入状态，避免一开始就处理高维连续分布。

1. 给定利率 r ，解家庭储蓄问题，得到政策 $g_a(a, y)$ 。
2. 用政策和收入转移矩阵构造政策诱导转移矩阵 Q_g 。
3. 从任意初始分布出发迭代 $\mu_{n+1} = \mu_n Q_g$ ，直到不变分布收敛。
4. 计算资本供给 $A(r) = \sum_{a,y} a \mu(a, y)$ 。

5. 用二分法搜索利率, 使 $A(r) = K^d(r)$ 。
6. 改变借贷下界 $\underline{a}$, 比较资本供给、约束绑定比例和财富分布。

外层利率搜索伪代码为

```

choose  $r_L, r_H$ ;
while  $|A(r) - K^d(r)| > \varepsilon$  :
     $r = (r_L + r_H)/2$ ;
    solve household problem at  $r$ ;
    compute invariant distribution and  $A(r)$ ;
    if  $A(r) > K^d(r)$ , lower  $r$ ;
    else raise  $r$ .

```

转移动态实验可以作为第二步: 猜测价格路径, 向后求政策, 向前推分布, 检查每期市场清算误差。报告时应同时给出资本路径、利率路径、分布统计量和最大市场清算误差。

第二十九章 离散时间资产定价

29.1 资产定价的最小语言

资产定价问题问的是：给定未来随机支付，今天应该值多少钱？在离散时间中，令 X_{t+1} 表示资产在下一期的支付， p_t 表示今天价格。最常见的定价公式是

$$p_t = \mathbb{E}_t[M_{t+1}X_{t+1}],$$

其中 M_{t+1} 是随机贴现因子。它把未来不同状态的支付按状态相关权重折现到今天。

定义 29.1 (支付与价格). 资产的下一期支付 X_{t+1} 是随机变量，可以包含红利、息票、清算价值或转售价格。价格 p_t 是在 t 期购买该资产需要支付的金额。

定义 29.2 (总收益率). 若资产价格为 $p_t > 0$ ，下一期总支付为 X_{t+1} ，则总收益率为

$$R_{t+1} = \frac{X_{t+1}}{p_t}.$$

例 29.1 (股票的一期支付). 若股票今天价格为 P_t ，下一期红利为 D_{t+1} ，下一期价格为 P_{t+1} ，则一期总支付为

$$X_{t+1} = D_{t+1} + P_{t+1}.$$

总收益率为

$$R_{t+1} = \frac{D_{t+1} + P_{t+1}}{P_t}.$$

资产定价就是决定 P_t 如何反映未来红利和转售价格。

例 29.2 (无风险债券). 一张无风险债券下一期支付 1。若无风险总收益率为 R_t^f ，其价格为

$$p_t^f = \frac{1}{R_t^f}.$$

这是最简单的折现：未来确定的一单位支付，今天价值等于无风险贴现值。

29.2 一价定律与线性定价

定义 29.3 (一价定律). 若两个资产在所有未来状态中的支付完全相同, 则它们今天价格必须相同。否则称一价定律被违反。

定义 29.4 (线性定价泛函). 若价格映射 q 对支付 X 满足

$$q(\alpha X + \gamma Y) = \alpha q(X) + \gamma q(Y),$$

则称 q 是线性定价泛函。

命题 29.1 (一价定律下的线性定价). 若资产市场允许组合, 且一价定律成立, 则由可交易支付张成空间上的价格映射是线性的。

证明. 若组合 $\alpha X + \gamma Y$ 可通过持有 α 单位资产 X 和 γ 单位资产 Y 构造, 其成本为 $\alpha q(X) + \gamma q(Y)$ 。若同一支付 $\alpha X + \gamma Y$ 的市场价格不是这个数, 则相同支付有两个价格, 违反一价定律。因此

$$q(\alpha X + \gamma Y) = \alpha q(X) + \gamma q(Y).$$

□

例 29.3 (复制组合定价). 资产 A 支付 $(1, 0)$, 价格 0.4; 资产 B 支付 $(0, 1)$, 价格 0.5。支付 $(2, 3)$ 可由 2 单位 A 和 3 单位 B 复制, 所以价格必须为

$$2(0.4) + 3(0.5) = 2.3.$$

若市场报价不是 2.3, 就存在同一支付不同价格。

29.3 有限状态、Arrow 证券与状态价格

设下一期有 S 个状态。一个支付可以写成向量

$$X = (X_1, \dots, X_S).$$

Arrow 证券 e_s 在状态 s 支付 1, 其他状态支付 0。

定义 29.5 (状态价格). Arrow 证券 e_s 的价格 q_s 称为状态价格。任意支付 X 的价格为

$$p = \sum_{s=1}^S q_s X_s$$

若 Arrow 证券完备。

例 29.4 (两状态 Arrow 定价). 两状态中, 状态价格为 $q_U = 0.4$ 、 $q_D = 0.5$ 。支付 $X = (10, 4)$ 的价格为

$$p = 0.4(10) + 0.5(4) = 6.$$

状态价格不是概率; 它同时包含概率和折现。

例 29.5 (无风险债券和状态价格). 无风险债券在两个状态都支付 1, 所以价格为

$$p^f = q_U + q_D.$$

若 $q_U + q_D = 0.95$, 则无风险总收益率为

$$R^f = \frac{1}{0.95}.$$

29.4 随机贴现因子

定义 29.6 (随机贴现因子). 随机变量 M_{t+1} 是随机贴现因子, 如果对任意资产支付 X_{t+1} , 有

$$p_t = \mathbb{E}_t[M_{t+1}X_{t+1}].$$

命题 29.2 (有限状态 SDF 定价). 在有限状态中, 若物理概率为 $\pi_s > 0$, 状态价格为 q_s , 则

$$M_s = \frac{q_s}{\pi_s}$$

是随机贴现因子, 并且

$$p = \mathbb{E}[MX].$$

证明. 由定义,

$$\mathbb{E}[MX] = \sum_s \pi_s M_s X_s = \sum_s \pi_s \frac{q_s}{\pi_s} X_s = \sum_s q_s X_s = p.$$

□

例 29.6 (从状态价格到 SDF). 若两状态概率为 $\pi_U = 0.6$, $\pi_D = 0.4$, 状态价格为 $q_U = 0.3$, $q_D = 0.5$, 则

$$M_U = \frac{0.3}{0.6} = 0.5, \quad M_D = \frac{0.5}{0.4} = 1.25.$$

坏状态贴现因子更高, 表示坏状态支付更有价值。

例 29.7 (无风险收益率与 SDF). 对无风险支付 1, 定价公式给出

$$p^f = \mathbb{E}[M_{t+1}].$$

因此

$$R_t^f = \frac{1}{\mathbb{E}_t[M_{t+1}]}.$$

无风险利率由随机贴现因子的条件均值决定。

29.5 风险中性概率

定义 29.7 (风险中性概率). 若存在概率 $\mathbb{Q}$, 使得任意支付 X 的价格可写为

$$p = \frac{1}{R^f} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X],$$

则 $\mathbb{Q}$ 称为风险中性概率。

命题 29.3 (状态价格与风险中性概率). 若状态价格 $q_s > 0$, 且无风险债券价格为

$$p^f = \sum_s q_s = \frac{1}{R^f},$$

则

$$\mathbb{Q}_s = R^f q_s$$

定义风险中性概率, 并且

$$p = \frac{1}{R^f} \sum_s \mathbb{Q}_s X_s.$$

证明. 首先

$$\sum_s \mathbb{Q}_s = R^f \sum_s q_s = R^f p^f = 1,$$

且 $\mathbb{Q}_s > 0$ 。再由 $\mathbb{Q}_s = R^f q_s$, 有

$$\sum_s q_s X_s = \frac{1}{R^f} \sum_s \mathbb{Q}_s X_s.$$

□

例 29.8 (两状态风险中性概率). 若 $q_U = 0.4, q_D = 0.5$, 则

$$p^f = 0.9, \quad R^f = \frac{1}{0.9}.$$

风险中性概率为

$$\mathbb{Q}_U = \frac{0.4}{0.9}, \quad \mathbb{Q}_D = \frac{0.5}{0.9}.$$

它们和真实概率无须相等。

例 29.9 (风险中性概率不是主观概率). 若坏状态真实概率只有 0.1, 但坏状态边际效用很高, 坏状态状态价格可能很大。于是风险中性概率会高估坏状态相对于真实概率的权重。风险中性概率是定价权重, 不是频率预测。

29.6 动态价格过程与鞅定价

令 B_t 是无风险账户, 满足

$$B_{t+1} = R_t^f B_t.$$

贴现价格为

$$\tilde{P}_t = \frac{P_t}{B_t}.$$

定理 29.1 (风险中性测度下的贴现价格鞅). 若在风险中性测度 $\mathbb{Q}$ 下, 资产下一期总支付为 $P_{t+1} + D_{t+1}$, 则无套利价格满足

$$P_t = \frac{1}{R_t^f} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[P_{t+1} + D_{t+1}].$$

等价地, 含红利再投资的贴现价格过程在 $\mathbb{Q}$ 下为鞅。

证明. 一时期风险中性定价给出

$$P_t = \frac{1}{R_t^f} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[P_{t+1} + D_{t+1}].$$

两边除以 B_t , 并用 $B_{t+1} = R_t^f B_t$, 得

$$\frac{P_t}{B_t} = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{B_{t+1}} \right].$$

这说明贴现后的总回报满足鞅条件。 □

例 29.10 (两期股票树). 股票下一期有上、下两个价格和红利, 总支付为 $X_U = 120$ 、 $X_D = 80$ 。若 $R^f = 1.05$, 风险中性概率为 0.6, 则

$$P_0 = \frac{1}{1.05} [0.6(120) + 0.4(80)] = \frac{104}{1.05}.$$

真实上升概率不进入这个公式; 它已经通过风险中性概率或 SDF 反映在价格中。

例 29.11 (零息债券递归定价). 到期支付 1 的两期零息债价格满足

$$p_t^{(2)} = \frac{1}{R_t^f} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[p_{t+1}^{(1)}].$$

若未来短利率随机, 则一期债价格 $p_{t+1}^{(1)} = 1/R_{t+1}^f$ 随状态变化。长期债价格因此取决于未来短利率路径的风险中性期望。

29.7 均衡中的随机贴现因子

在代表性家庭模型中，资产定价来自消费 Euler 方程。若家庭最大化

$$\mathbb{E}_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(c_{t+j}),$$

则对任意资产收益 R_{t+1} ，一阶条件为

$$1 = \mathbb{E}_t \left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} R_{t+1} \right].$$

因此

$$M_{t+1} = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}.$$

命题 29.4 (消费 Euler 方程与 SDF). 在光滑内部最优条件下，代表性家庭的边际替代率

$$M_{t+1} = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$$

是随机贴现因子。

证明. 购买一单位资产的成本为 p_t ，下一期支付为 X_{t+1} 。边际减少今天消费 p_t ，增加明天状态相关消费 X_{t+1} 。最优性要求

$$u'(c_t)p_t = \beta \mathbb{E}_t[u'(c_{t+1})X_{t+1}].$$

两边除以 $u'(c_t)$ ，得

$$p_t = \mathbb{E}_t \left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} X_{t+1} \right].$$

□

例 29.12 (CRRA 效用下的 SDF). 若

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

则

$$u'(c) = c^{-\gamma}.$$

随机贴现因子为

$$M_{t+1} = \beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma}.$$

消费增长低的状态中， M_{t+1} 高，支付更有价值。

例 29.13 (异质性主体中的定价核). 在不完全市场中，不同家庭的边际效用不同。若某资产由某类边际投资者定价，则 SDF 可能反映该边际投资者的消费增长，而不是简单代表性家庭的消费增长。Ch27 的分布和政策因此会影响资产价格。

29.8 风险溢价

由定价公式

$$1 = \mathbb{E}_t[M_{t+1}R_{t+1}]$$

和无风险收益率

$$R_t^f = \frac{1}{\mathbb{E}_t[M_{t+1}]}$$

可得风险溢价公式。

命题 29.5 (风险溢价协方差分解). 任意资产收益 R_{t+1} 满足

$$\mathbb{E}_t[R_{t+1}] - R_t^f = -R_t^f \text{Cov}_t(M_{t+1}, R_{t+1}).$$

证明. 由

$$1 = \mathbb{E}_t[M_{t+1}R_{t+1}] = \mathbb{E}_t[M_{t+1}]\mathbb{E}_t[R_{t+1}] + \text{Cov}_t(M_{t+1}, R_{t+1}).$$

又 $\mathbb{E}_t[M_{t+1}] = 1/R_t^f$, 所以

$$1 = \frac{\mathbb{E}_t[R_{t+1}]}{R_t^f} + \text{Cov}_t(M_{t+1}, R_{t+1}).$$

整理得到结论。 □

例 29.14 (为什么坏状态支付贵). 若某资产在坏状态收益高, 而坏状态中 M 也高, 则

$$\text{Cov}(M, R) > 0.$$

风险溢价公式给出该资产期望收益低于无风险收益率。它提供保险, 所以投资者愿意接受较低平均收益。

例 29.15 (股票风险溢价直觉). 若股票在消费高增长的好时期收益高、在消费低增长的坏时期收益低, 则 M 与股票收益负相关。于是

$$\text{Cov}(M, R) < 0,$$

股票需要正风险溢价补偿它在坏状态表现差。

29.9 多期递归定价

若资产支付红利流 $\{D_{t+j}\}$, 价格满足

$$P_t = \mathbb{E}_t[M_{t+1}(D_{t+1} + P_{t+1})].$$

向前迭代得到

$$P_t = \mathbb{E}_t \sum_{j=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^j M_{t+k} \right) D_{t+j},$$

在适当横截条件下成立。

例 29.16 (永续债定价). 若每期支付固定息票 d , 且无风险利率常数 R^f , 则价格为

$$P = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d}{(R^f)^j} = \frac{d}{R^f - 1}.$$

这是多期递归定价在确定贴现率和确定现金流下的特例。

例 29.17 (股价红利比). 若红利增长和 SDF 独立同分布, 并且

$$\mathbb{E}[M_{t+1}G_{t+1}] = \kappa < 1,$$

其中 $G_{t+1} = D_{t+1}/D_t$, 则猜测 $P_t = \phi D_t$. 代入

$$\phi D_t = \mathbb{E}_t[M_{t+1}(D_{t+1} + \phi D_{t+1})] = (1 + \phi)\kappa D_t.$$

所以

$$\phi = \frac{\kappa}{1 - \kappa}.$$

29.10 卷二总结与卷三入口

卷二从测度、积分、条件期望和函数空间出发, 经过过滤、动态规划和递归均衡, 最终到达本章资产定价公式:

$$p_t = \mathbb{E}_t[M_{t+1}X_{t+1}].$$

卷三会把时间步长缩短到连续时间: 离散的风险中性鞅会成为连续时间鞅, 离散 Euler 方程会通向 HJB, 离散价格树会通向 Black-Scholes 和 Merton 问题。

29.11 Exercises

习题 29.1. 定义资产支付、价格和总收益率。

习题 29.2. 解释一价定律。

习题 29.3. 证明一价定律下可交易支付的价格映射线性。

习题 29.4. 定义 Arrow 证券和状态价格。

习题 29.5. 两状态状态价格为 $q_U = 0.3, q_D = 0.6$, 支付为 $(5, 2)$ 。求价格。

习题 29.6. 给定状态价格, 求无风险收益率。

习题 29.7. 定义随机贴现因子。

习题 29.8. 在有限状态中由状态价格和物理概率构造 SDF。

习题 29.9. 证明 $M_s = q_s/\pi_s$ 给出 SDF。

习题 29.10. 说明坏状态中 SDF 高的经济含义。

习题 29.11. 定义风险中性概率。

习题 29.12. 由状态价格构造风险中性概率。

习题 29.13. 证明风险中性概率下价格等于贴现期望支付。

习题 29.14. 解释风险中性概率为什么不是物理概率。

习题 29.15. 写出股票的一期递归定价公式。

习题 29.16. 证明风险中性测度下贴现总回报为鞅。

习题 29.17. 两状态支付为 $120, 80$, $R^f = 1.1$, $Q_U = 0.4$ 。求价格。

习题 29.18. 写出代表性家庭的消费 Euler 方程。

习题 29.19. 由消费 Euler 方程推出 SDF。

习题 29.20. CRRA 效用下写出 SDF。

习题 29.21. 说明异质性主体模型中边际投资者为何重要。

习题 29.22. 证明风险溢价协方差分解。

习题 29.23. 若 $\text{Cov}(M, R) < 0$, 风险溢价符号如何?

习题 29.24. 解释保险资产为何可能有负风险溢价。

习题 29.25. 写出多期红利资产递归定价公式。

习题 29.26. 在常数无风险利率下求永续债价格。

习题 29.27. 推导常数股价红利比公式。

习题 29.28. 说明状态价格、SDF 和风险中性概率之间的关系。

习题 29.29. 给定 M 和收益 R ，如何检查资产是否正确定价？

习题 29.30. 若存在 $M > 0$ 定价所有资产，它与无套利有什么关系？

习题 29.31. 有限状态市场不完备时，SDF 是否唯一？解释。

习题 29.32. 解释贴现价格鞅和资产泡沫之间的联系入口。

习题 29.33. 说明 Ch28 与 Ch23 鞅章节的关系。

习题 29.34. 说明 Ch28 与 Ch27 异质性主体均衡的关系。

习题 29.35. 用一句话概括离散时间资产定价的核心公式。

29.12 Solutions

本章解答的主线是：价格是未来支付的状态相关折现值。状态相关折现权重可以写成状态价格、随机贴现因子或风险中性概率。

解答 29.1. 支付 X_{t+1} 是下一期资产给持有者的随机现金流或转售价值。价格 p_t 是今天购买该支付的成本。若 $p_t > 0$ ，总收益率为

$$R_{t+1} = \frac{X_{t+1}}{p_t}.$$

解答 29.2. 一价定律说：如果两个资产在所有未来状态中的支付完全相同，它们今天价格必须相同。否则可以低价买入、高价卖出同一支付。

解答 29.3. 组合 $\alpha X + \gamma Y$ 可由持有 α 单位 X 和 γ 单位 Y 构造，成本为 $\alpha q(X) + \gamma q(Y)$ 。若它的价格不同，则同一支付有两个价格，违反一价定律。因此价格映射线性。

解答 29.4. Arrow 证券在某一状态支付 1，其他状态支付 0。该证券价格称为该状态的状态价格 q_s 。

解答 29.5.

$$p = 0.3(5) + 0.6(2) = 1.5 + 1.2 = 2.7.$$

解答 29.6. 无风险债券在所有状态支付 1，价格为

$$p^f = \sum_s q_s.$$

无风险总收益率为

$$R^f = \frac{1}{p^f}.$$

解答 29.7. 随机贴现因子 M_{t+1} 满足

$$p_t = \mathbb{E}_t[M_{t+1}X_{t+1}]$$

对所有相关资产支付成立。

解答 29.8. 若物理概率为 $\pi_s > 0$ ，状态价格为 q_s ，定义

$$M_s = \frac{q_s}{\pi_s}.$$

这就是有限状态中的 SDF。

解答 29.9.

$$\mathbb{E}[MX] = \sum_s \pi_s M_s X_s = \sum_s \pi_s \frac{q_s}{\pi_s} X_s = \sum_s q_s X_s = p.$$

解答 29.10. 坏状态中 SDF 高说明坏状态支付更有价值。通常这是因为坏状态消费低、边际效用高，投资者特别重视那时的一单位支付。

解答 29.11. 风险中性概率 $\mathbb{Q}$ 是使价格写成

$$p = \frac{1}{R^f} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X]$$

的概率测度。

解答 29.12. 由状态价格 q_s 构造

$$\mathbb{Q}_s = R^f q_s,$$

其中

$$R^f = \frac{1}{\sum_s q_s}.$$

解答 29.13. 因为 $\sum_s \mathbb{Q}_s = R^f \sum_s q_s = 1$ ，且

$$\sum_s q_s X_s = \frac{1}{R^f} \sum_s \mathbb{Q}_s X_s.$$

所以价格等于风险中性期望支付的无风险贴现值。

解答 29.14. 风险中性概率是定价权重，它把概率和风险调整合在一起。物理概率描述真实频率；风险中性概率描述按无风险利率贴现时应给各状态支付的权重。

解答 29.15. 若股票红利为 D_{t+1} ，下一期价格为 P_{t+1} ，则

$$P_t = \mathbb{E}_t[M_{t+1}(D_{t+1} + P_{t+1})].$$

风险中性形式为

$$P_t = \frac{1}{R_t^f} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[D_{t+1} + P_{t+1}].$$

解答 29.16. 由风险中性定价

$$P_t = \frac{1}{R_t^f} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[P_{t+1} + D_{t+1}].$$

用 $B_{t+1} = R_t^f B_t$ 改写为

$$\frac{P_t}{B_t} = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{B_{t+1}} \right].$$

这就是贴现总回报的鞅条件。

解答 29.17.

$$p = \frac{1}{1.1} [0.4(120) + 0.6(80)] = \frac{96}{1.1}.$$

解答 29.18. 代表性家庭 Euler 方程为

$$1 = \mathbb{E}_t \left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} R_{t+1} \right].$$

解答 29.19. 若资产价格为 p_t 、支付为 X_{t+1} ，最优性给出

$$u'(c_t)p_t = \beta \mathbb{E}_t[u'(c_{t+1})X_{t+1}].$$

除以 $u'(c_t)$ ，得到

$$p_t = \mathbb{E}_t \left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} X_{t+1} \right],$$

所以

$$M_{t+1} = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}.$$

解答 29.20. CRRA 效用下 $u'(c) = c^{-\gamma}$ ，因此

$$M_{t+1} = \beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma}.$$

解答 29.21. 不完全市场中, 不同家庭不能完全共享风险, 边际效用不同。真正愿意调整资产持仓的边际投资者, 其边际效用过程会影响资产价格。

解答 29.22. 由

$$1 = \mathbb{E}_t[MR] = \mathbb{E}_t[M]\mathbb{E}_t[R] + \text{Cov}_t(M, R),$$

且 $\mathbb{E}_t[M] = 1/R_t^f$, 整理得

$$\mathbb{E}_t[R] - R_t^f = -R_t^f \text{Cov}_t(M, R).$$

解答 29.23. 若 $\text{Cov}(M, R) < 0$, 则

$$\mathbb{E}[R] - R^f > 0.$$

资产在高边际效用状态表现差, 需要正风险溢价。

解答 29.24. 保险资产在坏状态收益高, 而坏状态 M 高, 所以 $\text{Cov}(M, R) > 0$ 。风险溢价公式给出其期望收益可低于无风险收益。

解答 29.25. 多期红利资产满足

$$P_t = \mathbb{E}_t[M_{t+1}(D_{t+1} + P_{t+1})].$$

向前展开可得到折现红利流价格。

解答 29.26. 永续债每期支付 d , 常数无风险收益率为 R^f , 则

$$P = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d}{(R^f)^j} = \frac{d}{R^f - 1}.$$

解答 29.27. 猜测 $P_t = \phi D_t$, 且 $\mathbb{E}[M_{t+1}G_{t+1}] = \kappa$ 。代入

$$\phi D_t = (1 + \phi)\kappa D_t.$$

所以

$$\phi = \frac{\kappa}{1 - \kappa}.$$

解答 29.28. 状态价格 q_s 是状态支付的今天价格; SDF 满足 $q_s = \pi_s M_s$; 风险中性概率满足 $\mathbb{Q}_s = R^f q_s$ 。三者是同一组定价权重的不同表示。

解答 29.29. 检查

$$1 = \mathbb{E}[MR]$$

是否成立。若资产以价格 p 和支付 X 表示, 则检查

$$p = \mathbb{E}[MX].$$

解答 29.30. 在有限状态标准框架中, 存在严格正的 SDF 能定价所有资产, 是无套利的核心刻画之一。严格正保证每个状态的正支付都有正价格。

解答 29.31. 不完备市场中, 可交易资产不能张成所有状态支付, 因此满足定价方程的 SDF 通常不唯一。不同 SDF 在不可交易支付方向上可以不同。

解答 29.32. 贴现价格鞅说明价格等于未来贴现支付的条件期望。若横截条件失败, 价格中可能出现不由基本红利解释的泡沫成分。

解答 29.33. Ch23 提供过滤、条件期望和鞅语言。Ch28 把这些语言用于资产价格, 特别是风险中性测度下贴现价格的鞅性质。

解答 29.34. Ch27 给出均衡中的消费、财富分布和边际效用。Ch28 用边际效用或 SDF 给随机支付定价。

解答 29.35. 核心公式是

$$p_t = \mathbb{E}_t[M_{t+1}X_{t+1}].$$

29.13 Computation Lab

本章计算实验围绕有限状态资产定价。目标是让状态价格、SDF、风险中性概率和价格树可以互相转换。

1. 给定状态价格 q_s 和支付矩阵, 计算一组资产价格。
2. 给定物理概率 π_s 和状态价格 q_s , 计算 SDF $M_s = q_s/\pi_s$ 。
3. 给定状态价格, 计算无风险收益率和风险中性概率。
4. 在两状态二叉树中, 用风险中性概率递归计算股票和债券价格。
5. 给定模拟消费增长和 CRRA 参数, 构造消费型 SDF, 并检查 $1 = \frac{1}{T} \sum_t M_{t+1}R_{t+1}$ 的样本误差。
6. 对资产收益做协方差分解, 报告 $-R^f \text{Cov}(M, R)$ 与平均超额收益的差距。

有限状态定价的基本矩阵形式为

$$p = QX,$$

其中 X 的列是资产支付, $Q = (q_1, \dots, q_S)$ 是状态价格行向量。若已知价格 p 和支付矩阵 X , 并且 X 可逆, 则

$$Q = pX^{-1}.$$

风险中性概率转换为

$$R^f = \frac{1}{\sum_s q_s}, \quad Q_s = R^f q_s.$$

计算报告应同时列出物理概率、状态价格、SDF 和风险中性概率, 避免把这些对象混在一起。

第三部分

连续时间金融与现代宏观金融

第三十章 常微分方程与经济增长

30.1 从离散时间到连续时间

Ch24 的动态方程是

$$x_{t+1} = f(x_t).$$

连续时间把相邻日期之间的间隔缩短，状态变化由瞬时变化率描述：

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)).$$

这里 $x(t)$ 是时点 t 的状态， $\dot{x}(t)$ 是状态的速度。经济增长、资本积累、债务动态、资产价格和连续时间控制都以这种语言表达。

定义 30.1 (常微分方程). 一阶常微分方程是形如

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t))$$

的方程。若右侧不显含 t ，即

$$\dot{x}(t) = F(x(t)),$$

则称为自治 ODE。

定义 30.2 (初值问题). 给定初始状态 $x(0) = x_0$ ，求满足

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0$$

的路径 $x(t)$ ，称为初值问题。

例 30.1 (连续复利). 资产 $b(t)$ 按无风险利率 r 连续复利增长：

$$\dot{b}(t) = rb(t).$$

若 $b(0) = b_0$ ，则

$$b(t) = b_0 e^{rt}.$$

这是一阶线性 ODE，也是离散时间 $b_{t+1} = (1+r)b_t$ 的连续时间对应。

例 30.2 (资本折旧). 若没有投资, 资本只按折旧率 δ 下降:

$$\dot{k}(t) = -\delta k(t).$$

解为

$$k(t) = k(0)e^{-\delta t}.$$

折旧率越高, 资本越快趋近于零。

30.2 一阶线性 ODE

命题 30.1 (标量线性 ODE 解). 若

$$\dot{x}(t) = ax(t), \quad x(0) = x_0,$$

则

$$x(t) = x_0 e^{at}.$$

证明. 令 $y(t) = x_0 e^{at}$. 则

$$\dot{y}(t) = ax_0 e^{at} = ay(t),$$

且 $y(0) = x_0$. 因此 y 满足初值问题. 在线性 ODE 的唯一性条件下, 它就是解. □

命题 30.2 (标量仿射 ODE 解). 若

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b, \quad a \neq 0,$$

稳态为

$$x^* = -\frac{b}{a},$$

且

$$x(t) - x^* = e^{at}(x_0 - x^*).$$

证明. 稳态满足 $0 = ax^* + b$, 所以 $x^* = -b/a$. 两边相减得

$$\frac{d}{dt}(x(t) - x^*) = a(x(t) - x^*).$$

应用线性 ODE 解, 得到

$$x(t) - x^* = e^{at}(x_0 - x^*).$$

□

例 30.3 (债务与基本盈余). 债务满足

$$\dot{b}(t) = rb(t) - s,$$

其中 $s > 0$ 是连续时间基本盈余。稳态为

$$b^* = \frac{s}{r}.$$

误差满足

$$b(t) - b^* = e^{rt}(b(0) - b^*).$$

若 $r > 0$, 除非初始债务正好等于稳态, 否则债务偏离会放大。这说明仅有固定盈余并不能让所有初始债务路径稳定。

例 30.4 (均值回复过程的不确定性骨架). 考虑

$$\dot{x}(t) = -\lambda(x(t) - \bar{x}), \quad \lambda > 0.$$

解为

$$x(t) - \bar{x} = e^{-\lambda t}(x(0) - \bar{x}).$$

路径以指数速度回到长期均值 $\bar{x}$ 。许多价格调整和误差修正模型都使用这种结构。

30.3 稳态与一维相图

定义 30.3 (稳态). 自治 ODE

$$\dot{x} = F(x)$$

的稳态 x^* 满足

$$F(x^*) = 0.$$

定义 30.4 (局部稳定). 若存在 x^* 的邻域, 使得从该邻域内任意初值出发的路径都收敛到 x^* , 则称 x^* 局部稳定。

命题 30.3 (一维 ODE 的局部稳定判别). 设 F 在稳态 x^* 附近可微, 且

$$F'(x^*) < 0.$$

则 x^* 局部稳定。若 $F'(x^*) > 0$, 则 x^* 局部不稳定。

证明. 在 x^* 附近,

$$F(x) = F'(x^*)(x - x^*) + o(|x - x^*|).$$

若 $F'(x^*) < 0$, 则当 $x > x^*$ 且足够近时, $F(x) < 0$, 路径向左移动; 当 $x < x^*$ 且足够近时, $F(x) > 0$, 路径向右移动。因此路径被推向稳态。若 $F'(x^*) > 0$, 方向相反, 路径远离稳态。□

例 30.5 (物流增长). 人口或技术扩散满足

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad r > 0.$$

稳态为 0 和 K 。导数为

$$F'(x) = r - \frac{2r}{K}x.$$

所以

$$F'(0) = r > 0, \quad F'(K) = -r < 0.$$

零稳态不稳定, 承载量 K 稳定。

例 30.6 (价格调整). 设价格按超额需求调整:

$$\dot{p} = \alpha[D(p) - S(p)], \quad \alpha > 0.$$

若 $D'(p) < 0$ 、 $S'(p) > 0$, 均衡 p^* 满足 $D(p^*) = S(p^*)$ 。右侧导数为

$$\alpha[D'(p^*) - S'(p^*)] < 0.$$

因此均衡价格局部稳定。

30.4 线性系统与特征值

多维线性系统写作

$$\dot{x}(t) = Ax(t),$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 。

命题 30.4 (可对角化线性系统解). 若 $A = PDP^{-1}$, 其中

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

则

$$x(t) = Pe^{Dt}P^{-1}x(0),$$

其中

$$e^{Dt} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}).$$

证明. 令 $z = P^{-1}x$ 。则

$$\dot{z} = P^{-1}\dot{x} = P^{-1}Ax = P^{-1}APz = Dz.$$

逐个分量有

$$z_i(t) = e^{\lambda_i t} z_i(0).$$

故

$$z(t) = e^{Dt} z(0),$$

再乘回 P , 得到结论。 □

例 30.7 (二维稳定节点). 若

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x,$$

则

$$x_1(t) = x_1(0)e^{-t}, \quad x_2(t) = x_2(0)e^{-2t}.$$

两个特征值均为负, 路径收敛到原点, 第二个方向收敛更快。

例 30.8 (鞍型系统). 若

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x,$$

则 $x_1(t)$ 收敛, $x_2(t)$ 发散。只有初始条件满足 $x_2(0) = 0$ 的路径才收敛到原点。这就是连续时间鞍路径的最简单形式。

30.5 非线性系统线性化

考虑

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

稳态 x^* 满足 $F(x^*) = 0$ 。在稳态附近,

$$\dot{x} \approx J(x^*)(x - x^*),$$

其中 $J(x^*)$ 是雅可比矩阵。

命题 30.5 (非线性 ODE 的线性化). 若 F 在 x^* 可微, 且 $F(x^*) = 0$, 则

$$F(x) = J(x^*)(x - x^*) + o(\|x - x^*\|).$$

因此局部动态的一阶近似由

$$\dot{z} = J(x^*)z, \quad z = x - x^*$$

给出。

证明. 这是多元 Taylor 展开在一阶处的形式。因为 $F(x^*) = 0$ ，常数项消失，剩下雅可比矩阵乘以偏离量和高阶小量。 $\square$

例 30.9 (非线性资本动态线性化). 若

$$\dot{k} = sAk^\alpha - \delta k, \quad 0 < \alpha < 1,$$

正稳态满足

$$sA(k^*)^\alpha = \delta k^*.$$

右侧导数为

$$F'(k) = sA\alpha k^{\alpha-1} - \delta.$$

在稳态处，由 $sA(k^*)^{\alpha-1} = \delta$ ，得

$$F'(k^*) = \alpha\delta - \delta = -(1 - \alpha)\delta < 0.$$

所以正稳态局部稳定。

30.6 Solow 增长模型

总量资本满足

$$\dot{K} = sY - \delta K, \quad Y = F(K, AL).$$

令有效劳动为 AL ，且

$$\frac{\dot{A}}{A} = g, \quad \frac{\dot{L}}{L} = n.$$

定义有效劳动人均资本

$$k = \frac{K}{AL}.$$

若生产函数为常数规模报酬，令

$$y = f(k).$$

则 Solow 方程为

$$\dot{k} = sf(k) - (\delta + n + g)k.$$

命题 30.6 (Solow 稳态). 若 $f'(k) > 0$ 、 $f''(k) < 0$, 正稳态 k^* 满足

$$sf(k^*) = (\delta + n + g)k^*.$$

证明. 稳态要求 $\dot{k} = 0$. 代入 Solow 方程即得

$$sf(k^*) - (\delta + n + g)k^* = 0.$$

整理得到结论。 □

例 30.10 (Cobb-Douglas Solow 稳态). 若

$$f(k) = Ak^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1,$$

稳态满足

$$sA(k^*)^\alpha = (\delta + n + g)k^*.$$

所以

$$k^* = \left(\frac{sA}{\delta + n + g} \right)^{1/(1-\alpha)}.$$

储蓄率和技术水平提高稳态资本, 折旧、人口增长和技术增长稀释资本, 降低稳态有效劳动人均资本。

命题 30.7 (Solow 局部收敛速度). *Cobb-Douglas Solow* 模型在正稳态附近的线性化系数为

$$F'(k^*) = -(1 - \alpha)(\delta + n + g).$$

证明. 令

$$F(k) = sAk^\alpha - (\delta + n + g)k.$$

则

$$F'(k) = sA\alpha k^{\alpha-1} - (\delta + n + g).$$

稳态条件给出

$$sA(k^*)^{\alpha-1} = \delta + n + g.$$

代入得

$$F'(k^*) = \alpha(\delta + n + g) - (\delta + n + g) = -(1 - \alpha)(\delta + n + g).$$

□

例 30.11 (半衰期). 若线性化误差满足

$$\dot{z} = -\lambda z,$$

则

$$z(t) = z(0)e^{-\lambda t}.$$

半衰期 $T_{1/2}$ 满足 $e^{-\lambda T_{1/2}} = 1/2$, 所以

$$T_{1/2} = \frac{\log 2}{\lambda}.$$

在 Solow 模型中, $\lambda = (1 - \alpha)(\delta + n + g)$ 。

例 30.12 (黄金律资本). 稳态消费为

$$c^* = f(k^*) - (\delta + n + g)k^*.$$

最大化稳态消费的一阶条件是

$$f'(k^{GR}) = \delta + n + g.$$

黄金律资本不一定等于竞争经济给定储蓄率下的稳态资本; 它是稳态消费最大的参考点。

30.7 Ramsey 相图入口

Ramsey 模型中, 规划者选择消费路径。连续时间形式通常给出两个状态变量:

$$k(t), \quad c(t).$$

典型方程是

$$\dot{k} = f(k) - c - (\delta + n + g)k,$$

以及 Euler 方程

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \{f'(k) - \delta - \rho - \theta g\}$$

在常见 CRRA 设定下。

例 30.13 (资本零增长曲线). $\dot{k} = 0$ 给出

$$c = f(k) - (\delta + n + g)k.$$

在相图中, 这条曲线表示保持资本有效劳动比不变所需的消费水平。消费高于此曲线时 $\dot{k} < 0$, 低于此曲线时 $\dot{k} > 0$ 。

例 30.14 (消费零增长曲线). $\dot{c} = 0$ 给出

$$f'(k) = \delta + \rho + \theta g.$$

若 $f''(k) < 0$, 这确定唯一 k^* 。当 k 低于该值时, 边际产出高, 消费增长率为正; 当 k 高于该值时, 消费增长率为负。

例 30.15 (Ramsey 鞍路径直觉). Ramsey 系统通常有一个状态变量 k 和一个跳变量 c 。给定 k_0 , 只有一个合适的初始消费 c_0 能使路径收敛到稳态。消费太高会让资本耗尽, 消费太低会导致过度积累。这个收敛路径就是鞍路径。

30.8 数值解的入口

连续时间模型常用数值方法模拟。最简单的是 Euler 离散化:

$$x(t + \Delta) = x(t) + \Delta F(x(t)).$$

它把 ODE 暂时转回差分方程。

例 30.16 (Euler 离散化误差直觉). 对

$$\dot{x} = -x, \quad x(0) = 1,$$

真解为 e^{-t} 。Euler 步长 Δ 给出

$$x_{n+1} = x_n - \Delta x_n = (1 - \Delta)x_n.$$

因此

$$x_n = (1 - \Delta)^n.$$

当 Δ 小且 $t = n\Delta$ 固定时, $(1 - \Delta)^n$ 近似 e^{-t} 。

30.9 通往最优控制

本章只研究给定 ODE 系统的路径、稳态和稳定性。Ch30 会加入选择变量和目标泛函, 例如

$$\max_{c(t)} \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c(t)) dt$$

subject to

$$\dot{k} = f(k) - c - \delta k.$$

这会把 ODE 和优化结合起来, 产生 Hamiltonian、协态变量和横截条件。再往后, Ch33 会把随机连续时间问题写成 HJB 方程。

30.10 Exercises

习题 30.1. 定义一阶常微分方程和自治 ODE。

习题 30.2. 定义初值问题。

习题 30.3. 求解 $\dot{x} = 3x$ 、 $x(0) = 2$ 。

习题 30.4. 求解 $\dot{x} = -2x + 4$ 、 $x(0) = 0$ 。

习题 30.5. 证明标量仿射 ODE 的误差公式。

习题 30.6. 定义稳态和局部稳定。

习题 30.7. 证明一维 ODE 中 $F'(x^*) < 0$ 蕴含局部稳定。

习题 30.8. 判断 $\dot{x} = x(1 - x)$ 的稳态和稳定性。

习题 30.9. 解释相图中箭头的含义。

习题 30.10. 求二维系统 $\dot{x} = Ax$ 在对角矩阵 $A = \text{diag}(-1, -3)$ 下的解。

习题 30.11. 说明特征值实部为负为何对应局部稳定。

习题 30.12. 给出一个鞍型线性系统。

习题 30.13. 写出非线性 ODE 在稳态附近的线性化公式。

习题 30.14. 对 $\dot{k} = sAk^\alpha - \delta k$ 求正稳态。

习题 30.15. 证明上述正稳态局部稳定。

习题 30.16. 推导有效劳动人均资本 $k = K/(AL)$ 的 Solow 方程。

习题 30.17. 写出 Cobb-Douglas Solow 稳态。

习题 30.18. 说明人口增长 n 如何影响稳态有效劳动人均资本。

习题 30.19. 推导 Cobb-Douglas Solow 的局部收敛速度。

习题 30.20. 给定 $\lambda = 0.04$ ，求半衰期公式表达。

习题 30.21. 定义黄金律资本。

习题 30.22. 写出 Ramsey 模型的 $\dot{k} = 0$ 曲线。

习题 30.23. 写出 Ramsey 模型的 $\dot{c} = 0$ 曲线。

习题 30.24. 解释 Ramsey 模型中鞍路径的含义。

习题 30.25. 说明状态变量和跳变量的区别。

习题 30.26. 对 $\dot{x} = -x$ 写出 Euler 离散化。

习题 30.27. 解释步长过大为何可能导致数值路径不稳定。

习题 30.28. 说明连续时间 ODE 与离散时间差分方程的联系。

习题 30.29. 给出一个价格调整 ODE，并说明稳定条件。

习题 30.30. 解释为什么 Solow 模型中的稳态不是静止总量资本。

习题 30.31. 若 A 和 L 增长，稳态中 K 是否增长？解释。

习题 30.32. 说明线性化为什么只适用于局部分析。

习题 30.33. 说明 Ch29 和 Ch30 最优控制的关系。

习题 30.34. 说明 Ch29 和 Ch33 HJB 方程的关系。

习题 30.35. 用一句话概括连续时间增长模型的数学骨架。

30.11 Solutions

本章解答的核心是把动态系统写成“速度等于当前位置的函数”，再用稳态、导数和线性化判断路径方向。

解答 30.1. 一阶常微分方程形如

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)).$$

若右侧不显含 t ，即 $\dot{x} = F(x)$ ，则称为自治 ODE。

解答 30.2. 初值问题是在给定 $x(0) = x_0$ 的条件下，求满足

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t))$$

的路径 $x(t)$ 。

解答 30.3. 线性 ODE 解为

$$x(t) = x(0)e^{3t} = 2e^{3t}.$$

解答 30.4. 稳态满足

$$0 = -2x^* + 4,$$

所以 $x^* = 2$ 。误差公式给出

$$x(t) - 2 = e^{-2t}(0 - 2).$$

因此

$$x(t) = 2 - 2e^{-2t}.$$

解答 30.5. 若 $\dot{x} = ax + b$, 稳态 $x^* = -b/a$ 。两边相减:

$$\frac{d}{dt}(x - x^*) = a(x - x^*).$$

所以

$$x(t) - x^* = e^{at}(x(0) - x^*).$$

解答 30.6. 稳态 x^* 满足 $F(x^*) = 0$ 。若从 x^* 附近出发的路径收敛到 x^* , 则称 x^* 局部稳定。

解答 30.7. 若 $F'(x^*) < 0$, 则在 x^* 附近, $x > x^*$ 时 $F(x) < 0$, 路径向左; $x < x^*$ 时 $F(x) > 0$, 路径向右。两侧箭头都指向稳态, 因此局部稳定。

解答 30.8. 稳态满足

$$x(1 - x) = 0,$$

所以 $x = 0, 1$ 。导数为 $F'(x) = 1 - 2x$ 。因此 $F'(0) = 1 > 0$, 零不稳定; $F'(1) = -1 < 0$, 一稳定。

解答 30.9. 相图箭头表示 $\dot{x}$ 的符号。若 $\dot{x} > 0$, 状态向右或向上移动; 若 $\dot{x} < 0$, 状态向左或向下移动。

解答 30.10. 系统为

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = -3x_2.$$

解为

$$x_1(t) = x_1(0)e^{-t}, \quad x_2(t) = x_2(0)e^{-3t}.$$

解答 30.11. 线性系统的每个特征方向上路径按 $e^{\lambda t}$ 变化。若特征值实部为负, 则 $e^{\lambda t}$ 衰减到零, 所以该方向稳定。所有方向都衰减时, 稳态局部稳定。

解答 30.12. 例如

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = 2x_2.$$

第一个方向收敛, 第二个方向发散, 所以原点是鞍点。

解答 30.13. 若 $F(x^*) = 0$, 则

$$F(x) = J(x^*)(x - x^*) + o(\|x - x^*\|).$$

令 $z = x - x^*$, 局部线性化为

$$\dot{z} = J(x^*)z.$$

解答 30.14. 正稳态满足

$$sA(k^*)^\alpha = \delta k^*.$$

因此

$$k^* = \left(\frac{sA}{\delta} \right)^{1/(1-\alpha)}.$$

解答 30.15. 右侧 $F(k) = sAk^\alpha - \delta k$, 导数为

$$F'(k) = sA\alpha k^{\alpha-1} - \delta.$$

稳态条件给出 $sA(k^*)^{\alpha-1} = \delta$, 所以

$$F'(k^*) = \alpha\delta - \delta = -(1-\alpha)\delta < 0.$$

故局部稳定。

解答 30.16. 由 $k = K/(AL)$, 增长率满足

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{L}}{L}.$$

若 $\dot{K} = sY - \delta K$, 且 $Y = ALf(k)$, 则

$$\dot{k} = sf(k) - (\delta + n + g)k.$$

解答 30.17. 若 $f(k) = Ak^\alpha$, 稳态满足

$$sA(k^*)^\alpha = (\delta + n + g)k^*.$$

所以

$$k^* = \left(\frac{sA}{\delta + n + g} \right)^{1/(1-\alpha)}.$$

解答 30.18. 人口增长 n 提高资本稀释项 $(\delta + n + g)k$ 。在其他参数不变时, n 越高, 维持同一有效劳动人均资本需要更多投资, 所以稳态 k^* 降低。

解答 30.19. 令

$$F(k) = sAk^\alpha - (\delta + n + g)k.$$

在稳态处 $sA(k^*)^{\alpha-1} = \delta + n + g$ 。因此

$$F'(k^*) = \alpha(\delta + n + g) - (\delta + n + g) = -(1 - \alpha)(\delta + n + g).$$

解答 30.20. 半衰期为

$$T_{1/2} = \frac{\log 2}{\lambda}.$$

若 $\lambda = 0.04$, 则

$$T_{1/2} = \frac{\log 2}{0.04}.$$

解答 30.21. 黄金律资本 k^{GR} 最大化稳态消费

$$c = f(k) - (\delta + n + g)k.$$

一阶条件为

$$f'(k^{GR}) = \delta + n + g.$$

解答 30.22. $\dot{k} = 0$ 给出

$$c = f(k) - (\delta + n + g)k.$$

这条曲线表示资本有效劳动比保持不变时的消费。

解答 30.23. 若

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}[f'(k) - \delta - \rho - \theta g],$$

则 $\dot{c} = 0$ 要求

$$f'(k) = \delta + \rho + \theta g.$$

解答 30.24. 给定初始资本 k_0 , 只有一个初始消费 c_0 能使路径收敛到稳态。这个收敛路径就是鞍路径。消费太高或太低都会偏离稳态。

解答 30.25. 状态变量由过去积累决定, 不能瞬间跳变, 例如资本。跳变量可以在时点上立即调整, 例如竞争均衡中的消费或资产价格。

解答 30.26. Euler 离散化为

$$x_{n+1} = x_n + \Delta(-x_n) = (1 - \Delta)x_n.$$

解答 30.27. 步长过大时，离散更新可能越过稳态甚至改变稳定性。例如 $\dot{x} = -x$ 稳定，但若 $\Delta > 2$ ，离散系数 $1 - \Delta$ 的绝对值大于 1，数值路径发散。

解答 30.28. 差分方程描述有限时间间隔的变化，ODE 描述瞬时变化率。Euler 离散化

$$x_{t+\Delta} = x_t + \Delta F(x_t)$$

把 ODE 转成近似差分方程。

解答 30.29. 例子：

$$\dot{p} = \alpha[D(p) - S(p)].$$

若 $D'(p^*) - S'(p^*) < 0$ ，则均衡 p^* 局部稳定。

解答 30.30. Solow 稳态通常指有效劳动人均资本 $k = K/(AL)$ 不变。若 A 或 L 增长，总量资本 $K = kAL$ 仍会增长。

解答 30.31. 若 k 在稳态中不变，而 A 和 L 分别以 g, n 增长，则

$$K = kAL$$

以 $g + n$ 的速度增长。

解答 30.32. 线性化忽略高阶项，只在稳态附近误差较小时可靠。远离稳态时，非线性项可能主导动态。

解答 30.33. Ch29 给出状态如何按 ODE 运动。Ch30 会在 ODE 约束上加入目标泛函和控制变量，研究如何选择最优路径。

解答 30.34. HJB 方程是连续时间动态规划的递归形式。Ch29 的 ODE 是状态转移语言，Ch33 会把它和随机过程、最优控制结合。

解答 30.35. 连续时间增长模型的骨架是：状态按 ODE 积累，稳态由 $\dot{x} = 0$ 决定，稳定性由导数或特征值判断。

30.12 Computation Lab

本章计算实验围绕连续时间路径和相图。初版可以使用简单 Euler 方法；正式数值章节再比较 Runge-Kutta 等更高阶方法。

1. 对 $\dot{x} = ax + b$ 画出不同初值下的路径，并与解析解比较。

2. 对物流增长 $\dot{x} = rx(1 - x/K)$ 画相图和时间路径。
3. 对二维线性系统 $\dot{x} = Ax$ 计算特征值并模拟不同初值。
4. 对 Solow 模型模拟 $k(t)$ 、 $y(t)$ 、 $c(t)$ ，并标出稳态。
5. 改变 s, n, g, δ, α ，比较稳态和收敛速度。
6. 画 Ramsey 模型的 $\dot{k} = 0$ 和 $\dot{c} = 0$ 曲线，标出鞍路径方向。

Euler 方法伪代码为

```

choose step  $\Delta$  and initial  $x_0$ ;
for  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  :
     $x_{n+1} = x_n + \Delta F(x_n)$ .

```

报告时应同时给出步长敏感性。若减小步长后图像大幅变化，说明原步长过粗，数值结论不可靠。

第三十一章 变分法与最优控制

31.1 从给定路径到选择路径

Ch29 研究给定动态方程

$$\dot{x}(t) = F(x(t))$$

后路径如何运动。最优控制的问题更进一步：主体可以选择某些变量，让状态按约束动态演化，并使整条路径带来的收益最大。连续时间宏观、资产组合、资源开采、库存管理和企业投资都可写成这种形式。

最简单的路径选择问题是

$$\max_{x(\cdot)} J[x] = \int_0^T L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt,$$

其中 L 称为 Lagrangian, J 是把整条路径映射为一个数的目标泛函。

定义 31.1 (泛函). 泛函是以函数或路径为自变量的函数。若每条可行路径 $x(\cdot)$ 都被赋予一个实数 $J[x]$, 则 J 是路径空间上的泛函。

定义 31.2 (可行路径). 给定端点、光滑性和约束条件后, 满足这些要求的路径称为可行路径。在本章中, 除非特别说明, 可行路径至少连续可微。

例 31.1 (消费平滑作为路径问题). 家庭在有限期内选择消费路径 $c(t)$, 目标为

$$\int_0^T e^{-\rho t} u(c(t)) dt.$$

如果财富路径 $a(t)$ 满足

$$\dot{a}(t) = ra(t) + y(t) - c(t),$$

那么消费不是逐点独立选择, 而是受整条财富动态约束。今天多消费会降低未来资产, 这就是最优控制需要协态变量的原因。

例 31.2 (企业投资路径). 企业选择投资 $i(t)$, 资本满足

$$\dot{k}(t) = i(t) - \delta k(t).$$

若利润为 $F(k(t)) - i(t) - \frac{\psi}{2}i(t)^2$, 目标是

$$\int_0^T e^{-\rho t} \left[F(k(t)) - i(t) - \frac{\psi}{2}i(t)^2 \right] dt.$$

投资不仅有当期成本, 也改变未来资本和利润。

31.2 变分与一阶变化

为了判断路径 x^* 是否最优, 我们考虑一条小扰动路径

$$x_\varepsilon(t) = x^*(t) + \varepsilon h(t),$$

其中 h 是扰动方向, ε 是小参数。若端点固定, 则要求

$$h(0) = h(T) = 0.$$

定义 31.3 (变分). 给定候选路径 x^* 和扰动方向 h , 路径族

$$x_\varepsilon = x^* + \varepsilon h$$

称为 x^* 沿方向 h 的变分。目标

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} J[x^* + \varepsilon h] \right|_{\varepsilon=0}$$

称为一阶变分。

命题 31.1 (一阶变分公式). 设

$$J[x] = \int_0^T L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt,$$

且 L 对 x 和 $\dot{x}$ 连续可微。则

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} J[x + \varepsilon h] \right|_{\varepsilon=0} = \int_0^T \left[L_x(t, x, \dot{x})h(t) + L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})\dot{h}(t) \right] dt.$$

证明. 把 $x + \varepsilon h$ 和 $\dot{x} + \varepsilon \dot{h}$ 代入 L . 对 ε 求导并在 $\varepsilon = 0$ 处取值, 链式法则给出

$$L_x(t, x, \dot{x})h(t) + L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})\dot{h}(t).$$

在光滑和有界条件下可把导数移入积分号, 于是得到公式。 □

例 31.3 (二次速度成本). 令

$$J[x] = \int_0^T \frac{1}{2} \dot{x}(t)^2 dt.$$

此时 $L_x = 0$ 、 $L_{\dot{x}} = \dot{x}$ ，所以一阶变分为

$$\int_0^T \dot{x}(t) \dot{h}(t) dt.$$

若端点固定，分部积分后得到

$$- \int_0^T \ddot{x}(t) h(t) dt.$$

最优路径必须满足 $\ddot{x}(t) = 0$ ，也就是端点之间的直线。

31.3 Euler-Lagrange 方程

一阶变分中含有 $\dot{h}$ 。为了得到对 h 本身的条件，对第二项分部积分：

$$\int_0^T L_{\dot{x}} \dot{h} dt = [L_{\dot{x}} h]_0^T - \int_0^T \frac{d}{dt} L_{\dot{x}} h dt.$$

若端点固定，则 $h(0) = h(T) = 0$ ，边界项消失。

命题 31.2 (Euler-Lagrange 必要条件). 若 x^* 是固定端点问题

$$\max_x \int_0^T L(t, x, \dot{x}) dt$$

的内点最优路径，且足够光滑，则

$$L_x(t, x^*, \dot{x}^*) - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*) = 0$$

对所有 $t \in (0, T)$ 成立。

证明. 最优路径的一阶变分必须对任意固定端点扰动 h 等于零。由一阶变分公式和分部积分，

$$0 = \int_0^T \left[L_x - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}} \right] h(t) dt.$$

由于 h 可以在内部任意局部变化，括号内的函数必须处处为零。这就是 Euler-Lagrange 方程。 $\square$

例 31.4 (最短路径). 平面中从 $(0, 0)$ 到 (T, X) 的曲线长度为

$$J[x] = \int_0^T \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2} dt.$$

这里 L 不含 x , 所以 Euler-Lagrange 方程给出

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} \right) = 0.$$

因此 $\dot{x}$ 为常数, 最短路径是直线。

例 31.5 (追求目标路径的平滑调整). 设政策制定者希望 $x(t)$ 接近目标 $\bar{x}(t)$, 但调整太快有成本:

$$\min_x \int_0^T \left[\frac{1}{2}(x(t) - \bar{x}(t))^2 + \frac{\gamma}{2}\dot{x}(t)^2 \right] dt.$$

把最小化改为一阶条件, $L_x = x - \bar{x}$ 、 $L_{\dot{x}} = \gamma\dot{x}$ 。Euler-Lagrange 方程为

$$x(t) - \bar{x}(t) - \gamma\ddot{x}(t) = 0.$$

当 γ 大时, 路径不会紧贴目标, 而会更平滑。

31.4 动态约束与 Hamiltonian

经济问题通常不是直接选择 $\dot{x}$, 而是选择控制变量 $u(t)$, 状态按

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$$

演化。典型问题为

$$\max_{u(\cdot)} \int_0^T e^{-\rho t} r(t, x(t), u(t)) dt + e^{-\rho T} \phi(x(T))$$

subject to

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0.$$

定义 31.4 (现值 Hamiltonian). 对现值目标, 定义 Hamiltonian 为

$$\mathcal{H}(t, x, u, \lambda) = e^{-\rho t} r(t, x, u) + \lambda f(t, x, u),$$

其中 $\lambda(t)$ 是现值协态变量。

命题 31.3 (Hamiltonian 必要条件). 若 u^*, x^* 是内点最优路径, 且问题足够光滑, 则存在协态变量 $\lambda(t)$, 使得

$$\dot{x}(t) = \mathcal{H}_\lambda(t, x, u, \lambda),$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\mathcal{H}_x(t, x, u, \lambda),$$

$$\mathcal{H}_u(t, x, u, \lambda) = 0.$$

若终端状态自由并有终端收益 $e^{-\rho T} \phi(x(T))$, 还满足

$$\lambda(T) = e^{-\rho T} \phi'(x(T)).$$

证明. 构造增广目标

$$\int_0^T [e^{-\rho t} r(t, x, u) + \lambda(t)(f(t, x, u) - \dot{x})] dt + e^{-\rho T} \phi(x(T)).$$

对 u 的一阶变化给出 $\mathcal{H}_u = 0$ 。对 λ 的一阶变化恢复状态方程。对 x 的变化中, 项 $-\lambda \dot{x}$ 分部积分, 内部项给出

$$\dot{\lambda} = -\mathcal{H}_x.$$

若终端状态自由, 终端边界项给出

$$\lambda(T) = e^{-\rho T} \phi'(x(T)).$$

□

例 31.6 (线性状态、二次控制成本). 考虑

$$\max_u \int_0^T -\frac{1}{2} u(t)^2 dt$$

subject to

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = \bar{x}.$$

Hamiltonian 为

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} u^2 + \lambda u.$$

一阶条件为 $u = \lambda$, 协态方程为 $\dot{\lambda} = 0$ 。所以 u 为常数。为了满足终端条件,

$$u = \frac{\bar{x} - x_0}{T}.$$

最优路径以恒定速度从 x_0 到达 $\bar{x}$ 。

例 31.7 (库存调整). 企业选择生产 $q(t)$, 库存满足

$$\dot{x} = q - d,$$

收益为

$$pd - \frac{c}{2} q^2 - \frac{h}{2} x^2.$$

Hamiltonian 为

$$\mathcal{H} = pd - \frac{c}{2} q^2 - \frac{h}{2} x^2 + \lambda(q - d).$$

控制一阶条件给出

$$-cq + \lambda = 0, \quad q = \frac{\lambda}{c}.$$

协态方程为

$$\dot{\lambda} = hx.$$

库存越高, 未来降低库存的影子价值变化越强。

31.5 协态变量的经济含义

协态变量 $\lambda(t)$ 衡量在时点 t 多一单位状态对目标的边际价值。若 x 是资本, λ 是资本的影子价格; 若 x 是资产, λ 是财富的边际价值; 若 x 是污染存量, λ 可能是污染的影子损失。

例 31.8 (资本的影子价值). 企业问题中

$$\dot{k} = i - \delta k.$$

若多一单位资本会提高未来利润, 则协态变量为正。控制一阶条件通常把投资边际成本与资本影子价值联系起来:

$$\text{投资边际成本} = \lambda(t).$$

这就是 Tobin's q 思想的连续时间骨架。

例 31.9 (不可再生资源). 资源存量 $S(t)$ 满足

$$\dot{S}(t) = -q(t).$$

若资源越少未来越稀缺, 则资源存量的协态变量代表地下资源的影子价值。最优开采要求当前开采收益与保留资源的未来价值平衡。

31.6 当前值 Hamiltonian

在无限期或折现问题中, 现值协态变量 $\lambda(t)$ 往往随 $e^{-\rho t}$ 缩小。宏观经济中更常用当前值协态变量

$$\mu(t) = e^{\rho t} \lambda(t).$$

定义 31.5 (当前值 Hamiltonian). 若现值 Hamiltonian 为

$$\mathcal{H} = e^{-\rho t} r(t, x, u) + \lambda f(t, x, u),$$

定义当前值 Hamiltonian

$$\mathcal{H}^c(t, x, u, \mu) = r(t, x, u) + \mu f(t, x, u),$$

其中 $\mu = e^{\rho t} \lambda$ 。

命题 31.4 (当前值协态方程). 若 $\mu = e^{\rho t}\lambda$, 则当前值条件为

$$\dot{x} = \mathcal{H}_\mu^c,$$

$$\dot{\mu} = \rho\mu - \mathcal{H}_x^c,$$

$$\mathcal{H}_u^c = 0.$$

证明. 由 $\lambda = e^{-\rho t}\mu$,

$$\dot{\lambda} = e^{-\rho t}(\dot{\mu} - \rho\mu).$$

现值协态方程为

$$\dot{\lambda} = -e^{-\rho t}r_x - \lambda f_x = -e^{-\rho t}(r_x + \mu f_x).$$

两边乘以 $e^{\rho t}$, 得

$$\dot{\mu} - \rho\mu = -(r_x + \mu f_x).$$

所以

$$\dot{\mu} = \rho\mu - \mathcal{H}_x^c.$$

状态方程和控制一阶条件直接由定义得到。 □

例 31.10 (当前值写法的好处). 若目标为

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} u(c(t)) dt,$$

则现值 Hamiltonian 中每一项都带 $e^{-\rho t}$ 。用当前值 Hamiltonian

$$\mathcal{H}^c = u(c) + \mu f(k, c)$$

后, 一阶条件通常写成

$$u'(c) = \mu,$$

这比 $e^{-\rho t}u'(c) = \lambda$ 更贴近经济解释: 当前消费的边际效用等于当前值资本影子价值。

31.7 无限期问题与横截条件

无限期问题没有终端时点, 必须排除“把价值藏在无穷远处”的非最优路径。横截条件就是这类边界条件。

定义 31.6 (横截条件). 在无限期折现问题中, 典型横截条件为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)x(t) = 0$$

或当前值形式

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} \mu(t)x(t) = 0.$$

具体形式取决于状态变量是否自由、是否有非负约束和模型的可行集。

例 31.11 (资产不能留下无用财富). 家庭最大化

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c(t)) dt$$

且资产满足

$$\dot{a} = ra + y - c.$$

若最后仍有大量按边际效用计价的财富没有被消费, 通常说明可以提高某些时点消费并增加效用。横截条件排除了这种浪费型路径。

例 31.12 (泡沫路径的排除). 某些动态方程的一阶条件允许资产或资本影子价值以很快速度增长。横截条件要求折现后的影子价值乘以状态不能留下正的极限, 从而排除只满足局部一阶条件、但不是全局最优的路径。

31.8 Ramsey 增长模型

代表性家庭选择消费路径 $c(t)$, 资本按

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (\delta + n + g)k(t)$$

演化。目标为

$$\int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} u(c(t)) dt,$$

其中 k 是有效劳动人均资本。为突出核心, 令有效折现率记为 $\tilde{\rho} = \rho - n$ 。

当前值 Hamiltonian 为

$$\mathcal{H}^c = u(c) + \mu [f(k) - c - (\delta + n + g)k].$$

控制一阶条件:

$$u'(c) = \mu.$$

协态方程:

$$\dot{\mu} = \tilde{\rho}\mu - \mu [f'(k) - (\delta + n + g)].$$

因此

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = \tilde{\rho} + \delta + n + g - f'(k).$$

命题 31.5 (Ramsey Euler 方程). 若

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}, \quad \theta > 0, \theta \neq 1,$$

则 Ramsey 模型的消费增长率满足

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} [f'(k) - \delta - n - g - \tilde{\rho}].$$

证明. 由 $u'(c) = c^{-\theta} = \mu$, 取对数得

$$\log \mu = -\theta \log c.$$

对时间求导:

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = -\theta \frac{\dot{c}}{c}.$$

又由协态方程,

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = \tilde{\rho} + \delta + n + g - f'(k).$$

合并两式并移项, 得到

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} [f'(k) - \delta - n - g - \tilde{\rho}].$$

□

例 31.13 (对数效用). 若 $u(c) = \log c$, 可看作 $\theta = 1$ 。Euler 方程变为

$$\frac{\dot{c}}{c} = f'(k) - \delta - n - g - \tilde{\rho}.$$

当资本边际产出高于有效折旧和折现要求时, 消费增长; 反之消费下降。

例 31.14 (Ramsey 稳态). 稳态要求

$$\dot{c} = 0, \quad \dot{k} = 0.$$

由 Euler 方程,

$$f'(k^*) = \delta + n + g + \tilde{\rho}.$$

由资本方程,

$$c^* = f(k^*) - (\delta + n + g)k^*.$$

第一条决定资本, 第二条决定消费。

例 31.15 (Cobb-Douglas Ramsey 稳态). 若 $f(k) = Ak^\alpha$, 则

$$\alpha Ak^{\alpha-1} = \delta + n + g + \tilde{\rho}.$$

因此

$$k^* = \left(\frac{\alpha A}{\delta + n + g + \tilde{\rho}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

消费稳态为

$$c^* = Ak^{*\alpha} - (\delta + n + g)k^*.$$

31.9 充分性：凹性让一阶条件可靠

一阶条件通常只是必要条件。若目标对控制和状态是凹的、动态约束是线性的或满足适当凹性，并且可行集凸，则 Hamiltonian 条件加横截条件常能给出充分性。

命题 31.6 (凹性下的充分性). 考虑最大化问题。若对每个 t , 当前收益 $r(t, x, u)$ 关于 (x, u) 凹，状态方程 $f(t, x, u)$ 对 (x, u) 仿射，可行集凸。若候选路径满足 Hamiltonian 最大化条件、状态方程、协态方程和合适的横截条件，则该路径为全局最优。

证明. 取任意可行路径 (x, u) 和候选路径 (x^*, u^*) 。凹性给出收益差不超过一阶线性近似。Hamiltonian 最大化条件使控制方向上的一阶项非正。状态方向上的项可用协态方程转化为一个全导数。对时间积分后，内部项相互抵消，剩余边界项由初始状态相同和横截条件控制。因此任意可行路径的目标值不超过候选路径。□

例 31.16 (线性二次问题的全局最优). 若收益是负的二次损失，状态方程线性，可行控制集合凸，则问题是凹最大化问题。满足 Hamiltonian 条件和边界条件的路径不仅是局部候选，而且是全局最优路径。

31.10 与 Bellman 和 HJB 的桥梁

最优控制和动态规划看同一个问题的两个侧面。最大值原理沿一条最优路径追踪状态和协态；Bellman 方法研究从任意状态出发的价值函数。若价值函数 $V(t, x)$ 足够光滑，则协态变量与价值函数导数相连：

$$\lambda(t) = V_x(t, x(t)).$$

在无限期当前值问题中，类似地有

$$\mu(t) = v'(x(t)).$$

例 31.17 (协态变量与价值函数斜率). 若 $v(k)$ 是从资本 k 出发的当前值价值函数, 那么多一单位资本带来的边际价值是 $v'(k)$ 。最优控制中的当前值协态变量 $\mu(t)$ 正是沿最优路径的这个边际价值:

$$\mu(t) = v'(k(t)).$$

Ch33 的 HJB 方程会把这个关系系统化。

例 31.18 (Hamiltonian 最大化与 Bellman 最大化). 当前值 HJB 的核心形式是

$$\rho v(x) = \max_u \{r(x, u) + v'(x)f(x, u)\}.$$

如果把 $\mu = v'(x)$, 右侧最大化的对象就是当前值 Hamiltonian

$$\mathcal{H}^c(x, u, \mu) = r(x, u) + \mu f(x, u).$$

因此本章的 Hamiltonian 条件是 HJB 的路径版一阶条件。

31.11 本章小结

变分法处理直接选择路径的问题, Euler-Lagrange 方程给出路径最优的必要条件。最优控制把状态动态和控制变量分开, 用 Hamiltonian、协态变量和横截条件描述最优路径。当前值 Hamiltonian 是宏观经济最常用的写法。Ramsey 模型展示了如何从最优控制得到消费 Euler 方程。接下来的 PDE 和 HJB 章节会把协态变量解释为价值函数导数, 并从路径最优走向状态空间中的函数方程。

31.12 Exercises

习题 31.1. 定义泛函, 并给出一个经济学例子。

习题 31.2. 说明路径选择问题和静态选择问题的区别。

习题 31.3. 定义变分 $x_\varepsilon = x + \varepsilon h$ 。

习题 31.4. 推导 $J[x] = \int_0^T L(t, x, \dot{x}) dt$ 的一阶变分公式。

习题 31.5. 解释固定端点条件为何要求 $h(0) = h(T) = 0$ 。

习题 31.6. 推导 Euler-Lagrange 方程。

习题 31.7. 对 $L = \frac{1}{2}\dot{x}^2$ 求 Euler-Lagrange 方程。

- 习题 31.8. 对 $L = \frac{1}{2}(x - \bar{x})^2 + \frac{\gamma}{2}\dot{x}^2$ 求 Euler-Lagrange 方程。
- 习题 31.9. 若 L 不显含 x , 说明 Euler-Lagrange 方程有什么简化。
- 习题 31.10. 写出带状态方程 $\dot{x} = f(t, x, u)$ 的最优控制问题。
- 习题 31.11. 定义现值 Hamiltonian。
- 习题 31.12. 写出 Hamiltonian 必要条件。
- 习题 31.13. 解释协态变量的经济含义。
- 习题 31.14. 对 $\max \int_0^T -\frac{1}{2}u^2 dt$ 、 $\dot{x} = u$ 写出 Hamiltonian 条件。
- 习题 31.15. 说明终端状态自由时为何需要终端条件。
- 习题 31.16. 定义当前值协态变量 μ 。
- 习题 31.17. 从 $\mu = e^{\rho t}\lambda$ 推导当前值协态方程。
- 习题 31.18. 写出当前值 Hamiltonian 的三个核心条件。
- 习题 31.19. 解释横截条件的作用。
- 习题 31.20. 给出一个只满足一阶条件但可能被横截条件排除的直观例子。
- 习题 31.21. 写出 Ramsey 模型的当前值 Hamiltonian。
- 习题 31.22. 推导 Ramsey 模型的消费一阶条件。
- 习题 31.23. 推导 Ramsey 模型的协态方程。
- 习题 31.24. 在 CRRA 效用下推导 Ramsey Euler 方程。
- 习题 31.25. 若 $u(c) = \log c$, 写出消费增长率。
- 习题 31.26. 求 Cobb-Douglas Ramsey 稳态资本。
- 习题 31.27. 说明 θ 如何影响消费对资本回报变化的反应。
- 习题 31.28. 解释 Ramsey 相图中 $\dot{c} = 0$ 线的含义。
- 习题 31.29. 解释 Ramsey 相图中 $\dot{k} = 0$ 线的含义。
- 习题 31.30. 说明凹性为何能把必要条件提升为充分条件。
- 习题 31.31. 给出线性二次控制问题为何适合用充分性定理。
- 习题 31.32. 解释协态变量和价值函数导数的关系。
- 习题 31.33. 把当前值 HJB 右侧和当前值 Hamiltonian 对应起来。
- 习题 31.34. 说明最优控制方法和 Bellman 方法的区别。
- 习题 31.35. 列出求解一个确定性连续时间控制问题的标准步骤。

31.13 Solutions

本章解答的主线是：先把路径扰动写清楚，再由一阶变分得到 Euler-Lagrange；对于带状态约束的问题，则通过 Hamiltonian 把状态、控制和协态方程联立起来。

解答 31.1. 泛函是以函数或路径为输入的映射。例如

$$J[c] = \int_0^T e^{-\rho t} u(c(t)) dt$$

把消费路径 $c(\cdot)$ 映射为生命周期效用。

解答 31.2. 静态选择只选择一个向量或一个时点的变量。路径选择要选择整个函数 $x(t)$ 或 $u(t)$ 。一个时点的选择会通过状态方程影响未来，所以不能逐点独立最优化。

解答 31.3. 给定候选路径 x 和扰动方向 h ，令

$$x_\varepsilon(t) = x(t) + \varepsilon h(t).$$

当 ε 很小时， x_ε 是 x 附近的一条路径。研究 $J[x_\varepsilon]$ 对 ε 的导数就是研究目标对这类扰动的一阶反应。

解答 31.4. 代入扰动路径：

$$J[x + \varepsilon h] = \int_0^T L(t, x + \varepsilon h, \dot{x} + \varepsilon \dot{h}) dt.$$

对 ε 求导并令 $\varepsilon = 0$ ，由链式法则得到

$$\int_0^T \left[L_x(t, x, \dot{x})h + L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})\dot{h} \right] dt.$$

解答 31.5. 固定端点表示所有可行扰动路径都必须保留原来的端点：

$$x_\varepsilon(0) = x(0), \quad x_\varepsilon(T) = x(T).$$

由于 $x_\varepsilon = x + \varepsilon h$ ，这要求

$$h(0) = 0, \quad h(T) = 0.$$

解答 31.6. 由一阶变分公式，

$$\delta J = \int_0^T (L_x h + L_{\dot{x}} \dot{h}) dt.$$

分部积分：

$$\int_0^T L_{\dot{x}} \dot{h} dt = [L_{\dot{x}} h]_0^T - \int_0^T \frac{d}{dt} L_{\dot{x}} h dt.$$

固定端点时边界项为零, 所以

$$\delta J = \int_0^T \left[L_x - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}} \right] h \, dt.$$

对任意内部扰动 h 都为零, 得到

$$L_x - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}} = 0.$$

解答 31.7. 若 $L = \frac{1}{2}\dot{x}^2$, 则

$$L_x = 0, \quad L_{\dot{x}} = \dot{x}.$$

Euler-Lagrange 方程为

$$0 - \frac{d}{dt} \dot{x} = 0,$$

即

$$\ddot{x} = 0.$$

解答 31.8. 此时

$$L_x = x - \bar{x}, \quad L_{\dot{x}} = \gamma \dot{x}.$$

Euler-Lagrange 方程为

$$x - \bar{x} - \gamma \ddot{x} = 0.$$

它说明目标偏离项和调整平滑项之间要平衡。

解答 31.9. 若 L 不显含 x , 则 $L_x = 0$ 。Euler-Lagrange 方程变成

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} = 0.$$

因此 $L_{\dot{x}}$ 沿最优路径为常数。

解答 31.10. 标准写法为

$$\max_{u(\cdot)} \int_0^T e^{-\rho t} r(t, x(t), u(t)) \, dt + e^{-\rho T} \phi(x(T))$$

subject to

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0.$$

解答 31.11. 现值 Hamiltonian 是

$$\mathcal{H}(t, x, u, \lambda) = e^{-\rho t} r(t, x, u) + \lambda f(t, x, u).$$

它把当期收益和状态动态约束合并到一个对象中。

解答 31.12. 内点最优通常满足

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mathcal{H}_\lambda, \\ \dot{\lambda} &= -\mathcal{H}_x, \\ \mathcal{H}_u &= 0.\end{aligned}$$

再加上初始条件和终端条件或横截条件，构成完整动态系统。

解答 31.13. 协态变量衡量多一单位状态变量的边际价值。若状态是资本，协态变量是资本的影子价格；若状态是财富，协态变量是财富的边际效用价值。

解答 31.14. Hamiltonian 为

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}u^2 + \lambda u.$$

控制条件：

$$\mathcal{H}_u = -u + \lambda = 0,$$

所以 $u = \lambda$ 。状态方程为

$$\dot{x} = u.$$

协态方程为

$$\dot{\lambda} = -\mathcal{H}_x = 0.$$

因此最优控制为常数。

解答 31.15. 终端状态自由时，最优路径的终点也会随扰动变化。分部积分留下终端边界项。为了让任意终端扰动的一阶收益为零，需要满足终端条件。例如有终端收益时：

$$\lambda(T) = e^{-\rho T} \phi'(x(T)).$$

解答 31.16. 当前值协态变量定义为

$$\mu(t) = e^{\rho t} \lambda(t).$$

它把现值协态变量重新放大到时点 t 的当前价值单位。

解答 31.17. 由 $\lambda = e^{-\rho t} \mu$,

$$\dot{\lambda} = e^{-\rho t} (\dot{\mu} - \rho \mu).$$

现值协态方程给出

$$\dot{\lambda} = -e^{-\rho t} (r_x + \mu f_x).$$

两边乘以 $e^{\rho t}$ ，得到

$$\dot{\mu} - \rho \mu = -(r_x + \mu f_x).$$

所以

$$\dot{\mu} = \rho \mu - \mathcal{H}_x^c.$$

解答 31.18. 当前值 Hamiltonian

$$\mathcal{H}^c = r(t, x, u) + \mu f(t, x, u)$$

对应条件为

$$\dot{x} = \mathcal{H}_\mu^c, \quad \dot{\mu} = \rho\mu - \mathcal{H}_x^c, \quad \mathcal{H}_u^c = 0.$$

解答 31.19. 横截条件是无限期问题的远端边界条件。它排除把有价值资源留到无穷远、或者让影子价值和状态形成泡沫式增长的路径。没有横截条件，一阶微分方程系统通常会有太多候选解。

解答 31.20. 例如资产积累问题中，某条路径可能满足 Euler 方程，却让家庭永远过度储蓄，导致

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} \mu(t) a(t) > 0.$$

这说明仍有折现后的有价值资产没有被使用，通常违反横截条件。

解答 31.21. Ramsey 当前值 Hamiltonian 为

$$\mathcal{H}^c = u(c) + \mu[f(k) - c - (\delta + n + g)k].$$

解答 31.22. 对 c 求一阶条件：

$$\mathcal{H}_c^c = u'(c) - \mu = 0.$$

因此

$$u'(c) = \mu.$$

解答 31.23. 对 k 求偏导：

$$\mathcal{H}_k^c = \mu[f'(k) - (\delta + n + g)].$$

当前值协态方程为

$$\dot{\mu} = \tilde{\rho}\mu - \mathcal{H}_k^c,$$

所以

$$\dot{\mu} = \mu[\tilde{\rho} + \delta + n + g - f'(k)].$$

解答 31.24. CRRA 下 $u'(c) = c^{-\theta}$ ，由一阶条件 $\mu = c^{-\theta}$ 。取对数并求导：

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = -\theta \frac{\dot{c}}{c}.$$

又

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = \tilde{\rho} + \delta + n + g - f'(k).$$

因此

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}[f'(k) - \delta - n - g - \tilde{\rho}].$$

解答 31.25. 对数效用对应 $\theta = 1$, 所以

$$\frac{\dot{c}}{c} = f'(k) - \delta - n - g - \tilde{\rho}.$$

解答 31.26. 若 $f(k) = Ak^\alpha$, 稳态消费增长为零, 因此

$$\alpha Ak^{\alpha-1} = \delta + n + g + \tilde{\rho}.$$

解得

$$k^* = \left(\frac{\alpha A}{\delta + n + g + \tilde{\rho}} \right)^{1/(1-\alpha)}.$$

解答 31.27. Euler 方程中

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} [f'(k) - \delta - n - g - \tilde{\rho}].$$

θ 越大, 消费增长率对净回报变化越不敏感; 主体越想平滑消费。

解答 31.28. $\dot{c} = 0$ 线表示消费既不上升也不下降。Ramsey 模型中它由

$$f'(k) = \delta + n + g + \tilde{\rho}$$

给出, 通常是一条垂直于 k 轴的线。

解答 31.29. $\dot{k} = 0$ 线由

$$c = f(k) - (\delta + n + g)k$$

给出。在线下方消费低于净产出, 资本增加; 在线上方消费高于净产出, 资本减少。

解答 31.30. 凹性保证任意偏离路径的收益差不超过一阶线性近似。若候选路径已使一阶项非正, 并且边界项由横截条件控制, 则没有其他可行路径能给出更高目标值。因此必要条件成为充分条件。

解答 31.31. 线性二次问题通常有线性状态方程和凹二次收益或负二次损失。可行集合常为凸集, 因此满足凹性充分性定理的结构, Hamiltonian 条件可以刻画全局最优。

解答 31.32. 价值函数 $V(t, x)$ 表示从状态 x 出发的最大价值。多一单位状态的边际价值是 $V_x(t, x)$ 。沿最优路径, 协态变量正是这个边际价值:

$$\lambda(t) = V_x(t, x(t)).$$

解答 31.33. 当前值 HJB 右侧是

$$\max_u \{r(x, u) + v'(x)f(x, u)\}.$$

若令 $\mu = v'(x)$, 则被最大化的对象是

$$\mathcal{H}^c(x, u, \mu) = r(x, u) + \mu f(x, u).$$

解答 31.34. 最优控制方法沿一条最优路径求解状态和协态的微分方程。Bellman 方法则求所有状态上的价值函数。前者更像路径视角，后者更像状态空间视角。

解答 31.35. 标准步骤是：写目标和状态方程；构造 Hamiltonian；求控制一阶条件；写状态方程和协态方程；加入初始条件、终端条件或横截条件；求解动态系统；最后用凹性或其他论证检查充分性。

31.14 Computation Lab

本章的计算实验应服务于三件事：把边界条件和横截条件变成可检查的数值对象，观察鞍路径如何被选择，并比较最大值原理和动态规划的数值表达。

1. **Euler-Lagrange 离散化。** 选取

$$\min_x \int_0^T \left[\frac{1}{2}(x - \bar{x})^2 + \frac{\gamma}{2}\dot{x}^2 \right] dt$$

用有限差分近似 $\dot{x}$ ，解离散二次优化问题，并与连续方程

$$x - \bar{x} - \gamma\ddot{x} = 0$$

比较。

2. **有限期 shooting。** 对

$$\dot{x} = u, \quad \mathcal{H} = -\frac{1}{2}u^2 + \lambda u$$

给定 $x(0)$ 和 $x(T)$ ，猜测初始协态 $\lambda(0)$ ，用 shooting 方法命中终端状态。

3. **Ramsey 相图。** 给定 $f(k) = Ak^\alpha$ ，画出

$$\dot{c} = 0, \quad \dot{k} = 0$$

两条曲线，并用不同初始消费展示路径发散或趋向稳态的差异。

4. **横截条件检查。** 对模拟出的 Ramsey 路径，计算

$$e^{-\tilde{\rho}t} \mu(t) k(t)$$

的尾部行为。比较满足鞍路径条件和偏离路径的差异。

5. **Hamiltonian 与 HJB 的接口。** 在一维确定性问题中先用时间迭代近似价值函数，再计算 $v'(x)$ ，并与最大值原理求出的当前值协态 μ 比较。

第三十二章 偏微分方程的经济学入口

32.1 为什么经济学会遇到 PDE

ODE 描述一个状态随时间变化：

$$\dot{x}(t) = F(x(t)).$$

PDE 描述一个函数同时随时间和状态变化。例如价值函数 $v(t, x)$ 的变化既取决于时间 t ，也取决于状态 x 。在连续时间资产定价中，价格可能写作 $V(t, S)$ ；在异质性主体模型中，个体价值函数写作 $v(t, a, y)$ ，分布密度写作 $m(t, a, y)$ 。这时自然出现偏微分方程。

定义 32.1 (偏微分方程). 偏微分方程是含有多元函数及其偏导数的方程。例如

$$v_t(t, x) + a(x)v_x(t, x) = 0$$

就是关于未知函数 $v(t, x)$ 的一阶 PDE。

例 32.1 (资产价格函数). 若股票价格为状态 S ，衍生品价格为 $V(t, S)$ ，则价格对时间的变化 V_t 、对状态的敏感度 V_S 和曲率 V_{SS} 都会进入定价方程。Black-Scholes 方程就是这种结构的代表。

例 32.2 (价值函数). 确定性控制问题的价值函数可写为 $v(k)$ 或 $v(t, k)$ 。若状态 k 连续，Bellman 方程不再是有限状态方程，而会出现

$$\rho v(k) = \max_c \{u(c) + v'(k)[f(k) - c - \delta k]\}.$$

这是最简单的 HJB 型方程。

32.2 偏导数、梯度和 Laplacian

若 $v = v(t, x)$ ，则

$$v_t = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad v_x = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v_{xx} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

若状态 $x \in \mathbb{R}^n$, 梯度为

$$\nabla v(x) = \begin{pmatrix} v_{x_1}(x) \\ \vdots \\ v_{x_n}(x) \end{pmatrix},$$

Hessian 为

$$D^2v(x) = [v_{x_i x_j}(x)]_{i,j=1}^n.$$

Laplacian 是二阶偏导数之和:

$$\Delta v(x) = \sum_{i=1}^n v_{x_i x_i}(x).$$

例 32.3 (二元二次函数). 令

$$v(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + 3x_2^2.$$

则

$$\nabla v = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}, \quad D^2v = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Laplacian 为

$$\Delta v = 2 + 6 = 8.$$

例 32.4 (效用曲率). 若价值函数 $v(a, y)$ 取决于资产 a 和收入状态 y , 则 v_a 是财富边际价值, v_{aa} 描述财富边际价值随资产变化的速度。消费储蓄问题的一阶条件常使用 v_a , 而不确定性下的扩散项会带来 v_{aa} 。

命题 32.1 (沿曲线的链式法则). 设 $v(t, x)$ 连续可微, 且 $x(t)$ 可微。则

$$\frac{d}{dt}v(t, x(t)) = v_t(t, x(t)) + v_x(t, x(t))\dot{x}(t).$$

若 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, 则

$$\frac{d}{dt}v(t, x(t)) = v_t(t, x(t)) + \nabla v(t, x(t)) \cdot \dot{x}(t).$$

证明. 一维情形直接由多元链式法则得到:

$$\frac{d}{dt}v(t, x(t)) = \frac{\partial v}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt}.$$

多维情形把每个状态分量的贡献相加, 即得到梯度内积形式。

□

32.3 初值、边界值和终端值

PDE 本身通常不够决定唯一解，还需要条件。时间向前演化的问题常给初值：

$$v(0, x) = v_0(x).$$

有限期资产定价和控制问题常给终端值：

$$v(T, x) = \Phi(x).$$

空间或状态域 Ω 上的问题还可能给边界条件：

$$v(t, x) = g(t, x), \quad x \in \partial\Omega.$$

定义 32.2 (初值、边界值和终端值). 初值条件指定 $t = 0$ 时的函数。终端值条件指定 $t = T$ 时的函数。边界条件指定状态域边界 $\partial\Omega$ 上的函数值或导数值。

例 32.5 (欧式期权的终端值). 欧式看涨期权到期支付为

$$\Phi(S) = \max\{S - K, 0\}.$$

定价函数 $V(t, S)$ 通常满足终端条件

$$V(T, S) = \Phi(S).$$

PDE 从终端时点向前求解价格。

例 32.6 (借款约束边界). 若资产状态 a 不能低于 $\underline{a}$ ，则价值函数 $v(a)$ 在边界附近必须反映不能继续降低资产的约束。数值求解时常需要在 $a = \underline{a}$ 处指定单边导数或使用不等式条件。

32.4 PDE 的粗分类

按最高阶导数，PDE 可分为一阶和二阶。按未知函数及其导数是否线性，PDE 可分为线性、半线性、拟线性和完全非线性。本书只需要入口层分类。

定义 32.3 (线性 PDE). 若未知函数及其导数只以线性方式出现，例如

$$v_t + a(x)v_x + b(x)v = 0,$$

则称为线性 PDE。

定义 32.4 (HJB 型非线性 PDE). 若方程含有对控制的最大化, 例如

$$\rho v(x) = \max_u \{r(x, u) + v_x(x)f(x, u)\},$$

则称为 HJB 型方程。非线性来自最大化算子。

例 32.7 (线性定价方程). 给定风险中性动态后, 许多资产价格满足线性 PDE。直觉是价格等于未来支付的条件期望, 支付的加总对价格是线性的。

例 32.8 (非线性控制方程). 消费储蓄问题中, 控制 c 由主体选择:

$$\rho v(a) = \max_c \{u(c) + v_a(a)(ra + y - c)\}.$$

由于右侧要对 c 最大化, 方程对 v_a 通常是非线性的。

32.5 一阶运输方程

最简单的一阶 PDE 是

$$v_t(t, x) + av_x(t, x) = 0,$$

其中 a 是常数。它表示函数图像以速度 a 沿 x 轴平移。

命题 32.2 (常系数运输方程). 若

$$v_t + av_x = 0, \quad v(0, x) = v_0(x),$$

则解为

$$v(t, x) = v_0(x - at).$$

证明. 令 $v(t, x) = v_0(x - at)$ 。则

$$v_t = -av'_0(x - at), \quad v_x = v'_0(x - at).$$

所以

$$v_t + av_x = -av'_0(x - at) + av'_0(x - at) = 0.$$

且 $v(0, x) = v_0(x)$ 。 □

例 32.9 (收入分布平移). 若所有人的收入以相同速度 a 增长, 而分布形状不变, 则某个分布函数或密度剖面会沿收入轴平移。运输方程描述的正是这种“形状移动但不扩散”的动态。

例 32.10 (确定性财富漂移). 若财富满足

$$\dot{a} = s$$

且没有随机冲击, 则个体状态沿财富轴以速度 s 移动。价值或分布对象在状态空间中的移动可用运输项描述。

32.6 特征线方法

对更一般的一阶 PDE

$$v_t + a(x)v_x = 0,$$

考虑曲线 $x(t)$ 满足

$$\dot{x}(t) = a(x(t)).$$

沿这条曲线,

$$\frac{d}{dt}v(t, x(t)) = v_t + a(x)v_x = 0.$$

因此 v 沿特征线保持常数。

例 32.11 (状态依赖速度). 设

$$v_t + xv_x = 0, \quad v(0, x) = v_0(x).$$

特征线满足

$$\dot{x} = x, \quad x(t) = x_0 e^t.$$

给定当前 x , 初始位置为 $x_0 = xe^{-t}$ 。因此

$$v(t, x) = v_0(xe^{-t}).$$

例 32.12 (沿资本路径的价值传播). 若资本按

$$\dot{k} = f(k)$$

确定性演化, 且某函数 $v(t, k)$ 满足

$$v_t + f(k)v_k = 0,$$

则 v 沿资本运动轨迹保持不变。这是链式法则和特征线方法在经济动态中的直接联系。

32.7 守恒形式与分布演化

分布密度 $m(t, x)$ 的演化常写为守恒形式:

$$m_t(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} [a(x)m(t, x)] = 0.$$

它表示质量不会凭空产生, 只是在状态空间中流动。

命题 32.3 (守恒运输的积分解释). 若

$$m_t + (am)_x = 0,$$

则在区间 $[\ell, r]$ 上,

$$\frac{d}{dt} \int_{\ell}^r m(t, x) dx = a(\ell)m(t, \ell) - a(r)m(t, r).$$

证明. 对 PDE 在 $[\ell, r]$ 上积分:

$$\int_{\ell}^r m_t dx + \int_{\ell}^r (am)_x dx = 0.$$

第一项为

$$\frac{d}{dt} \int_{\ell}^r m(t, x) dx.$$

第二项由微积分基本定理为

$$a(r)m(t, r) - a(\ell)m(t, \ell).$$

移项即得公式。 □

例 32.13 (财富分布的流入和流出). 在资产区间 $[\ell, r]$ 内的人口质量变化, 等于左边界流入减去右边界流出。若 $a(r)m(t, r)$ 很大, 说明很多人正穿过右边界离开该资产区间。

例 32.14 (年龄分布). 年龄 s 满足 $\dot{s} = 1$ 。若没有死亡和出生, 年龄密度满足

$$m_t + m_s = 0.$$

这意味着整个年龄分布随时间向右平移。

32.8 热方程与扩散

热方程是最基本的二阶抛物型 PDE:

$$v_t = \kappa v_{xx}, \quad \kappa > 0.$$

它描述局部曲率如何带来平滑。若某处函数值低于两边, $v_{xx} > 0$, 则该处上升; 若高于两边, $v_{xx} < 0$, 则该处下降。

命题 32.4 (Fourier 模式衰减). 函数

$$v(t, x) = e^{-\kappa n^2 t} \sin(nx)$$

满足热方程

$$v_t = \kappa v_{xx}.$$

证明. 直接计算:

$$v_t = -\kappa n^2 e^{-\kappa n^2 t} \sin(nx),$$

$$v_{xx} = -n^2 e^{-\kappa n^2 t} \sin(nx).$$

因此

$$\kappa v_{xx} = -\kappa n^2 e^{-\kappa n^2 t} \sin(nx) = v_t.$$

□

例 32.15 (不确定性带来的平滑). 在资产定价中, 未来状态有扩散风险时, 价格函数不仅受一阶敏感度影响, 也受曲率影响。曲率项类似热方程中的 v_{xx} , 它让尖锐支付在向前或向后传播时变得更平滑。

例 32.16 (收入冲击的扩散). 若收入状态有连续随机冲击, 密度不只被漂移搬运, 也会扩散。直觉上, 原本集中在一点附近的人群会逐渐散开, 这就是二阶项在分布方程中的作用。

32.9 Laplace 与 Poisson 方程

没有时间变量的二阶方程常描述稳态。Laplace 方程为

$$\Delta v = 0.$$

Poisson 方程为

$$-\Delta v = f.$$

在一维中就是

$$-v''(x) = f(x).$$

命题 32.5 (一维 Poisson 方程积分公式). 若

$$-v''(x) = f(x), \quad v(0) = v(1) = 0,$$

则 v 可由两次积分和边界条件确定。特别地, 若 $f(x) = q$ 为常数, 则

$$v(x) = \frac{q}{2}x(1-x).$$

证明. 当 $f(x) = q$ 时,

$$v''(x) = -q.$$

积分一次得

$$v'(x) = -qx + C_1.$$

再积分得

$$v(x) = -\frac{q}{2}x^2 + C_1x + C_2.$$

由 $v(0) = 0$ 得 $C_2 = 0$ 。由 $v(1) = 0$ 得

$$-\frac{q}{2} + C_1 = 0,$$

所以 $C_1 = q/2$ 。因此

$$v(x) = \frac{q}{2}x(1-x).$$

□

例 32.17 (稳态价值剖面). 若一个地区或状态空间中的价值受到外部源项 $f(x)$ 影响, 并通过空间联系平滑, 那么稳态条件可能写成 Poisson 型方程。边界条件决定价值在边缘状态上的锚。

例 32.18 (均衡势函数). 在某些空间经济或网络极限模型中, 价格、拥挤成本或匹配价值可类比为势函数。Laplace 或 Poisson 方程提供了“内部由平衡条件决定, 边界由外部条件固定”的数学语言。

32.10 确定性 HJB 方程

Ch30 的最优控制沿最优路径写 Hamiltonian 条件。动态规划则直接写价值函数方程。考虑无限期确定性问题

$$v(x) = \max_{u(\cdot)} \int_0^\infty e^{-\rho t} r(x(t), u(t)) dt$$

subject to

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x.$$

短时间 Bellman 原理给出

$$v(x) = \max_u \{r(x, u)\Delta t + e^{-\rho\Delta t}v(x + \Delta t f(x, u))\} + o(\Delta t).$$

命题 32.6 (确定性 HJB 的短时推导). 若 v 足够光滑, 则价值函数满足

$$\rho v(x) = \max_u \{r(x, u) + v_x(x)f(x, u)\}.$$

证明. 对短时间 Bellman 方程使用一阶展开:

$$e^{-\rho\Delta t} = 1 - \rho\Delta t + o(\Delta t),$$

$$v(x + \Delta t f) = v(x) + \Delta t v_x(x)f(x, u) + o(\Delta t).$$

代回后，

$$v(x) = \max_u \{r(x, u)\Delta t + v(x) + \Delta t[v_x f - \rho v] + o(\Delta t)\}.$$

两边减去 $v(x)$ ，除以 Δt ，令 $\Delta t \rightarrow 0$ ，得到

$$0 = \max_u \{r(x, u) + v_x f - \rho v\}.$$

移项即为 HJB。 □

例 32.19 (消费储蓄 HJB). 财富满足

$$\dot{a} = ra + y - c.$$

无限期价值函数满足

$$\rho v(a) = \max_c \{u(c) + v_a(a)(ra + y - c)\}.$$

一阶条件为

$$u'(c) = v_a(a),$$

这正是 Ch30 中当前值协态变量等于价值函数导数的 Bellman 版本。

例 32.20 (企业投资 HJB). 资本满足

$$\dot{k} = i - \delta k,$$

利润为

$$F(k) - i - \frac{\psi}{2}i^2.$$

HJB 为

$$\rho v(k) = \max_i \left\{ F(k) - i - \frac{\psi}{2}i^2 + v_k(k)(i - \delta k) \right\}.$$

一阶条件为

$$-1 - \psi i + v_k(k) = 0.$$

资本的边际价值越高，投资越强。

32.11 向随机控制和金融 PDE 的桥

随机状态会给 HJB 增加二阶项。形式上，若状态有漂移 $b(x, u)$ 和波动 $\sigma(x, u)$ ，后续章节会看到

$$\rho v(x) = \max_u \left\{ r(x, u) + v_x b(x, u) + \frac{1}{2} \sigma(x, u)^2 v_{xx} \right\}.$$

其中二阶项来自随机波动。Black-Scholes 方程也具有相同结构：时间项、一阶状态项、二阶曲率项和贴现项。

例 32.21 (Black-Scholes PDE 的形状). 后续资产定价中会出现

$$V_t + rSV_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} - rV = 0.$$

这里 V_S 是 Delta, V_{SS} 是 Gamma。二阶项说明价格曲率会影响风险复制和期权价值。

例 32.22 (HJB-KF 系统的形状). 连续时间异质性主体模型常有一条 HJB 方程决定个体最优政策, 另有一条 Kolmogorov forward 方程决定分布演化:

$$\text{HJB for } v, \quad \text{KF for } m.$$

本章的一阶运输和守恒形式就是理解 KF 方程的入口。

32.12 本章小结

PDE 是连续时间经济学中价值函数、价格函数和分布密度的自然语言。一阶运输方程描述状态空间中的确定性流动; 守恒形式描述分布质量如何流入流出; 热方程和二阶项描述扩散和平滑; Poisson/Laplace 方程描述稳态和边界约束; HJB 方程把连续时间最优控制写成状态空间中的函数方程。下一章将引入 Brownian motion 和 Itô 引理, 解释二阶项如何从随机运动中出现。

32.13 Exercises

习题 32.1. 说明 ODE 和 PDE 的区别。

习题 32.2. 定义偏导数 v_t 、 v_x 、 v_{xx} 。

习题 32.3. 对 $v(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ 计算梯度和 Hessian。

习题 32.4. 计算 $v(x, y) = x^2 + y^2$ 的 Laplacian。

习题 32.5. 证明沿曲线的链式法则。

习题 32.6. 解释初值条件、终端值条件和边界条件的区别。

习题 32.7. 给出一个资产定价中的终端值条件例子。

习题 32.8. 判断 $v_t + av_x = 0$ 是几阶 PDE。

习题 32.9. 判断 $\rho v = \max_c \{u(c) + v_a(ra + y - c)\}$ 为什么是非线性的。

习题 32.10. 求解常系数运输方程 $v_t + 2v_x = 0$ 、 $v(0, x) = x^2$ 。

习题 32.11. 验证 $v(t, x) = v_0(x - at)$ 满足 $v_t + av_x = 0$ 。

习题 32.12. 解释特征线的含义。

习题 32.13. 求解 $v_t + xv_x = 0$ 、 $v(0, x) = \log x$ ，其中 $x > 0$ 。

习题 32.14. 写出守恒形式运输方程。

习题 32.15. 推导 $\frac{d}{dt} \int_{\ell}^r m(t, x) dx = a(\ell)m(t, \ell) - a(r)m(t, r)$ 。

习题 32.16. 解释财富分布方程中边界流量的经济含义。

习题 32.17. 写出热方程并解释 κ 的作用。

习题 32.18. 验证 $e^{-\kappa n^2 t} \sin(nx)$ 满足热方程。

习题 32.19. 说明热方程为什么具有平滑作用。

习题 32.20. 定义 Laplace 方程和 Poisson 方程。

习题 32.21. 解 $-v''(x) = 1$ 、 $v(0) = v(1) = 0$ 。

习题 32.22. 若 $-v''(x) = q$ 、 $v(0) = v(1) = 0$ ，求 $v(1/2)$ 。

习题 32.23. 解释边界条件在 Poisson 方程中的作用。

习题 32.24. 从短时间 Bellman 原理推导确定性 HJB。

习题 32.25. 写出消费储蓄问题的确定性 HJB。

习题 32.26. 由消费储蓄 HJB 推导消费一阶条件。

习题 32.27. 写出企业投资问题的 HJB。

习题 32.28. 解释 v_x 在 HJB 中的经济含义。

习题 32.29. 说明随机控制 HJB 中二阶项的来源。

习题 32.30. 写出 Black-Scholes PDE 的基本形状。

习题 32.31. 解释 Delta 和 Gamma 分别对应哪个偏导数。

习题 32.32. 说明 HJB 方程和 Hamiltonian 最大化之间的关系。

习题 32.33. 解释 Kolmogorov forward 方程为什么常是守恒形式。

习题 32.34. 比较运输方程和热方程的经济含义。

习题 32.35. 列出后续连续时间金融和宏观金融中会反复出现的三类 PDE。

32.14 Solutions

本章解答的核心是把“函数随状态变化”看成新的对象：价值函数、价格函数和分布密度都可能是 PDE 的未知函数。

解答 32.1. ODE 的未知对象通常是一条时间路径 $x(t)$ ，方程含有普通导数。PDE 的未知对象是多变量函数，例如 $v(t, x)$ ，方程含有偏导数，如 v_t 、 v_x 、 v_{xx} 。

解答 32.2.

$$v_t = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad v_x = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v_{xx} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

其中 v_t 衡量时间方向变化， v_x 衡量状态方向边际变化， v_{xx} 衡量状态方向曲率。

解答 32.3. 对

$$v = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

有

$$\nabla v = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix},$$

且

$$D^2v = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

解答 32.4. 若 $v(x, y) = x^2 + y^2$ ，则

$$v_{xx} = 2, \quad v_{yy} = 2.$$

所以

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 4.$$

解答 32.5. 设 $x = x(t)$ 。由多元链式法则，

$$\frac{d}{dt}v(t, x(t)) = v_t(t, x(t)) \cdot 1 + v_x(t, x(t))\dot{x}(t).$$

若 $x \in \mathbb{R}^n$ ，则把每个分量相加：

$$\frac{d}{dt}v(t, x(t)) = v_t + \nabla v \cdot \dot{x}.$$

解答 32.6. 初值条件指定 $t = 0$ 的函数，例如 $v(0, x) = v_0(x)$ 。终端值条件指定 $t = T$ 的函数，例如 $V(T, S) = \Phi(S)$ 。边界条件指定状态域边界上的函数值或导数值，例如 $v(t, 0) = 0$ 。

解答 32.7. 欧式看涨期权到期支付为

$$\Phi(S) = \max\{S - K, 0\}.$$

因此价格函数满足终端条件

$$V(T, S) = \max\{S - K, 0\}.$$

解答 32.8.

$$v_t + av_x = 0$$

只含一阶偏导数 v_t 和 v_x ，所以是一阶 PDE。

解答 32.9. 方程右侧含有最大化算子：

$$\max_c \{u(c) + v_a(ra + y - c)\}.$$

最优 c 通常依赖于 v_a 。最大化后的表达式一般不是 v 和 v_a 的线性函数，因此这是 HJB 型非线性 PDE。

解答 32.10. 常系数运输方程解为

$$v(t, x) = v_0(x - 2t).$$

若 $v_0(x) = x^2$ ，则

$$v(t, x) = (x - 2t)^2.$$

解答 32.11. 令 $v(t, x) = v_0(x - at)$ 。则

$$v_t = -av'_0(x - at), \quad v_x = v'_0(x - at).$$

因此

$$v_t + av_x = -av'_0(x - at) + av'_0(x - at) = 0.$$

解答 32.12. 特征线是在 (t, x) 平面中沿着 PDE 信息传播的曲线。对

$$v_t + a(x)v_x = 0$$

特征线满足

$$\dot{x} = a(x).$$

沿特征线， v 保持不变。

解答 32.13. 特征线满足

$$\dot{x} = x, \quad x(t) = x_0 e^t.$$

所以 $x_0 = x e^{-t}$ 。初值为 $v_0(x) = \log x$ ，因此

$$v(t, x) = v_0(x e^{-t}) = \log x - t.$$

解答 32.14. 守恒形式运输方程为

$$m_t(t, x) + \frac{\partial}{\partial x}[a(x)m(t, x)] = 0.$$

它描述密度 m 在速度场 $a(x)$ 下的流动。

解答 32.15. 对方程

$$m_t + (am)_x = 0$$

在 $[\ell, r]$ 上积分：

$$\frac{d}{dt} \int_{\ell}^r m \, dx + \int_{\ell}^r (am)_x \, dx = 0.$$

第二项为

$$a(r)m(t, r) - a(\ell)m(t, \ell).$$

移项得

$$\frac{d}{dt} \int_{\ell}^r m \, dx = a(\ell)m(t, \ell) - a(r)m(t, r).$$

解答 32.16. 边界流量 $a(\ell)m(t, \ell)$ 是从左边界进入区间的质量， $a(r)m(t, r)$ 是从右边界离开的质量。区间内财富分布质量的变化等于流入减流出。

解答 32.17. 热方程为

$$v_t = \kappa v_{xx}, \quad \kappa > 0.$$

κ 控制扩散速度。 κ 越大，函数中的尖峰和凹谷被平滑得越快。

解答 32.18. 令

$$v = e^{-\kappa n^2 t} \sin(nx).$$

则

$$v_t = -\kappa n^2 e^{-\kappa n^2 t} \sin(nx),$$

$$v_{xx} = -n^2 e^{-\kappa n^2 t} \sin(nx).$$

所以 $v_t = \kappa v_{xx}$ 。

解答 32.19. 若某点高于周围, 则曲率通常为负, 热方程给出 $v_t < 0$, 该点下降。若某点低于周围, 则曲率为正, $v_t > 0$, 该点上升。因此热方程削弱局部峰谷, 使函数变平滑。

解答 32.20. Laplace 方程为

$$\Delta v = 0.$$

Poisson 方程为

$$-\Delta v = f.$$

前者没有源项, 后者有源项 f 。

解答 32.21.

$$-v'' = 1$$

即 $v'' = -1$ 。积分两次:

$$v(x) = -\frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2.$$

由 $v(0) = 0$ 得 $C_2 = 0$ 。由 $v(1) = 0$ 得 $C_1 = 1/2$ 。所以

$$v(x) = \frac{1}{2}x(1-x).$$

解答 32.22. 由公式

$$v(x) = \frac{q}{2}x(1-x),$$

得

$$v(1/2) = \frac{q}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{q}{8}.$$

解答 32.23. Poisson 方程的二阶导数条件只决定函数的弯曲方式。边界条件决定积分常数, 从而固定整条函数的位置和斜率。没有边界条件, 解通常不唯一。

解答 32.24. 短时间 Bellman 原理为

$$v(x) = \max_u \{r(x, u)\Delta t + e^{-\rho\Delta t}v(x + \Delta t f(x, u))\} + o(\Delta t).$$

展开

$$e^{-\rho\Delta t} = 1 - \rho\Delta t + o(\Delta t),$$

$$v(x + \Delta t f) = v(x) + \Delta t v_x f + o(\Delta t).$$

代回、减去 $v(x)$ 、除以 Δt , 令 $\Delta t \rightarrow 0$, 得

$$\rho v(x) = \max_u \{r(x, u) + v_x f(x, u)\}.$$

解答 32.25. 若财富动态为

$$\dot{a} = ra + y - c,$$

则 HJB 为

$$\rho v(a) = \max_c \{u(c) + v_a(a)(ra + y - c)\}.$$

解答 32.26. 对右侧关于 c 求一阶条件:

$$u'(c) - v_a(a) = 0.$$

所以

$$u'(c) = v_a(a).$$

当前消费边际效用等于财富的边际价值。

解答 32.27. 若

$$\dot{k} = i - \delta k$$

且利润为

$$F(k) - i - \frac{\psi}{2}i^2,$$

则

$$\rho v(k) = \max_i \left\{ F(k) - i - \frac{\psi}{2}i^2 + v_k(k)(i - \delta k) \right\}.$$

解答 32.28. v_x 是状态的边际价值。HJB 中的项

$$v_x(x)f(x, u)$$

表示控制 u 通过改变状态运动速度 f 对未来价值产生的边际贡献。

解答 32.29. 随机控制中状态不仅有漂移，还有随机波动。对价值函数沿随机过程展开时，二阶曲率项 v_{xx} 会出现。后续 Itô 引理会精确说明这一点。

解答 32.30. Black-Scholes PDE 的基本形状为

$$V_t + rSV_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} - rV = 0.$$

它包含时间项、一阶状态项、二阶曲率项和贴现项。

解答 32.31. Delta 对应

$$V_S.$$

Gamma 对应

$$V_{SS}.$$

Delta 衡量价格对标的资产价格的一阶敏感度，Gamma 衡量这种敏感度本身的变化。

解答 32.32. HJB 的右侧通常是

$$\max_u \{r(x, u) + v_x f(x, u)\}.$$

若把 $\mu = v_x$, 被最大化的表达式就是当前值 Hamiltonian。因此 HJB 是 Hamiltonian 最大化的状态空间版本。

解答 32.33. Kolmogorov forward 方程描述概率质量或人口质量如何在状态空间中移动。质量守恒意味着某区间内质量变化等于边界流入减流出, 所以它自然写成守恒形式。

解答 32.34. 运输方程描述状态按确定性速度移动, 形状主要被搬运。热方程描述扩散, 形状会被平滑。经济上, 前者对应确定性漂移, 后者对应不确定性冲击或随机扩散。

解答 32.35. 后续会反复出现三类 PDE: 价值函数的 HJB 方程, 资产价格或衍生品价格的定价 PDE, 以及分布密度的 Kolmogorov forward 方程。

32.15 Computation Lab

本章的计算实验目标不是建立完整 PDE 求解器, 而是让读者看见偏导数和边界条件如何变成网格上的代数运算。

1. 有限差分偏导。在网格 $x_i = i\Delta x$ 上, 用

$$v_x(x_i) \approx \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\Delta x}, \quad v_{xx}(x_i) \approx \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

近似一阶和二阶导数, 并用二次函数检查误差。

2. 运输方程上风格式。对

$$v_t + av_x = 0$$

当 $a > 0$ 时使用

$$v_i^{n+1} = v_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(v_i^n - v_{i-1}^n).$$

比较数值解和解析解 $v_0(x - at)$ 。

3. 热方程显式迭代。对

$$v_t = \kappa v_{xx}$$

使用

$$v_i^{n+1} = v_i^n + \frac{\kappa\Delta t}{(\Delta x)^2}(v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n).$$

观察初始尖峰如何被平滑。

4. 一维 Poisson 方程。把

$$-v''(x) = 1, \quad v(0) = v(1) = 0$$

离散成三对角线性方程，比较解析解 $v(x) = x(1-x)/2$ 。

5. 确定性 HJB 网格。对

$$\rho v(a) = \max_c \{u(c) + v_a(a)(ra + y - c)\}$$

先固定一个消费政策 $c(a)$ ，求线性方程近似值函数，再用一阶条件更新政策。这个实验为后续 HJB 数值方法做铺垫。

第三十三章 Brownian Motion、随机积分与 Itô 引理

33.1 从确定性连续时间到随机连续时间

Ch29 的状态方程是

$$\dot{x}(t) = F(x(t)).$$

Ch31 说明，一旦价值函数依赖时间和状态，就会出现 PDE。现在加入连续时间随机冲击。金融价格、收入、生产率和利率都可能在极短时间内受到新信息影响。连续时间模型常把这种不可预测的新信息写成 Brownian motion。

最基本的随机微分形式是

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t.$$

其中 b 是漂移， σ 是波动， W_t 是 Brownian motion。本章的目标是解释 dW_t 不是普通微分，为什么 $(dW_t)^2$ 会贡献一个 dt 项，以及 Itô 引理如何把随机运动转成 PDE 中的二阶项。

例 33.1 (连续时间股票收益). 若股票价格满足

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

则 $\mu S_t dt$ 是可预测的平均增长部分， $\sigma S_t dW_t$ 是随机新信息冲击。这个模型是 Black-Scholes 和 Merton 问题的入口。

例 33.2 (收入风险). 连续时间收入状态可写成

$$dy_t = \alpha(\bar{y} - y_t) dt + \sigma dW_t.$$

第一项把收入拉回长期均值，第二项表示不可预测冲击。后续 HJB-KF 模型会把这种个体随机状态和横截面分布联系起来。

33.2 Brownian motion

定义 33.1 (标准 Brownian motion). 在带过滤 $(\mathcal{F}_t)$ 的概率空间上, 过程 $(W_t)_{t \geq 0}$ 称为标准 Brownian motion, 若:

1. $W_0 = 0$ 。
2. 路径 $t \mapsto W_t$ 连续。
3. 对 $0 \leq s < t$, 增量 $W_t - W_s$ 独立于 $\mathcal{F}_s$ 。
4. 增量 $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ 。

这四条性质把 Brownian motion 理解为连续时间的正态随机游走极限: 没有跳跃, 未来新增信息独立于过去, 增量方差等于时间长度。

例 33.3 (一分钟和四分钟波动). 若 W_t 是标准 Brownian motion, 则

$$W_{t+1} - W_t \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

而

$$W_{t+4} - W_t \sim \mathcal{N}(0, 4).$$

标准差分别为 1 和 2。时间长度变为四倍, 标准差只变为两倍, 这就是平方根时间缩放。

例 33.4 (独立增量). 若 $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, 则

$$W_{t_2} - W_{t_1}$$

和

$$W_{t_4} - W_{t_3}$$

在不重叠区间上独立。金融上, 这对应不同短区间的新信息冲击互不提前泄露。

命题 33.1 (Brownian 增量矩). 若 $0 \leq s < t$, 则

$$\mathbb{E}[W_t - W_s] = 0, \quad \text{Var}(W_t - W_s) = t - s,$$

并且

$$\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] = t - s.$$

证明. 由定义,

$$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s).$$

正态随机变量的均值为 0, 方差为 $t - s$ 。由于均值为零, 二阶矩等于方差, 因此

$$\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] = t - s.$$

□

例 33.5 (收益方差的时间聚合). 若短期对数收益近似为

$$\sigma(W_{t+\Delta} - W_t),$$

则方差为

$$\sigma^2 \Delta.$$

两个不重叠区间的方差相加, 所以连续时间模型中方差按时间线性累积。

33.3 过滤、适应性和不可预测性

定义 33.2 (适应过程). 过程 X_t 称为适应于过滤 $(\mathcal{F}_t)$, 若每个 t 下 X_t 都是 $\mathcal{F}_t$ -可测的。直观地说, 时点 t 的 X_t 只使用时点 t 已知的信息。

定义 33.3 (可预测简单过程). 给定分割

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T,$$

过程

$$H_t = \sum_{i=0}^{n-1} H_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$$

称为简单可预测过程, 若 H_i 是 $\mathcal{F}_{t_i}$ -可测的。

Itô 积分使用左端点信息。也就是说, 在区间 $(t_i, t_{i+1}]$ 上下注或持仓时, 只能使用 t_i 已知的信息, 不能偷看 $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ 。

例 33.6 (交易策略的可预测性). 若 H_t 是持有股票的数量, H_i 必须在 t_i 决定。收益增量为

$$H_i(S_{t_{i+1}} - S_{t_i}).$$

如果允许 H_i 依赖未来价格变化, 就会出现违反无套利直觉的“预知交易”。

例 33.7 (左端点和右端点的差别). 随机和

$$\sum_i W_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

使用左端点, 是 Itô 型。若改用右端点

$$\sum_i W_{t_{i+1}} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}),$$

就把新增冲击本身放入权重, 极限会多出二次变差项。

33.4 Brownian 路径和二次变差

Brownian 路径连续, 但粗糙到不能像普通可微函数那样处理。普通光滑函数在很小区间上增量约为 Δt , 平方约为 $(\Delta t)^2$, 加总后趋于零。Brownian 增量大小约为 $\sqrt{\Delta t}$, 平方约为 Δt , 加总后留下有限极限。

定义 33.4 (二次变差). 给定分割 $\Pi = \{0 = t_0 < \cdots < t_n = t\}$, 定义

$$Q_\Pi(W) = \sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2.$$

当分割越来越细时, 若 $Q_\Pi(W)$ 收敛到某个过程, 记为 $[W]_t$ 。

命题 33.2 (Brownian 二次变差). 沿等距分割, 当网格趋于零时,

$$\sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \rightarrow t$$

在 L^2 意义下成立。因此记

$$[W]_t = t.$$

证明. 令 $\Delta = t/n$, $\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ 。则 $\Delta W_i \sim \mathcal{N}(0, \Delta)$, 且相互独立。于是

$$\mathbb{E} \left[\sum_i (\Delta W_i)^2 \right] = \sum_i \mathbb{E}[(\Delta W_i)^2] = n\Delta = t.$$

对正态变量 $Z \sim \mathcal{N}(0, \Delta)$, 有

$$\text{Var}(Z^2) = 2\Delta^2.$$

独立性给出

$$\text{Var} \left(\sum_i (\Delta W_i)^2 \right) = n \cdot 2\Delta^2 = 2t^2/n \rightarrow 0.$$

因此该和在 L^2 中收敛到其均值极限 t 。

□

例 33.8 (为什么 $(dW_t)^2 = dt$). 二次变差告诉我们, 在 Itô 计算中可以把

$$(dW_t)^2$$

理解为贡献一个 dt 量级的项。这不是普通代数恒等式, 而是二次变差极限的记忆法。

例 33.9 (普通时间项的平方消失). 如果一个项是 dt , 则

$$(dt)^2$$

在一阶近似中忽略。如果一个项是 $dt dW_t$, 其量级类似 $\Delta t \sqrt{\Delta t}$, 加总后也消失。Itô 乘法规则保留的是

$$(dW_t)^2 = dt.$$

33.5 Itô 积分

对简单可预测过程

$$H_t = \sum_{i=0}^{n-1} H_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t),$$

定义 Itô 积分为

$$\int_0^T H_t dW_t = \sum_{i=0}^{n-1} H_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

命题 33.3 (简单 Itô 积分均值为零). 若 H_i 平方可积且 $\mathcal{F}_{t_i}$ -可测, 则

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T H_t dW_t \right] = 0.$$

证明. 由定义,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T H_t dW_t \right] = \sum_i \mathbb{E}[H_i \Delta W_i].$$

由于 H_i 是 $\mathcal{F}_{t_i}$ -可测, 而 ΔW_i 独立于 $\mathcal{F}_{t_i}$, 且条件均值为零,

$$\mathbb{E}[H_i \Delta W_i] = \mathbb{E}[H_i \mathbb{E}[\Delta W_i | \mathcal{F}_{t_i}]] = 0.$$

逐项相加即得结论。 □

命题 33.4 (Itô 等距). 对简单可预测过程 H , 有

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T H_t dW_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T H_t^2 dt \right].$$

证明. 记 $\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$. 平方展开:

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_i H_i \Delta W_i \right)^2 \right] = \sum_i \mathbb{E}[H_i^2 (\Delta W_i)^2] + 2 \sum_{i < j} \mathbb{E}[H_i H_j \Delta W_i \Delta W_j].$$

交叉项为零, 因为较晚增量的条件均值为零。对角项中,

$$\mathbb{E}[H_i^2 (\Delta W_i)^2] = \mathbb{E} [H_i^2 \mathbb{E}[(\Delta W_i)^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}]] = \mathbb{E}[H_i^2] (t_{i+1} - t_i).$$

相加得到

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T H_t^2 dt \right].$$

□

例 33.10 (常数 integrand). 若 $H_t = \sigma$, 则

$$\int_0^T \sigma dW_t = \sigma W_T.$$

均值为零, 方差为

$$\sigma^2 T.$$

这和 Itô 等距一致。

例 33.11 (分段投资组合收益). 若投资者在 $(t_i, t_{i+1}]$ 持有 H_i 单位 Brownian 风险暴露, 则累计随机收益为

$$\sum_i H_i \Delta W_i.$$

Itô 等距说明其二阶风险为各段风险暴露平方乘以时间长度的加总。

33.6 Itô process 和 SDE

定义 33.5 (Itô process). 若过程 X_t 可写为

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t,$$

即

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s,$$

则称 X_t 为 Itô process。

定义 33.6 (随机微分方程). 若漂移和波动依赖于状态,

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t,$$

则称为随机微分方程, 简称 SDE。

例 33.12 (算术 Brownian motion). 若

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t,$$

则

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t.$$

因此

$$X_t \sim \mathcal{N}(X_0 + \mu t, \sigma^2 t).$$

例 33.13 (Ornstein-Uhlenbeck 型均值回复). 收入或利率状态可写为

$$dX_t = \alpha(\bar{X} - X_t) dt + \sigma dW_t.$$

当 X_t 高于长期均值时, 漂移为负; 低于长期均值时, 漂移为正。随机项持续加入短期冲击。

33.7 Itô 引理

普通链式法则对 Itô process 不够, 因为 $(dW_t)^2$ 留下 dt 项。设

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t$$

且 $f(t, x)$ 足够光滑。二阶 Taylor 展开给出

$$df = f_t dt + f_x dX_t + \frac{1}{2} f_{xx} (dX_t)^2.$$

由于

$$(dX_t)^2 = \sigma_t^2 (dW_t)^2 = \sigma_t^2 dt,$$

得到 Itô 引理。

命题 33.5 (Itô 引理). 若

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t,$$

且 $f(t, x)$ 关于 t 一阶、关于 x 二阶连续可微, 则

$$df(t, X_t) = \left[f_t(t, X_t) + b_t f_x(t, X_t) + \frac{1}{2} \sigma_t^2 f_{xx}(t, X_t) \right] dt + \sigma_t f_x(t, X_t) dW_t.$$

证明. 在小区间上写

$$\Delta X = b\Delta t + \sigma\Delta W.$$

Taylor 展开到二阶:

$$\Delta f \approx f_t\Delta t + f_x\Delta X + \frac{1}{2}f_{xx}(\Delta X)^2.$$

其中

$$(\Delta X)^2 = b^2(\Delta t)^2 + 2b\sigma\Delta t\Delta W + \sigma^2(\Delta W)^2.$$

前两项在 Itô 极限中消失, 最后一项由 Brownian 二次变差贡献 $\sigma^2\Delta t$ 。把一阶项和二阶贡献合并, 得到公式。□

例 33.14 (平方 Brownian motion). 令 $X_t = W_t$, $f(x) = x^2$ 。则

$$f_x = 2x, \quad f_{xx} = 2.$$

Itô 引理给出

$$d(W_t^2) = 2W_t dW_t + dt.$$

因此

$$W_t^2 - t$$

是一个均值为零的鞅型对象。

例 33.15 (指数 Brownian motion). 令

$$Y_t = e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}.$$

设 $f(t, w) = e^{\sigma w - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$ 。则

$$f_t = -\frac{1}{2}\sigma^2 f, \quad f_w = \sigma f, \quad f_{ww} = \sigma^2 f.$$

Itô 引理给出漂移项

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 f + \frac{1}{2}\sigma^2 f = 0.$$

所以

$$dY_t = \sigma Y_t dW_t.$$

33.8 几何 Brownian motion

连续时间金融中最常用的价格过程是

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

这是几何 Brownian motion。

命题 33.6 (几何 Brownian motion 解). 若

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_0 > 0,$$

则

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right].$$

证明. 对 $f(s) = \log s$ 应用 Itô 引理。因为

$$f'(s) = \frac{1}{s}, \quad f''(s) = -\frac{1}{s^2},$$

所以

$$d \log S_t = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} (dS_t)^2.$$

又

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (dS_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 dt.$$

因此

$$d \log S_t = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t.$$

积分得

$$\log S_t = \log S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t.$$

取指数即得结果。 □

例 33.16 (为什么有 $-\sigma^2/2$). 若只按普通微积分猜测, 可能写成

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}.$$

但由于指数函数有正曲率, Itô 引理会产生额外漂移 $\frac{1}{2}\sigma^2$ 。为了让 dS_t/S_t 的漂移正好是 μ , 指数中必须扣掉 $\sigma^2/2$ 。

例 33.17 (对数收益分布). 由几何 Brownian motion 解,

$$\log \frac{S_t}{S_0} = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t.$$

因此对数收益服从正态分布, 均值为

$$\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t,$$

方差为

$$\sigma^2 t.$$

33.9 生成元和 PDE 中的二阶项

设

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t.$$

对光滑函数 $v(x)$, Itô 引理给出

$$dv(X_t) = \left[b(X_t)v_x(X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t)v_{xx}(X_t) \right] dt + \sigma(X_t)v_x(X_t) dW_t.$$

定义微分算子

$$\mathcal{A}v(x) = b(x)v_x(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)v_{xx}(x).$$

它称为该扩散过程的生成元。

例 33.18 (Black-Scholes 二阶项来源). 若股票价格满足

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

则对价格函数 $V(t, S_t)$ 应用 Itô 引理:

$$dV = \left[V_t + \mu S V_S + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} \right] dt + \sigma S V_S dW_t.$$

Black-Scholes PDE 中的 V_{SS} 正是由 $(dS_t)^2$ 产生。

例 33.19 (随机 HJB 的形状). 若控制影响漂移和波动,

$$dX_t = b(X_t, u_t)dt + \sigma(X_t, u_t)dW_t,$$

则 HJB 中会出现

$$\rho v(x) = \max_u \left\{ r(x, u) + b(x, u)v_x(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x, u)v_{xx}(x) \right\}.$$

这正是 Ch31 确定性 HJB 加上 Itô 二阶修正。

33.10 本章小结

Brownian motion 是连续时间随机冲击的核心模型。它的路径连续，但二次变差不为零，满足 $[W]_t = t$ 。Itô 积分使用可预测的左端点信息，因此随机积分均值为零，并满足 Itô 等距。Itô 引理是连续时间金融和随机控制的工作马：它告诉我们，随机状态上的函数变化不仅有一阶链式法则项，还必须包含 $\frac{1}{2}\sigma^2 f_{xx}$ 的二阶修正。下一章将把这些工具放入随机控制、HJB 和 Feynman-Kac 框架中。

33.11 Exercises

- 习题 33.1. 定义标准 Brownian motion。
- 习题 33.2. 解释 Brownian motion 的独立增量和平稳增量。
- 习题 33.3. 若 W_t 是标准 Brownian motion，求 $W_5 - W_2$ 的分布。
- 习题 33.4. 计算 $\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2]$ 。
- 习题 33.5. 说明 Brownian 标准差为什么按平方根时间缩放。
- 习题 33.6. 定义 adapted process。
- 习题 33.7. 解释为什么 Itô 积分使用左端点信息。
- 习题 33.8. 定义 Brownian motion 的二次变差。
- 习题 33.9. 证明等距分割下 Brownian 二次变差的期望为 t 。
- 习题 33.10. 证明等距分割下 Brownian 二次变差的方差趋于零。
- 习题 33.11. 解释记忆法 $(dW_t)^2 = dt$ 。
- 习题 33.12. 定义简单可预测过程的 Itô 积分。
- 习题 33.13. 证明简单 Itô 积分均值为零。
- 习题 33.14. 证明简单过程的 Itô 等距。
- 习题 33.15. 计算 $\int_0^T \sigma dW_t$ 的均值和方差。
- 习题 33.16. 定义 Itô process。
- 习题 33.17. 求解 $dX_t = \mu dt + \sigma dW_t$ 。

习题 33.18. 写出均值回复过程的 SDE, 并解释漂移方向。

习题 33.19. 陈述一维 Itô 引理。

习题 33.20. 用 Itô 引理计算 $d(W_t^2)$ 。

习题 33.21. 用 Itô 引理计算 $d(e^{\sigma W_t})$ 。

习题 33.22. 解释为什么 $e^{\sigma W_t - \sigma^2 t/2}$ 没有漂移项。

习题 33.23. 推导几何 Brownian motion 的显式解。

习题 33.24. 写出几何 Brownian motion 的对数收益分布。

习题 33.25. 说明 μ 和 σ 在 $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ 中的含义。

习题 33.26. 定义扩散过程的生成元。

习题 33.27. 对 $dX_t = bX_t dt + \sigma X_t dW_t$, 写出生成元 $\mathcal{A}v$ 。

习题 33.28. 对 $V(t, S_t)$ 应用 Itô 引理, 写出 dV 。

习题 33.29. 解释 Black-Scholes PDE 中二阶项的来源。

习题 33.30. 写出随机 HJB 中二阶项的基本形状。

习题 33.31. 比较 Itô 积分和普通 Riemann-Stieltjes 积分的差别。

习题 33.32. 说明为什么 Brownian 路径连续但不能按普通速度 $\dot{W}_t$ 处理。

习题 33.33. 若 $X_t = W_t + \alpha t$, 计算 $[X]_t$ 。

习题 33.34. 若 $dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t$, 写出 $(dX_t)^2$ 的 Itô 规则。

习题 33.35. 列出本章工具在后续 Black-Scholes、Merton 和 HJB-KF 中的作用。

33.12 Solutions

本章解答的主线是: Brownian 增量的方差按时间累积, 平方增量加总留下二次变差; Itô 积分用可预测信息, 因此均值为零; Itô 引理则把二次变差转化为函数变化中的二阶修正。

解答 33.1. 标准 Brownian motion 是过程 W_t , 满足 $W_0 = 0$, 路径连续, 增量 $W_t - W_s$ 独立于过去信息 $\mathcal{F}_s$, 且

$$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s).$$

解答 33.2. 独立增量表示不重叠时间区间上的新增冲击相互独立。平稳增量表示 $W_t - W_s$ 的分布只依赖时间长度 $t - s$ ，不依赖具体起点 s 。

解答 33.3. 由于 $5 - 2 = 3$,

$$W_5 - W_2 \sim \mathcal{N}(0, 3).$$

解答 33.4. 由 Brownian 定义,

$$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s).$$

均值为零, 所以二阶矩等于方差:

$$\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] = t - s.$$

解答 33.5. 增量方差为时间长度:

$$\text{Var}(W_{t+h} - W_t) = h.$$

标准差是方差平方根, 所以为 $\sqrt{h}$ 。时间变为四倍, 标准差只变为两倍。

解答 33.6. 过程 X_t 适应于 $(\mathcal{F}_t)$, 是指每个 X_t 都只依赖时点 t 已知的信息, 即 X_t 是 $\mathcal{F}_t$ -可测的。

解答 33.7. Itô 积分模拟交易和控制: 在区间开始时决定权重, 随后承受不可预测冲击。左端点信息保证 integrand 不依赖未来增量, 从而保持无预知和均值为零的性质。

解答 33.8. 给定分割 Π , 二次变差和为

$$Q_\Pi(W) = \sum_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2.$$

当网格趋于零时, 该和的极限记为 $[W]_t$ 。对 Brownian motion, 有 $[W]_t = t$ 。

解答 33.9. 等距分割下 $\Delta = t/n$, 每个增量 $\Delta W_i \sim \mathcal{N}(0, \Delta)$ 。所以

$$\mathbb{E} \sum_i (\Delta W_i)^2 = \sum_i \mathbb{E}[(\Delta W_i)^2] = n\Delta = t.$$

解答 33.10. 对 $Z \sim \mathcal{N}(0, \Delta)$, 有

$$\text{Var}(Z^2) = 2\Delta^2.$$

独立性给出

$$\text{Var} \sum_i (\Delta W_i)^2 = n \cdot 2\Delta^2 = 2t^2/n \rightarrow 0.$$

解答 33.11. $(dW_t)^2 = dt$ 是二次变差的记忆法: Brownian 增量平方在小区间上是 dt 量级, 加总后留下有限贡献。它不是普通微积分中的代数等式。

解答 33.12. 若

$$H_t = \sum_i H_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t),$$

且 H_i 在 t_i 可知, 则

$$\int_0^T H_t dW_t = \sum_i H_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

解答 33.13. 记 $\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ 。因为 H_i 是 $\mathcal{F}_{t_i}$ -可测, 且

$$\mathbb{E}[\Delta W_i \mid \mathcal{F}_{t_i}] = 0,$$

所以

$$\mathbb{E}[H_i \Delta W_i] = 0.$$

求和得到

$$\mathbb{E} \int_0^T H_t dW_t = 0.$$

解答 33.14. 平方展开:

$$\mathbb{E} \left(\sum_i H_i \Delta W_i \right)^2 = \sum_i \mathbb{E}[H_i^2 (\Delta W_i)^2] + 2 \sum_{i < j} \mathbb{E}[H_i H_j \Delta W_i \Delta W_j].$$

交叉项为零。对角项为

$$\mathbb{E}[H_i^2] (t_{i+1} - t_i).$$

相加得

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T H_t dW_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \int_0^T H_t^2 dt.$$

解答 33.15.

$$\int_0^T \sigma dW_t = \sigma W_T.$$

均值为

$$0,$$

方差为

$$\sigma^2 T.$$

解答 33.16. Itô process 是可写成

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$$

的过程, 微分记号为

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t.$$

解答 33.17. 积分两边:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dW_s = X_0 + \mu t + \sigma W_t.$$

解答 33.18. 均值回复过程可写为

$$dX_t = \alpha(\bar{X} - X_t)dt + \sigma dW_t.$$

若 $X_t > \bar{X}$, 漂移 $\alpha(\bar{X} - X_t) < 0$, 把状态向下拉; 若 $X_t < \bar{X}$, 漂移为正, 把状态向上推。

解答 33.19. 若

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t,$$

且 $f(t, x)$ 足够光滑, 则

$$df(t, X_t) = \left[f_t + b_t f_x + \frac{1}{2} \sigma_t^2 f_{xx} \right] dt + \sigma_t f_x dW_t.$$

所有偏导数都在 (t, X_t) 处取值。

解答 33.20. 令 $f(x) = x^2$, 则 $f_x = 2x$ 、 $f_{xx} = 2$ 。对 $X_t = W_t$, 有 $b = 0$ 、 $\sigma = 1$ 。所以

$$d(W_t^2) = 2W_t dW_t + dt.$$

解答 33.21. 令 $Y_t = e^{\sigma W_t}$ 。对 $f(w) = e^{\sigma w}$, 有

$$f_w = \sigma f, \quad f_{ww} = \sigma^2 f.$$

Itô 引理给出

$$dY_t = \frac{1}{2} \sigma^2 Y_t dt + \sigma Y_t dW_t.$$

解答 33.22. 对

$$Y_t = e^{\sigma W_t - \sigma^2 t/2},$$

时间导数贡献 $-\sigma^2 Y_t/2$, 二阶 Itô 修正贡献 $+\sigma^2 Y_t/2$ 。二者抵消, 所以

$$dY_t = \sigma Y_t dW_t.$$

解答 33.23. 对

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

应用 Itô 引理到 $\log S_t$, 得到

$$d \log S_t = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t.$$

积分并取指数:

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right].$$

解答 33.24. 由显式解,

$$\log(S_t/S_0) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t.$$

因此

$$\log(S_t/S_0) \sim \mathcal{N} \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right).$$

解答 33.25. μ 是瞬时预期收益率或漂移率, 控制平均增长。 σ 是瞬时波动率, 控制随机冲击强度和收益方差累积速度。

解答 33.26. 若

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t,$$

则生成元作用在光滑函数 v 上为

$$\mathcal{A}v(x) = b(x)v_x(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)v_{xx}(x).$$

解答 33.27. 这里 $b(x) = bx$ 、 $\sigma(x) = \sigma x$ 。因此

$$\mathcal{A}v(x) = bxv_x(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(x).$$

解答 33.28. 若

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

则

$$dV(t, S_t) = \left[V_t + \mu S_t V_S + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 V_{SS} \right] dt + \sigma S_t V_S dW_t.$$

解答 33.29. Black-Scholes PDE 的二阶项来自 Itô 引理中的

$$\frac{1}{2} V_{SS} (dS_t)^2.$$

由于

$$(dS_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 dt,$$

所以出现

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 V_{SS}.$$

解答 33.30. 随机 HJB 的基本二阶项为

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x, u)v_{xx}(x).$$

完整形状通常是

$$\rho v(x) = \max_u \{r(x, u) + b(x, u)v_x(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x, u)v_{xx}(x)\}.$$

解答 33.31. 普通 Riemann-Stieltjes 积分通常依赖较规则的积分路径。Brownian 路径粗糙且二次变差非零，因此 Itô 积分必须规定使用可预测左端点，并通过 L^2 极限定义。

解答 33.32. Brownian 路径连续表示没有跳跃，但增量大小通常是 $\sqrt{\Delta t}$ 量级。若尝试除以 Δt ，比值约为 $1/\sqrt{\Delta t}$ ，不会稳定到普通导数。因此不能把 $\dot{W}_t$ 当作普通速度。

解答 33.33. 有限变差项 αt 不贡献二次变差，交叉项也消失。因此

$$[W + \alpha t]_t = [W]_t = t.$$

解答 33.34. Itô 规则保留 Brownian 平方项：

$$(dX_t)^2 = (b_t dt + \sigma_t dW_t)^2 = \sigma_t^2 dt.$$

其中 $(dt)^2$ 和 $dt dW_t$ 在 Itô 极限中忽略。

解答 33.35. Black-Scholes 使用 Itô 引理推导价格 PDE；Merton 问题使用 SDE 描述财富并用 Itô 引理推导 HJB；HJB-KF 系统中，HJB 的二阶项来自个体状态扩散，KF 方程描述分布在漂移和扩散下演化。

33.13 Computation Lab

本章计算实验的目标是用模拟看见三件事：Brownian 方差按时间累积，二次变差收敛到时间长度，Itô 引理中的二阶项不是装饰，而是数值上可见的修正。

1. 模拟 Brownian 路径。给定步长 Δt ，生成

$$\Delta W_i = \sqrt{\Delta t} Z_i, \quad Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

并令

$$W_{t_{i+1}} = W_{t_i} + \Delta W_i.$$

画出多条路径，观察连续但粗糙的形状。

2. **平方根时间缩放。**对不同时间长度 T ，重复模拟 W_T ，估计样本方差。检查方差是否接近 T ，标准差是否接近 $\sqrt{T}$ 。
3. **二次变差估计。**对一条模拟路径计算

$$\sum_i (\Delta W_i)^2.$$

随着网格变细，比较该值和 T 。

4. **Itô 积分左端点和。**近似

$$\int_0^T W_t dW_t$$

为

$$\sum_i W_{t_i} \Delta W_i.$$

与 Itô 公式

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2}(W_T^2 - T)$$

比较。

5. **几何 Brownian motion。**用显式解

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right]$$

模拟股票价格，并比较对数收益的样本均值和方差。

6. **Itô 引理数值检查。**设 $X_t = W_t$ 、 $f(x) = x^2$ 。比较

$$W_T^2 - W_0^2$$

与

$$2 \sum_i W_{t_i} \Delta W_i + T.$$

第三十四章 随机控制、HJB 与 Feynman-Kac

34.1 从 Itô 引理到随机动态规划

Ch32 说明，如果状态满足

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t,$$

那么光滑函数 $v(X_t)$ 的漂移包含

$$b(x)v_x(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)v_{xx}(x).$$

随机控制把漂移和波动中的一部分交给决策者选择：

$$dX_t = b(X_t, u_t) dt + \sigma(X_t, u_t) dW_t.$$

控制 u_t 必须基于当前信息，而不能预知未来 Brownian 增量。

定义 34.1 (受控扩散). 给定控制过程 u_t ，状态过程

$$dX_t = b(X_t, u_t) dt + \sigma(X_t, u_t) dW_t$$

称为受控扩散。若 u_t 适应于当前过滤并满足可积性和约束条件，则称 u 为可 admissible control。

例 34.1 (随机消费储蓄). 财富满足

$$dA_t = (rA_t + y - c_t) dt + \sigma_y dW_t.$$

家庭选择消费 c_t 。漂移受消费控制，随机收入或资产冲击通过 Brownian 项进入。

例 34.2 (投资组合控制). 财富满足

$$dX_t = [rX_t + \pi_t(\mu - r) - c_t] dt + \pi_t\sigma dW_t.$$

控制变量是消费 c_t 和风险资产头寸 π_t 。投资头寸同时影响漂移和波动。

34.2 生成元

对固定控制 u , 定义生成元

$$\mathcal{A}^u v(x) = b(x, u)v_x(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x, u)v_{xx}(x).$$

它描述在控制 u 下, 函数 $v(X_t)$ 的瞬时条件期望变化率。

命题 34.1 (受控扩散生成元公式). 若

$$dX_t = b(X_t, u_t) dt + \sigma(X_t, u_t) dW_t,$$

且 v 二阶连续可微, 则

$$dv(X_t) = \mathcal{A}^{u_t} v(X_t) dt + \sigma(X_t, u_t) v_x(X_t) dW_t.$$

证明. 对 $v(X_t)$ 应用 Itô 引理:

$$dv = v_x dX_t + \frac{1}{2}v_{xx}(dX_t)^2.$$

代入

$$dX_t = b(X_t, u_t)dt + \sigma(X_t, u_t)dW_t$$

并使用

$$(dX_t)^2 = \sigma^2(X_t, u_t)dt,$$

得到

$$dv = \left[b(X_t, u_t)v_x + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t, u_t)v_{xx} \right] dt + \sigma(X_t, u_t)v_x dW_t.$$

括号内即为 $\mathcal{A}^{u_t}v$. □

例 34.3 (几何 Brownian 生成元). 若

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

则

$$\mathcal{A}v(S) = \mu S v_S(S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 v_{SS}(S).$$

这正是 Black-Scholes PDE 中状态项的来源。

例 34.4 (均值回复生成元). 若

$$dY_t = \alpha(\bar{y} - Y_t)dt + \sigma dW_t,$$

则

$$\mathcal{A}v(y) = \alpha(\bar{y} - y)v_y(y) + \frac{1}{2}\sigma^2 v_{yy}(y).$$

第一项搬运状态, 第二项扩散状态。

34.3 有限期随机控制

有限期随机控制问题写作

$$V(t, x) = \sup_u \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^T e^{-\rho(s-t)} r(X_s, u_s) ds + e^{-\rho(T-t)} \Phi(X_T) \right].$$

价值函数依赖当前时间 t 和状态 x 。终端条件为

$$V(T, x) = \Phi(x).$$

命题 34.2 (有限期随机 HJB). 在光滑和内点条件下, 有限期价值函数满足

$$0 = V_t(t, x) + \sup_u \{r(x, u) + \mathcal{A}^u V(t, x) - \rho V(t, x)\},$$

并满足终端条件 $V(T, x) = \Phi(x)$ 。

证明. 从短时间 Bellman 原理出发:

$$V(t, x) = \sup_u \mathbb{E} [r(x, u)\Delta t + e^{-\rho\Delta t} V(t + \Delta t, X_{t+\Delta t})] + o(\Delta t).$$

对 $V(t + \Delta t, X_{t+\Delta t})$ 用 Itô 展开并取条件期望:

$$\mathbb{E}[\Delta V] = [V_t + \mathcal{A}^u V]\Delta t + o(\Delta t),$$

随机积分项条件均值为零。同时

$$e^{-\rho\Delta t} = 1 - \rho\Delta t + o(\Delta t).$$

代回、减去 $V(t, x)$ 、除以 Δt 并令 $\Delta t \rightarrow 0$, 得到 HJB。 □

例 34.5 (无控制的终端支付). 若没有控制, 且

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t,$$

则 HJB 退化为线性 PDE:

$$V_t + \mathcal{A}V - \rho V = 0, \quad V(T, x) = \Phi(x).$$

这就是 Feynman-Kac 和定价 PDE 的形式。

例 34.6 (可选择漂移). 若

$$dX_t = u_t dt + \sigma dW_t, \quad r(x, u) = -\frac{1}{2}u^2,$$

则 HJB 为

$$0 = V_t + \sup_u \left\{ -\frac{1}{2}u^2 + uV_x + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx} - \rho V \right\}.$$

一阶条件给出

$$u^* = V_x.$$

例 34.7 (有限期投资比例控制). 若财富满足

$$dX_t = [rX_t + \pi_t(\mu - r)]dt + \pi_t \sigma dW_t,$$

终端效用为 $\Phi(X_T)$, 则有限期 HJB 为

$$0 = V_t + \max_{\pi} \left\{ [rx + \pi(\mu - r)]V_x + \frac{1}{2}\pi^2 \sigma^2 V_{xx} - \rho V \right\}.$$

这里投资比例或金额 π 同时改变预期收益和风险暴露。

34.4 无限期平稳 HJB

无限期问题若环境不随时间变化, 价值函数通常写作 $v(x)$:

$$v(x) = \sup_u \mathbb{E}_x \int_0^\infty e^{-\rho t} r(X_t, u_t) dt.$$

对应 HJB 为

$$\rho v(x) = \sup_u \{ r(x, u) + \mathcal{A}^u v(x) \}.$$

例 34.8 (随机消费储蓄 HJB). 若

$$dA_t = (rA_t + y - c_t)dt + \sigma dW_t,$$

则

$$\rho v(a) = \max_c \left\{ u(c) + v_a(a)(ra + y - c) + \frac{1}{2}\sigma^2 v_{aa}(a) \right\}.$$

一阶条件为

$$u'(c) = v_a(a).$$

例 34.9 (控制波动). 若控制 u 改变波动:

$$dX_t = bX_t dt + u_t dW_t, \quad r(x, u) = R(x) - \frac{\eta}{2}u^2,$$

则 HJB 含有

$$\max_u \left\{ R(x) - \frac{\eta}{2}u^2 + bxv_x + \frac{1}{2}u^2v_{xx} \right\}.$$

波动选择取决于 v_{xx} : 若价值函数凹, 额外波动通常降低价值。

命题 34.3 (确定性 HJB 是零波动特例). 若 $\sigma(x, u) = 0$, 则随机 HJB

$$\rho v = \sup_u \left\{ r + bv_x + \frac{1}{2}\sigma^2 v_{xx} \right\}$$

退化为确定性 HJB

$$\rho v = \sup_u \{ r + bv_x \}.$$

证明. 令 $\sigma = 0$, 二阶项

$$\frac{1}{2}\sigma^2 v_{xx}$$

消失, 剩余项正是 Ch31 的确定性 HJB. □

34.5 HJB 验证定理

HJB 方程给出候选价值函数。验证定理说明: 如果一个足够光滑的函数满足 HJB, 并且某个政策达到 HJB 右侧最大值, 那么它确实是价值函数, 该政策确实最优。

命题 34.4 (HJB 验证定理: 平滑版本). 考虑无限期折现问题

$$\sup_u \mathbb{E}_x \int_0^\infty e^{-\rho t} r(X_t, u_t) dt.$$

若存在足够光滑函数 v , 满足增长条件和 HJB

$$\rho v(x) = \sup_u \{ r(x, u) + \mathcal{A}^u v(x) \},$$

且可行政策 $u^*(x)$ 达到最大值, 则在合适的横截条件下, v 是价值函数, u^* 是最优政策。

证明. 对任意可行控制 u_t , 对

$$e^{-\rho t} v(X_t)$$

应用 Itô 引理:

$$d(e^{-\rho t} v(X_t)) = e^{-\rho t} [\mathcal{A}^{u_t} v(X_t) - \rho v(X_t)] dt + e^{-\rho t} \sigma v_x dW_t.$$

由 HJB,

$$r(X_t, u_t) + \mathcal{A}^{u_t} v(X_t) - \rho v(X_t) \leq 0.$$

所以

$$e^{-\rho t} r(X_t, u_t) dt \leq -d(e^{-\rho t} v(X_t)) + \text{martingale term}.$$

积分并取期望, 鞅项期望为零, 横截条件控制终端项, 得到任意政策的收益不超过 $v(x)$ 。若 u^* 达到 HJB 最大值, 上述不等式处处取等号, 因此收益等于 $v(x)$, 政策最优。□

例 34.10 (验证一个消费政策). 若猜测某消费储蓄问题的价值函数为

$$v(a) = B + \frac{1}{1-\gamma} C a^{1-\gamma},$$

先计算 v_a 和 v_{aa} , 由一阶条件得到候选 $c^*(a)$, 再把它代回 HJB。若等式成立并满足边界/横截条件, 就完成验证。

例 34.11 (为什么只解一阶条件不够). 随机控制的一阶条件可能给出多个候选政策, 甚至给出不满足边界条件的政策。验证定理要求同时检查 HJB、可行性、最大化和横截条件, 从而排除局部但非全局的候选。

例 34.12 (退出边界条件). 若企业现金储备 X_t 首次到达零时退出,

$$\tau = \inf\{t : X_t \leq 0\},$$

且退出价值为 0, 则价值函数应满足边界条件

$$v(0) = 0.$$

即使内部 HJB 成立, 若候选函数没有满足该边界条件, 也不能通过验证。

34.6 Feynman-Kac 公式

当没有控制或控制固定时, HJB 变成线性 PDE。Feynman-Kac 公式把线性 PDE 的解表示为随机过程上的条件期望。

命题 34.5 (Feynman-Kac 公式: 基本形式). 设

$$dX_s = b(X_s)ds + \sigma(X_s)dW_s,$$

生成元为

$$\mathcal{A}v = bv_x + \frac{1}{2}\sigma^2 v_{xx}.$$

若 $V(t, x)$ 满足

$$V_t + \mathcal{A}V - q(x)V + g(x) = 0, \quad V(T, x) = \Phi(x),$$

则在适当条件下

$$V(t, x) = \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^T e^{-\int_t^s q(X_\tau) d\tau} g(X_s) ds + e^{-\int_t^T q(X_\tau) d\tau} \Phi(X_T) \right].$$

证明. 令

$$M_s = e^{-\int_t^s q(X_\tau) d\tau} V(s, X_s) + \int_t^s e^{-\int_t^z q(X_\tau) d\tau} g(X_z) dz.$$

对第一项应用 Itô 引理和乘积法则。其漂移为

$$e^{-\int_t^s q} [V_t + \mathcal{A}V - qV + g] ds.$$

由 PDE, 该漂移为零, 因此 M_s 是局部鞅。取 $s = T$ 并取条件期望, 鞅项消失, 即得到表示公式。□

例 34.13 (无中间收益的 Feynman-Kac). 若 $g = 0$ 、 $q = r$ 为常数, 则

$$V(t, x) = \mathbb{E}_{t,x} [e^{-r(T-t)} \Phi(X_T)].$$

这就是很多风险中性定价公式的数学形状。

例 34.14 (带流收益的资产). 若资产在持有期间支付流收益 $g(X_t)$, 终端支付 $\Phi(X_T)$, 且贴现率为 r , 则价格为

$$V(t, x) = \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^T e^{-r(s-t)} g(X_s) ds + e^{-r(T-t)} \Phi(X_T) \right].$$

对应 PDE 为

$$V_t + \mathcal{A}V - rV + g = 0.$$

34.7 风险中性定价 PDE

在风险中性测度 Q 下, 股票价格满足

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q.$$

欧式支付 $\Phi(S_T)$ 的无套利价格形状为

$$V(t, S) = \mathbb{E}_{t,S}^Q [e^{-r(T-t)} \Phi(S_T)].$$

由 Feynman-Kac, V 满足

$$V_t + rSV_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} - rV = 0, \quad V(T, S) = \Phi(S).$$

命题 34.6 (风险中性定价 PDE). 若在风险中性测度下

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q,$$

则终端支付 $\Phi(S_T)$ 的价格函数满足

$$V_t + rSV_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} - rV = 0, \quad V(T, S) = \Phi(S).$$

证明. 风险中性价格为

$$V(t, S) = \mathbb{E}^Q[e^{-r(T-t)}\Phi(S_T) \mid S_t = S].$$

在 Q 下, 生成元为

$$\mathcal{A}V = rSV_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS}.$$

把 $q = r$ 、 $g = 0$ 代入 Feynman-Kac 对应的 PDE:

$$V_t + \mathcal{A}V - rV = 0,$$

即得结论。 □

例 34.15 (债券价格). 若终端支付恒为 1, 且短期利率常数为 r , 则

$$V(t) = e^{-r(T-t)}.$$

它满足

$$V_t - rV = 0, \quad V(T) = 1.$$

例 34.16 (看涨期权终端条件). 欧式看涨期权终端支付为

$$\Phi(S) = \max\{S - K, 0\}.$$

定价 PDE 与上面相同, 区别只在终端条件。Ch35 会专门求解这个方程并解释复制组合。

34.8 HJB、Feynman-Kac 与经济直觉

HJB 和 Feynman-Kac 的差别可以用一句话概括: 有控制时取最大化, 方程通常非线性; 无控制或政策固定时没有最大化, 方程线性, 解可以写成期望。

例 34.17 (固定政策下的价值). 在消费储蓄问题中, 若固定政策 $c(a)$, 则价值 $v_c(a)$ 满足线性方程:

$$\rho v_c(a) = u(c(a)) + (ra + y - c(a))v'_c(a) + \frac{1}{2}\sigma^2 v''_c(a).$$

只有当对所有 c 最大化时, 才得到非线性 HJB。

例 34.18 (政策迭代的直觉). 数值求解 HJB 常在两步之间交替: 固定政策时解线性 PDE, 改进政策时逐点最大化 Hamiltonian。这个循环就是“Feynman-Kac/线性评价”和“HJB/最大化”之间的计算对应。

34.9 本章小结

随机控制把控制变量放入 Itô 状态方程。生成元把漂移和扩散转化为价值函数上的一阶和二阶导数。HJB 方程是随机动态规划的局部形式，验证定理说明平滑解和达到最大值的政策如何被确认为真正最优。Feynman-Kac 公式则把线性 PDE 表示成贴现期望，是资产定价和固定政策评价的桥梁。下一章将系统进入无套利、鞅测度和金融基本定理。

34.10 Exercises

习题 34.1. 定义受控扩散。

习题 34.2. 说明 admissible control 为什么必须适应当前过滤。

习题 34.3. 写出受控扩散的生成元。

习题 34.4. 对 $dX_t = (aX_t + u_t)dt + \sigma dW_t$ ，写出 $\mathcal{A}^u v$ 。

习题 34.5. 推导受控扩散生成元公式。

习题 34.6. 定义有限期随机控制价值函数。

习题 34.7. 写出有限期 HJB 和终端条件。

习题 34.8. 从短时间 Bellman 原理推导有限期 HJB。

习题 34.9. 说明随机积分项在 HJB 推导中为什么消失。

习题 34.10. 写出无限期平稳 HJB。

习题 34.11. 对随机消费储蓄问题写出 HJB。

习题 34.12. 由消费储蓄 HJB 推导消费一阶条件。

习题 34.13. 解释 HJB 中 v_{xx} 的经济含义。

习题 34.14. 证明确定性 HJB 是随机 HJB 的零波动特例。

习题 34.15. 陈述平滑版本的 HJB 验证定理。

习题 34.16. 说明验证定理中横截条件的作用。

习题 34.17. 解释为什么只满足一阶条件不一定最优。

- 习题 34.18. 写出 Feynman-Kac 公式的基本 PDE。
- 习题 34.19. 写出 Feynman-Kac 的期望表示。
- 习题 34.20. 当 $g = 0$ 、 $q = r$ 常数时, Feynman-Kac 如何简化?
- 习题 34.21. 解释 Feynman-Kac 和固定政策评价的关系。
- 习题 34.22. 写出风险中性股票动态。
- 习题 34.23. 推导风险中性定价 PDE。
- 习题 34.24. 写出欧式看涨期权的终端条件。
- 习题 34.25. 证明零息债券价格 $e^{-r(T-t)}$ 满足定价 PDE。
- 习题 34.26. 比较线性定价 PDE 和非线性 HJB。
- 习题 34.27. 说明政策迭代为什么包含线性评价和逐点最大化。
- 习题 34.28. 在 $dX_t = u_t dt + \sigma dW_t$ 、收益 $-u^2/2$ 的问题中求最优 u 的一阶条件。
- 习题 34.29. 若控制影响波动, 说明 HJB 中最大化项如何改变。
- 习题 34.30. 解释 Feynman-Kac 中折现率 $q(x)$ 的作用。
- 习题 34.31. 说明终端条件和边界条件在随机控制中的作用。
- 习题 34.32. 给出一个退出时间 τ 可能出现的经济场景。
- 习题 34.33. 解释为什么本章暂不需要完整 viscosity solution 理论。
- 习题 34.34. 说明 HJB-KF 系统中 HJB 和 KF 分别负责什么。
- 习题 34.35. 列出 Ch33 对 Ch35 和 Ch36 的两个直接准备作用。

34.11 Solutions

本章解答的主线是: Itô 引理给出生成元, 短时间 Bellman 原理给出 HJB, 验证定理确认候选最优, Feynman-Kac 把线性 PDE 变成贴现期望。

解答 34.1. 受控扩散是状态过程

$$dX_t = b(X_t, u_t)dt + \sigma(X_t, u_t)dW_t.$$

其中 u_t 是控制, 可能影响漂移、波动或二者。

解答 34.2. 控制必须适应当前过滤，是因为决策者只能使用当前已经观察到的信息。若控制依赖未来 Brownian 增量，就相当于预知未来冲击，会破坏经济问题和金融问题的可行性。

解答 34.3. 对固定控制 u ，生成元为

$$\mathcal{A}^u v(x) = b(x, u)v_x(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x, u)v_{xx}(x).$$

解答 34.4. 这里

$$b(x, u) = ax + u, \quad \sigma(x, u) = \sigma.$$

所以

$$\mathcal{A}^u v(x) = (ax + u)v_x(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 v_{xx}(x).$$

解答 34.5. 对 $v(X_t)$ 应用 Itô 引理：

$$dv = v_x dX_t + \frac{1}{2}v_{xx}(dX_t)^2.$$

代入

$$dX_t = b(X_t, u_t)dt + \sigma(X_t, u_t)dW_t$$

和

$$(dX_t)^2 = \sigma^2(X_t, u_t)dt,$$

得到

$$dv = \mathcal{A}^{u_t} v(X_t)dt + \sigma(X_t, u_t)v_x(X_t)dW_t.$$

解答 34.6. 有限期价值函数为

$$V(t, x) = \sup_u \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^T e^{-\rho(s-t)} r(X_s, u_s) ds + e^{-\rho(T-t)} \Phi(X_T) \right].$$

解答 34.7. 有限期 HJB 为

$$0 = V_t + \sup_u \{r(x, u) + \mathcal{A}^u V - \rho V\},$$

终端条件为

$$V(T, x) = \Phi(x).$$

解答 34.8. 短时间 Bellman 原理写作

$$V(t, x) = \sup_u \mathbb{E}[r(x, u)\Delta t + e^{-\rho\Delta t}V(t + \Delta t, X_{t+\Delta t})] + o(\Delta t).$$

Itô 展开给出

$$\mathbb{E}[\Delta V] = (V_t + \mathcal{A}^u V)\Delta t + o(\Delta t).$$

再用 $e^{-\rho\Delta t} = 1 - \rho\Delta t + o(\Delta t)$ ，减去 V 、除以 Δt 、令 $\Delta t \rightarrow 0$ ，得到 HJB。

解答 34.9. Itô 展开中的随机积分项形如

$$\sigma V_x dW_t.$$

在短时间条件期望下，它的均值为零，所以 HJB 的漂移方程只保留 $V_t + \mathcal{A}^u V$ 。

解答 34.10. 无限期平稳 HJB 为

$$\rho v(x) = \sup_u \{r(x, u) + \mathcal{A}^u v(x)\}.$$

它没有 V_t ，因为环境和价值函数不显含日历时间。

解答 34.11. 若

$$dA_t = (rA_t + y - c_t)dt + \sigma dW_t,$$

则

$$\rho v(a) = \max_c \left\{ u(c) + v_a(a)(ra + y - c) + \frac{1}{2}\sigma^2 v_{aa}(a) \right\}.$$

解答 34.12. 对右侧关于 c 求导：

$$u'(c) - v_a(a) = 0.$$

因此

$$u'(c) = v_a(a).$$

解答 34.13. v_{xx} 描述价值函数对状态的曲率。若价值函数凹，随机波动通常降低期望价值；若凸，随机波动可能提高期望价值。它衡量风险或扩散对价值的二阶影响。

解答 34.14. 随机 HJB 为

$$\rho v = \sup_u \left\{ r + bv_x + \frac{1}{2}\sigma^2 v_{xx} \right\}.$$

令 $\sigma = 0$ ，二阶项消失，得到

$$\rho v = \sup_u \{r + bv_x\},$$

这就是确定性 HJB。

解答 34.15. 若光滑函数 v 满足 HJB

$$\rho v = \sup_u \{r + \mathcal{A}^u v\},$$

且某政策 u^* 达到最大值，并满足可行性和横截条件，则 v 是价值函数， u^* 是最优政策。

解答 34.16. 横截条件控制无穷远处的边界项。验证定理对 $e^{-\rho t}v(X_t)$ 积分后会出现终端期望项，横截条件保证它不会留下额外价值或泡沫项。

解答 34.17. 一阶条件只说明局部最大化或驻点。候选政策还可能违反边界条件、横截条件或全局最大化。验证定理把这些检查合在一起，确认候选真正最优。

解答 34.18. Feynman-Kac 对应的基本 PDE 是

$$V_t + \mathcal{A}V - q(x)V + g(x) = 0, \quad V(T, x) = \Phi(x).$$

解答 34.19. 期望表示为

$$V(t, x) = \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^T e^{-\int_t^s q(X_\tau) d\tau} g(X_s) ds + e^{-\int_t^T q(X_\tau) d\tau} \Phi(X_T) \right].$$

解答 34.20. 若 $g = 0$ 、 $q = r$ 常数，则

$$V(t, x) = \mathbb{E}_{t,x} [e^{-r(T-t)} \Phi(X_T)].$$

解答 34.21. 固定政策后没有最大化，价值函数满足线性 PDE。Feynman-Kac 把这个线性 PDE 的解写成沿固定状态过程的贴现收益期望。

解答 34.22. 风险中性股票动态为

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q.$$

漂移是无风险利率 r ，随机项由风险中性 Brownian motion 驱动。

解答 34.23. 风险中性价格为

$$V(t, S) = \mathbb{E}^Q [e^{-r(T-t)} \Phi(S_T) \mid S_t = S].$$

生成元为

$$\mathcal{A}V = rSV_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS}.$$

代入 $V_t + \mathcal{A}V - rV = 0$ ，得

$$V_t + rSV_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} - rV = 0.$$

解答 34.24. 欧式看涨期权终端条件为

$$V(T, S) = \max\{S - K, 0\}.$$

解答 34.25. 令

$$V(t) = e^{-r(T-t)}.$$

则

$$V_t = re^{-r(T-t)} = rV.$$

所以

$$V_t - rV = 0,$$

且 $V(T) = 1$ 。

解答 34.26. 线性定价 PDE 没有最大化，通常对应固定风险中性动态下的贴现期望。HJB 含有对控制的最大化，通常非线性，对应主体主动选择政策。

解答 34.27. 固定政策时，HJB 变成线性 PDE，可做政策评价。得到价值函数后，逐点最大化右侧更新政策。不断交替就是政策迭代。

解答 34.28. HJB 中最大化项为

$$\max_u \left\{ -\frac{1}{2}u^2 + uV_x + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx} \right\}.$$

一阶条件为

$$-u + V_x = 0,$$

所以

$$u^* = V_x.$$

解答 34.29. 若控制影响波动，HJB 中会出现

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x, u)v_{xx}(x).$$

因此控制的最优选择不仅取决于边际价值 v_x ，也取决于曲率 v_{xx} 。

解答 34.30. $q(x)$ 是状态依赖贴现率或 killing rate。它让未来支付按路径上的累计贴现

$$e^{-\int_t^s q(X_\tau) d\tau}$$

折算回当前。

解答 34.31. 终端条件规定最后支付或最后价值。边界条件规定状态到达约束边界、违约边界或退出边界时的价值。它们共同锚定 PDE 解。

解答 34.32. 企业价值模型中，当现金储备跌到零时可能退出，退出时间可写为

$$\tau = \inf\{t : X_t \leq 0\}.$$

在 τ 处需要指定清算价值或违约支付。

解答 34.33. 本章只需要让读者读懂和使用平滑 HJB、验证定理和 Feynman-Kac。完整 viscosity solution 理论用于处理不光滑价值函数和一般存在唯一性问题，超出本书初版主线。

解答 34.34. HJB 决定个体在给定价格和分布下的最优价值与政策。KF 方程决定个体状态分布在这些政策下如何随时间演化。

解答 34.35. 对 Ch35，本章提供 Feynman-Kac 和定价 PDE。对 Ch36，本章提供随机 HJB 和验证定理，用于求解 Merton 消费-投资问题。

34.12 Computation Lab

本章计算实验围绕一个主题：同一个连续时间随机模型，可以从 HJB/PDE 角度求解，也可以从模拟期望角度验证。

1. 生成元离散化。对

$$\mathcal{A}v = b(x)v_x + \frac{1}{2}\sigma^2(x)v_{xx}$$

在一维网格上用上风差分近似 v_x ，用中心差分近似 v_{xx} ，观察漂移项和扩散项对矩阵的影响。

2. 固定政策评价。固定消费政策 $c(a)$ ，求解线性方程

$$\rho v = u(c) + (ra + y - c)v_a + \frac{1}{2}\sigma^2 v_{aa}.$$

然后用一阶条件更新 $c(a)$ 。

3. 简单 HJB 政策迭代。对

$$\rho v(a) = \max_c \{u(c) + v_a(ra + y - c) + \frac{1}{2}\sigma^2 v_{aa}\}$$

在网格上交替进行政策评价和政策改进。

4. Feynman-Kac Monte Carlo。设

$$dX_t = \sigma dW_t, \quad \Phi(x) = x^2.$$

用模拟估计

$$\mathbb{E}[e^{-rT} X_T^2 \mid X_0 = x],$$

并与 PDE 解的数值近似比较。

5. 风险中性定价。模拟

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q$$

下的欧式看涨期权贴现支付，和 Black-Scholes PDE 网格解做对照。

第三十五章 无套利、鞅测度与金融基本定理

35.1 无套利思想

资产定价的核心不是先问投资者喜欢什么，而是先问价格是否允许免费赚钱。若存在一个交易组合，不需要初始成本，却在未来所有状态都不亏、某些状态严格赚钱，这就是套利。无套利排除了这种价格错误。

定义 35.1 (一时期套利). 设当前价格向量为 $p \in \mathbb{R}^n$ ，未来状态支付矩阵为 $X \in \mathbb{R}^{S \times n}$ ，组合 $\theta \in \mathbb{R}^n$ 的成本为 $p \cdot \theta$ ，状态 s 下支付为 $(X\theta)_s$ 。若

$$p \cdot \theta \leq 0, \quad X\theta \geq 0,$$

且至少一个不等式严格，则称 θ 是套利组合。

例 35.1 (免费午餐). 若某资产价格为 0，未来两个状态支付分别为 1 和 2，买入一单位的成本为零，未来总为正。这是套利。

例 35.2 (负价格资产). 若某资产今天价格为 -1 ，未来所有状态支付为 0，买入它今天还收到 1，未来没有义务支付，也是套利。

命题 35.1 (无套利下的一价定律). 若市场无套利，且两个组合 θ 和 η 在所有状态下支付相同：

$$X\theta = X\eta,$$

则它们当前成本相同：

$$p \cdot \theta = p \cdot \eta.$$

证明. 若 $p \cdot \theta < p \cdot \eta$ ，卖出 η 、买入 θ 。初始净收入为

$$p \cdot \eta - p \cdot \theta > 0,$$

未来支付为

$$X\theta - X\eta = 0.$$

这构成套利。若反向价格不等,同理卖出较贵组合、买入较便宜组合。因此价格必须相同。□

例 35.3 (冗余资产价格). 若资产 3 的支付等于资产 1 和资产 2 支付之和:

$$X_3 = X_1 + X_2,$$

则无套利要求

$$p_3 = p_1 + p_2.$$

否则可以买便宜的一边、卖贵的一边。

35.2 状态价格

状态价格 q_s 是今天购买一单位只在状态 s 支付的 Arrow 证券所需价格。若所有状态价格为正,则任意资产价格都应等于状态价格加权支付:

$$p_j = \sum_{s=1}^S q_s X_{sj}.$$

矩阵写作

$$p = X^\top q.$$

定义 35.2 (状态价格向量). 若存在 $q \in \mathbb{R}_{++}^S$, 使得

$$p = X^\top q,$$

则 q 称为正状态价格向量。

命题 35.2 (有限状态状态价格定理). 在有限状态一时期模型中, 若存在正状态价格向量 $q \gg 0$ 满足

$$p = X^\top q,$$

则市场无套利。反过来, 在标准有限维分离条件下, 无套利蕴含存在这样的正状态价格向量。

证明. 先证充分性。若存在套利 θ , 则 $p \cdot \theta \leq 0$ 、 $X\theta \geq 0$, 且至少一个严格。由 $p = X^\top q$,

$$p \cdot \theta = q \cdot X\theta.$$

由于 $q \gg 0$ 且 $X\theta \geq 0$, 若未来某状态严格为正, 则右侧严格为正, 矛盾。若未来支付全为零而初始成本严格为负, 也与 $p \cdot \theta = q \cdot X\theta = 0$ 矛盾。

反方向是有限维分离定理的应用: 若不存在正定价泛函, 则可把可达支付锥与非负正锥分离, 得到一个非正成本、非负支付且某处严格改善的组合, 即套利。□

例 35.4 (两状态债券和股票). 无风险债券价格为 p_B , 未来支付为 $(1, 1)$ 。股票价格为 p_S , 未来支付为 (u, d) 。状态价格 q_u, q_d 满足

$$p_B = q_u + q_d, \quad p_S = q_u u + q_d d.$$

若解满足 $q_u, q_d > 0$, 则无套利。

例 35.5 (状态价格为负的警报). 若计算出的某个 $q_s < 0$, 表示市场愿意以负价格卖给你某个状态的正支付。这通常暗示可以组合资产构造套利。

35.3 风险中性概率

若存在无风险债券, 价格为

$$p_B = \frac{1}{R^f},$$

未来所有状态支付为 1。状态价格总和满足

$$\sum_s q_s = \frac{1}{R^f}.$$

定义

$$Q_s = R^f q_s.$$

则 $Q_s > 0$, 且 $\sum_s Q_s = 1$ 。这就是风险中性概率。

命题 35.3 (状态价格与风险中性概率). 若无风险收益率为 R^f , 且 $q \gg 0$ 是状态价格, 则

$$Q_s = R^f q_s$$

定义一个概率分布, 并且任意资产满足

$$p_j = \frac{1}{R^f} \mathbb{E}^Q[X_j].$$

证明. 债券支付恒为 1, 所以

$$\frac{1}{R^f} = p_B = \sum_s q_s.$$

因此

$$\sum_s Q_s = R^f \sum_s q_s = 1.$$

又 $q_s > 0$, 所以 $Q_s > 0$ 。资产价格满足

$$p_j = \sum_s q_s X_{sj} = \frac{1}{R^f} \sum_s Q_s X_{sj} = \frac{1}{R^f} \mathbb{E}^Q[X_j].$$

□

例 35.6 (二叉树风险中性概率). 股票现价 S_0 , 未来价格 uS_0 或 dS_0 , 无风险收益率 R 。风险中性概率 Q_u 满足

$$S_0 = \frac{1}{R} [Q_u uS_0 + (1 - Q_u) dS_0].$$

解得

$$Q_u = \frac{R - d}{u - d}.$$

无套利要求

$$d < R < u,$$

这样 $Q_u \in (0, 1)$ 。

例 35.7 (期权的一期价格). 若看涨期权支付为

$$C_u = \max\{uS_0 - K, 0\}, \quad C_d = \max\{dS_0 - K, 0\},$$

则价格为

$$C_0 = \frac{1}{R} [Q_u C_u + (1 - Q_u) C_d].$$

35.4 随机贴现因子

状态价格也可以写成真实概率 P_s 下的随机贴现因子 M_s :

$$q_s = P_s M_s.$$

于是

$$p_j = \sum_s P_s M_s X_{sj} = \mathbb{E}^P[MX_j].$$

定义 35.3 (随机贴现因子). 若正随机变量 $M > 0$ 满足所有资产价格

$$p_j = \mathbb{E}[MX_j],$$

则称 M 为随机贴现因子。

例 35.8 (SDF 与风险中性概率). 若 $q_s = P_s M_s$ 且 $Q_s = R^f q_s$, 则

$$M_s = \frac{1}{R^f} \frac{Q_s}{P_s}.$$

SDF 把真实概率下的期望变成风险中性贴现期望。

例 35.9 (风险溢价协方差). 由

$$p = \mathbb{E}[MX]$$

和 $R = X/p$, 可得

$$1 = \mathbb{E}[MR].$$

若无风险收益为 $R^f = 1/\mathbb{E}[M]$, 则风险溢价与 M 和收益的协方差有关。高收益若出现在低边际价值状态, 资产需要更高期望收益补偿。

35.5 多期贴现鞅定价

在多期模型中, 使用货币市场账户 B_t 贴现:

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t}.$$

若存在等价概率测度 Q , 使所有贴现可交易资产价格都是 Q -鞅:

$$\tilde{S}_t = \mathbb{E}^Q[\tilde{S}_{t+1} | \mathcal{F}_t],$$

则 Q 称为等价鞅测度。

定义 35.4 (等价鞅测度). 概率测度 Q 与真实测度 P 等价, 若二者有相同的零概率事件。若在 Q 下所有贴现资产价格过程都是鞅, 则称 Q 为等价鞅测度。

命题 35.4 (贴现鞅定价). 若 Q 是等价鞅测度, 且支付 X_T 可由自融资策略复制, 则其无套利价格为

$$\pi_t = B_t \mathbb{E}^Q \left[\frac{X_T}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right].$$

证明. 设复制组合财富为 V_t , 终端满足 $V_T = X_T$ 。自融资和贴现资产为 Q -鞅蕴含贴现财富

$$\tilde{V}_t = \frac{V_t}{B_t}$$

也是 Q -鞅。因此

$$\frac{V_t}{B_t} = \mathbb{E}^Q \left[\frac{V_T}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}^Q \left[\frac{X_T}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right].$$

两边乘以 B_t 即得价格公式。 □

例 35.10 (两期零息债券). 若 $X_T = 1$, 且 B_T/B_t 确定, 则

$$\pi_t = B_t \mathbb{E}^Q[1/B_T \mid \mathcal{F}_t] = \frac{B_t}{B_T}.$$

这就是无风险贴现价格。

例 35.11 (贴现股票鞅). 若

$$\tilde{S}_t = \mathbb{E}^Q[\tilde{S}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t],$$

则今天贴现价格等于明天贴现价格的风险中性条件期望。资产风险已通过测度 Q 调整, 而不是通过额外风险溢价出现在漂移里。

35.6 完备性和唯一鞅测度

市场完备意味着每个状态依赖支付都能由资产组合复制。在一时期有限状态模型中, 这等价于支付矩阵 X 的列空间覆盖 $\mathbb{R}^S$ 。

定义 35.5 (市场完备). 若每个状态支付向量 $Y \in \mathbb{R}^S$ 都存在组合 θ , 使得

$$X\theta = Y,$$

则称市场完备。

命题 35.5 (完备性与唯一风险中性测度). 在一时期有限状态无套利模型中, 若市场完备, 则状态价格向量唯一, 因此风险中性概率唯一。反过来, 若可达支付空间不是整个 $\mathbb{R}^S$, 则通常存在多个与已交易资产价格一致的状态价格向量。

证明. 若市场完备, 任意 Arrow 支付 e_s 都可复制。由一价定律, 每个 e_s 的价格唯一, 因此每个状态价格 q_s 唯一。风险中性概率 $Q_s = R^f q_s$, 故也唯一。

若市场不完备, 则存在不可复制方向。资产价格只限制 q 在可达支付空间上的作用, 无法唯一确定其在不可复制方向上的取值, 因此可能有多个正状态价格向量。□

例 35.12 (二叉树完备). 一只股票和一只债券、两个未来状态。若股票上/下状态支付不同, 债券支付相同, 则两个资产张成 $\mathbb{R}^2$ 。市场完备, 任意两状态支付都可复制。

例 35.13 (三状态一股票不完备). 若只有一只债券和一只股票, 但未来有三个状态, 则最多只能张成二维支付空间。一般三状态支付不能完全复制, 风险中性概率不唯一。

35.7 连续时间接口

连续时间中，货币市场账户满足

$$dB_t = r_t B_t dt.$$

风险资产价格若满足

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^P,$$

则贴现价格为 $\tilde{S}_t = S_t/B_t$ 。若能找到等价测度 Q ，使

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^Q,$$

则

$$d\tilde{S}_t = \sigma_t \tilde{S}_t dW_t^Q,$$

贴现价格是 Q -局部鞅。

例 35.14 (风险中性漂移替换). 在真实测度下股票漂移为 μ ，风险中性测度下漂移变为 r 。风险补偿不消失，而是进入测度变化中。

例 35.15 (连续时间期权价格). 若欧式支付为 $\Phi(S_T)$ ，则无套利价格为

$$V(t, S) = \mathbb{E}^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \Phi(S_T) \mid S_t = S \right].$$

Ch35 将把这个期望和 Black-Scholes PDE 具体求出来。

35.8 Girsanov 入口：市场风险价格

设真实测度下

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^P.$$

定义市场风险价格

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}.$$

形式上令

$$dW_t^Q = dW_t^P + \lambda dt.$$

则

$$dW_t^P = dW_t^Q - \lambda dt.$$

代入股票动态：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t (dW_t^Q - \lambda dt) = [\mu - \sigma \lambda] S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q.$$

由 $\lambda = (\mu - r)/\sigma$ ，漂移变为 $r S_t dt$ 。

命题 35.6 (Brownian 漂移变换的应用计算). 若

$$dW_t^Q = dW_t^P + \lambda dt$$

在合适的测度变换下成为 Q -Brownian motion, 且

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma},$$

则股票动态

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^P$$

可写为

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q.$$

证明. 由

$$dW_t^P = dW_t^Q - \lambda dt,$$

代入真实测度动态:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t (dW_t^Q - \lambda dt) = (\mu - \sigma \lambda) S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q.$$

使用 $\lambda = (\mu - r)/\sigma$, 得

$$\mu - \sigma \lambda = \mu - (\mu - r) = r.$$

因此风险中性动态成立。 □

例 35.16 (市场风险价格为零). 若 $\mu = r$, 则 $\lambda = 0$. 真实测度下股票已经以无风险利率为漂移, 风险中性测度和真实测度在 Brownian 漂移上没有差异。

例 35.17 (高风险溢价的测度变化). 若 $\mu - r$ 很大而 σ 固定, 则 λ 很大. 风险中性测度需要显著改变 Brownian 漂移, 才能把股票预期收益从 μ 调整到 r 。

35.9 金融基本定理的入口版

金融基本定理的粗略口径是:

$$\text{无套利} \iff \text{存在等价鞅测度}.$$

市场完备时, 等价鞅测度唯一; 不完备时, 可能存在多个等价鞅测度, 未复制支付的价格会落在一个区间或需要额外偏好/均衡条件决定。

定理 35.1 (金融基本定理：入口版). 在有限状态离散时间模型中，无套利等价于存在等价鞅测度 Q ，使所有贴现资产价格都是 Q -鞅。若市场完备，则该等价鞅测度唯一。连续时间中，在适当技术条件下也有相应命题，但完整表述需要更强的无免费午餐条件和半鞅理论。

证明. 有限状态一时期情形由正状态价格定理和状态价格到风险中性概率的转换得到。多期有限状态情形可在每个节点局部应用同样论证，并用条件概率拼接出等价鞅测度。若贴现价格在 Q 下为鞅，则任意零成本自融资策略的贴现财富也是鞅，不能从零成本产生非负且有正概率为正的终端财富。反过来，无套利给出各节点的正状态价格，从而构造 Q 。完备性与唯一性由可复制 Arrow 支付和一价定律给出。□

例 35.18 (不完备市场中的价格区间). 三状态一股票模型中，某个数字期权支付可能无法复制。多个风险中性概率都能定价已交易资产，但给该数字期权不同期望。因此无套利只能给出价格区间。

例 35.19 (BS 基准模型). Black-Scholes 模型中，一只股票和一只债券对应一个 Brownian 风险源。在理想条件下，市场完备，风险中性测度唯一，期权价格唯一。若有两个独立风险源但只有一只股票，市场通常不完备。

35.10 本章小结

无套利把资产定价从偏好问题转化为线性定价和鞅问题。有限状态中，正状态价格、随机贴现因子和风险中性概率是同一对象的不同写法。多期中，风险中性测度使贴现资产价格成为鞅，可复制支付按贴现条件期望定价。连续时间中，Girsanov 变换把真实漂移调整为风险中性漂移，市场风险价格衡量这种调整。下一章将把这些工具用于 Black-Scholes、债券和衍生品定价。

35.11 Exercises

习题 35.1. 定义一时期套利。

习题 35.2. 证明无套利蕴含一价定律。

习题 35.3. 给出一个零成本正支付套利例子。

习题 35.4. 定义状态价格向量。

习题 35.5. 说明正状态价格为何排除套利。

习题 35.6. 在两状态模型中写出债券和股票对应的状态价格方程。

习题 35.7. 从状态价格构造风险中性概率。

习题 35.8. 推导二叉树风险中性概率 $Q_u = (R - d)/(u - d)$ 。

习题 35.9. 说明二叉树无套利条件 $d < R < u$ 。

习题 35.10. 定义随机贴现因子。

习题 35.11. 证明 $p = \mathbb{E}[MX]$ 与状态价格 $q_s = P_s M_s$ 等价。

习题 35.12. 写出 SDF 与风险中性概率的关系。

习题 35.13. 定义贴现价格过程。

习题 35.14. 定义等价鞅测度。

习题 35.15. 证明若 Q 是等价鞅测度, 则可复制支付价格为风险中性贴现期望。

习题 35.16. 说明自融资策略为什么使贴现财富成为贴现资产的积分。

习题 35.17. 定义市场完备。

习题 35.18. 证明有限状态完备市场中状态价格唯一。

习题 35.19. 解释不完备市场中风险中性测度为何可能不唯一。

习题 35.20. 在二叉树模型中说明为什么市场完备。

习题 35.21. 在三状态一股票模型中说明为什么市场通常不完备。

习题 35.22. 写出连续时间货币市场账户动态。

习题 35.23. 若风险中性动态为 $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q$, 证明贴现价格漂移为零。

习题 35.24. 写出连续时间欧式支付的风险中性定价公式。

习题 35.25. 定义市场风险价格 λ 。

习题 35.26. 用 $dW_t^Q = dW_t^P + \lambda dt$ 推导风险中性漂移。

习题 35.27. 解释 Girsanov 变换在本章中的经济作用。

习题 35.28. 陈述金融基本定理的入口版。

习题 35.29. 说明无套利和等价鞅测度之间的关系。

习题 35.30. 说明完备性和唯一等价鞅测度之间的关系。

习题 35.31. 解释为什么完整连续时间 FTAP 需要更强技术条件。

习题 35.32. 给出一个不完备市场中未复制支付价格不唯一的直观例子。

习题 35.33. 说明 Black-Scholes 模型为什么常被看作完备市场基准。

习题 35.34. 比较真实概率 P 和风险中性概率 Q 。

习题 35.35. 列出状态价格、SDF、风险中性概率和等价鞅测度之间的对应关系。

35.12 Solutions

本章解答的主线是：无套利给出正线性定价泛函；有债券时这个泛函可归一化为风险中性概率；多期中风险中性概率让贴现价格成为鞅；完备性决定这个测度是否唯一。

解答 35.1. 一时期套利是组合 θ 满足

$$p \cdot \theta \leq 0, \quad X\theta \geq 0,$$

并且至少一个不等式严格。它表示初始不花钱或还收钱，未来不亏且某处赚钱。

解答 35.2. 若两个组合未来支付相同但价格不同，卖出贵的、买入便宜的，未来支付抵消，今天获得正收入。这是套利。因此无套利要求相同支付有相同价格。

解答 35.3. 若某资产今天价格为 0，未来所有状态支付为 1，买入一单位成本为零，未来每个状态都得到 1。这是零成本正支付套利。

解答 35.4. 状态价格向量 $q \gg 0$ 满足

$$p = X^\top q.$$

其中 q_s 是今天购买状态 s 下 1 单位支付的价格。

解答 35.5. 若 $q \gg 0$ 且 $p = X^\top q$ ，则任意组合成本

$$p \cdot \theta = q \cdot X\theta.$$

若 $X\theta \geq 0$ 且某处严格为正，则右侧严格为正，不能有非正成本。因此套利被排除。

解答 35.6. 债券未来支付为 $(1, 1)$ ，股票未来支付为 (u, d) 。状态价格 q_u, q_d 满足

$$p_B = q_u + q_d, \quad p_S = q_u u + q_d d.$$

解答 35.7. 若无风险收益率为 R^f , 定义

$$Q_s = R^f q_s.$$

由于债券价格满足 $\sum_s q_s = 1/R^f$, 所以 $\sum_s Q_s = 1$, 且 $Q_s > 0$ 。

解答 35.8. 股票价格满足

$$S_0 = \frac{1}{R} [Q_u u S_0 + (1 - Q_u) d S_0].$$

两边乘以 R/S_0 :

$$R = Q_u u + (1 - Q_u) d = d + Q_u (u - d).$$

所以

$$Q_u = \frac{R - d}{u - d}.$$

解答 35.9. 无套利要求 $Q_u \in (0, 1)$ 。若 $u > d$, 这等价于

$$R - d > 0, \quad R - d < u - d,$$

即

$$d < R < u.$$

解答 35.10. 随机贴现因子是正随机变量 M , 使资产价格满足

$$p_j = \mathbb{E}[M X_j].$$

它把未来随机支付按状态和边际价值折现回当前。

解答 35.11. 若状态概率为 P_s , 令

$$q_s = P_s M_s.$$

则

$$\mathbb{E}[M X_j] = \sum_s P_s M_s X_{sj} = \sum_s q_s X_{sj} = p_j.$$

反向地, 只要 $P_s > 0$, 可由 $M_s = q_s/P_s$ 得到 SDF。

解答 35.12. 由

$$Q_s = R^f q_s = R^f P_s M_s$$

得

$$M_s = \frac{1}{R^f} \frac{Q_s}{P_s}.$$

解答 35.13. 贴现价格过程为

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t},$$

其中 B_t 是货币市场账户或 numeraire。

解答 35.14. 等价鞅测度 Q 与真实测度 P 有相同零概率事件，并使所有贴现资产价格在 Q 下成为鞅：

$$\tilde{S}_t = \mathbb{E}^Q[\tilde{S}_{t+1} | \mathcal{F}_t].$$

解答 35.15. 若 $V_T = X_T$ 可复制，自融资使贴现财富 $\tilde{V}_t = V_t/B_t$ 为 Q -鞅。因此

$$\frac{V_t}{B_t} = \mathbb{E}^Q \left[\frac{V_T}{B_T} | \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}^Q \left[\frac{X_T}{B_T} | \mathcal{F}_t \right].$$

乘以 B_t 得价格公式。

解答 35.16. 自融资表示财富变化只来自已有资产价格变化，而不是外部注入或抽取资金。因此贴现财富变化可写成交易策略对贴现资产价格变化的积分。

解答 35.17. 市场完备是指任意状态支付 $Y \in \mathbb{R}^S$ 都可由某组合复制：

$$X\theta = Y.$$

解答 35.18. 若市场完备，每个 Arrow 支付 e_s 都可复制。由一价定律， e_s 的价格唯一，所以所有 q_s 唯一。状态价格向量因此唯一。

解答 35.19. 不完备时，可达支付空间小于整个状态空间。价格只限制状态价格在可达支付上的作用，未被交易资产识别的方向可以变化，因此可能有多个风险中性测度。

解答 35.20. 二叉树有两个未来状态，债券支付 $(1, 1)$ ，股票支付 (u, d) 。若 $u \neq d$ ，这两个向量线性独立，张成 $\mathbb{R}^2$ ，所以任意两状态支付都可复制。

解答 35.21. 三状态中，债券和一只股票最多提供两个线性独立支付向量，不能张成 $\mathbb{R}^3$ 。因此一般三状态支付无法复制。

解答 35.22. 连续时间货币市场账户满足

$$dB_t = r_t B_t dt.$$

若 $r_t = r$ 常数，则 $B_t = B_0 e^{rt}$ 。

解答 35.23. 贴现价格 $\tilde{S}_t = S_t/B_t$ 。若

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q, \quad dB_t = rB_t dt,$$

则 Itô 商法则给出

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t dW_t^Q,$$

没有漂移项。

解答 35.24. 欧式支付 $\Phi(S_T)$ 的风险中性价格为

$$V(t, S) = \mathbb{E}^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \Phi(S_T) \mid S_t = S \right].$$

解答 35.25. 市场风险价格定义为

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}.$$

它是每单位波动所要求的超额收益。

解答 35.26. 由

$$dW_t^Q = dW_t^P + \lambda dt$$

得

$$dW_t^P = dW_t^Q - \lambda dt.$$

代入

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^P$$

得到

$$dS_t = (\mu - \sigma\lambda) S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q.$$

若 $\lambda = (\mu - r)/\sigma$ ，漂移为 $rS_t dt$ 。

解答 35.27. Girsanov 变换把真实测度下的风险补偿转移到概率测度变化中。在新测度下，资产漂移变为无风险利率，贴现价格成为鞅，定价可写为风险中性期望。

解答 35.28. 入口版金融基本定理：在有限状态离散时间模型中，无套利等价于存在等价鞅测度；若市场完备，则等价鞅测度唯一。

解答 35.29. 无套利保证存在正线性定价泛函。归一化后得到风险中性概率或等价鞅测度。在这个测度下，贴现资产价格没有可预测漂移，成为鞅。

解答 35.30. 完备性意味着每个状态支付都可复制，因此每个 Arrow 价格由一价定律唯一确定。风险中性测度由状态价格归一化而来，所以也唯一。

解答 35.31. 连续时间中交易可以高频进行，价格过程路径复杂。排除套利需要比简单“无套利”更强的无免费午餐条件；一般表述还依赖半鞅积分和局部鞅理论。

解答 35.32. 三状态一股票模型中，数字支付 $Y = (1, 0, 0)$ 可能无法复制。多个风险中性概率都能匹配债券和股票价格，但对 Y 给出不同期望，因此价格不唯一。

解答 35.33. Black-Scholes 中一个 Brownian 风险源由一只风险资产和债券动态交易复制。在理想条件下，所有欧式支付都可通过动态交易复制，因此是完备市场基准。

解答 35.34. 真实概率 P 描述实际事件频率和风险溢价。风险中性概率 Q 是定价用测度，在它下面贴现资产价格是鞅。二者通常不同。

解答 35.35. 状态价格 q_s 给每个状态的当前价格；SDF 满足 $q_s = P_s M_s$ ；风险中性概率满足 $Q_s = R^f q_s$ ；多期中这些对象对应等价鞅测度，使贴现价格成为鞅。

35.13 Computation Lab

本章计算实验的目标是把“无套利是否成立”转化为线性代数和线性规划问题。

1. 状态价格求解。给定支付矩阵 X 和价格 p ，求解

$$X^\top q = p.$$

检查是否存在 $q \gg 0$ 。若存在，计算风险中性概率。

2. 二叉树定价。给定 S_0, u, d, R, K ，计算

$$Q_u = \frac{R - d}{u - d}$$

和一期看涨期权价格。

3. 套利线性规划。搜索组合 θ ，使

$$p \cdot \theta \leq 0, \quad X\theta \geq 0,$$

并最大化某个正支付总和。若最优值为正，则存在套利。

4. 不完备市场价格区间。三状态两资产模型中，枚举满足 $X^\top q = p$ 、 $q > 0$ 的状态价格，计算未复制支付 Y 的价格区间

$$\{q \cdot Y : q > 0, X^\top q = p\}.$$

5. 风险中性漂移模拟。对

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^P$$

和

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q$$

分别模拟路径，比较真实均值和风险中性贴现均值。

第三十六章 Black-Scholes、债券与衍生品定价

36.1 从鞅测度到定价模型

上一章给出的核心公式是：若 Q 是等价鞅测度，且 B_t 是货币市场账户，则可复制支付 X_T 在 t 时刻的无套利价格为

$$V_t = B_t \mathbb{E}^Q \left[\frac{X_T}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right].$$

本章把这个公式具体化。最基本的连续时间股票市场由一只股票和一个货币市场账户组成：

$$dB_t = rB_t dt, \quad dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^P,$$

其中 r 为无风险利率， μ 为真实测度下的预期收益率， $\sigma > 0$ 为波动率。无套利定价不直接使用 μ ，而是切换到风险中性测度 Q ，使股票贴现价格成为鞅：

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q.$$

定义 36.1 (Black-Scholes 市场). Black-Scholes 市场指由

$$dB_t = rB_t dt, \quad dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q$$

描述的风险中性市场，其中 r 和 $\sigma > 0$ 为常数，股票可连续交易，交易无摩擦，且衍生品支付可由股票和货币市场账户复制。

例 36.1 (风险中性漂移). 若真实测度下 $\mu = 12\%$ 、 $r = 4\%$ 、 $\sigma = 20\%$ ，则市场风险价格为

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} = 0.4.$$

切换到风险中性测度后，股票动态中的漂移从 12% 变成 4%。这不是说投资者真的只要求 4% 的收益，而是说期权复制价格只需要风险中性贴现期望。

定理 36.1 (风险中性几何 Brownian 运动解). 若

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q, \quad S_0 > 0,$$

则

$$S_T = S_t \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q) \right\}.$$

特别地, 在条件于 $\mathcal{F}_t$ 时, $\log(S_T/S_t)$ 服从均值 $(r - \sigma^2/2)(T-t)$ 、方差 $\sigma^2(T-t)$ 的正态分布。

证明. 对 $f(S) = \log S$ 用 Itô 引理:

$$d \log S_t = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} (dS_t)^2 = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t^Q.$$

从 t 积分到 T , 再指数化即可得到结论。 $\square$

例 36.2 (条件均值). 由上式可得

$$\mathbb{E}^Q[S_T | \mathcal{F}_t] = S_t e^{r(T-t)}.$$

因此贴现股票价格满足

$$\mathbb{E}^Q[e^{-r(T-t)} S_T | \mathcal{F}_t] = S_t,$$

这正是风险中性测度下贴现价格为鞅的含义。

例 36.3 (漂移不进入期权公式). 两只股票若有相同的当前价格、波动率和无风险利率, 但真实预期收益率不同, 在 Black-Scholes 完备市场内给同一欧式期权的无套利价格相同。真实漂移会影响实际投资回报分布, 却不影响复制成本。

36.2 Black-Scholes PDE

设欧式衍生品价格可写成光滑函数 $V(t, S)$ 。对 $V(t, S_t)$ 使用 Itô 引理, 在风险中性动态下有

$$dV = \left(V_t + rSV_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} \right) dt + \sigma SV_S dW_t^Q.$$

若 V 能由持有 Δ_t 股股票和货币市场账户复制, 则随机项必须与股票风险相配平, 得到 $\Delta_t = V_S(t, S_t)$ 。

定理 36.2 (Black-Scholes PDE). 若支付 $\Phi(S_T)$ 可由 Black-Scholes 市场中的自融资策略复制, 且价格函数 $V(t, S)$ 足够光滑, 则 V 满足

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0, \quad V(T, S) = \Phi(S).$$

证明. 构造组合: 持有 $V_S(t, S_t)$ 股股票, 并持有金额

$$V(t, S_t) - V_S(t, S_t)S_t$$

于货币市场账户。该组合的价值为 V 。其自融资变化为

$$d\Pi = V_S dS + r(V - V_S S)dt.$$

代入 $dS = rSdt + \sigma SdW^Q$, 得

$$d\Pi = rVdt + \sigma SV_S dW^Q.$$

另一方面 Itô 引理给出

$$dV = \left(V_t + rSV_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} \right) dt + \sigma SV_S dW^Q.$$

复制要求 $dV = d\Pi$ 。比较 dt 项, 得到 PDE。 $\square$

例 36.4 (看涨期权的边界直觉). 欧式看涨期权支付为 $(S_T - K)^+$ 。终端条件为

$$C(T, S) = (S - K)^+.$$

当 $S = 0$ 时, 风险中性动态保持 $S_u = 0$, 因此 $C(t, 0) = 0$ 。当 S 很大时, 看涨期权近似于远期多头, 价格近似

$$C(t, S) \approx S - Ke^{-r(T-t)}.$$

这些条件帮助理解 PDE 解的形状。

例 36.5 (Delta 对冲的即时风险消除). 若某期权当前 $V_S = 0.6$, 则复制组合持有 0.6 股股票。期权价格中的 Brownian 随机项是 $\sigma SV_S dW$, 股票头寸中的随机项也是 $0.6\sigma SdW$ 。两者相配平后, 剩余变化只由无风险利率决定。

命题 36.1 (风险中性定价与 PDE 的一致性). 若

$$V(t, S) = \mathbb{E}^Q [e^{-r(T-t)} \Phi(S_T) \mid S_t = S],$$

且 V 足够光滑, 则 V 满足 Black-Scholes PDE。

证明. 令

$$M_u = e^{-r(u-t)} V(u, S_u), \quad u \in [t, T].$$

若 V 满足风险中性定价公式, 则 M_u 是 Q -鞅。对 M_u 用 Itô 引理, 其漂移项必须为零。漂移项正是

$$e^{-r(u-t)} \left(V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV \right) du.$$

因此括号内为零。 $\square$

例 36.6 (PDE 和期望公式的两种读法). 同一个欧式支付既可以通过解 PDE 得到价格, 也可以通过计算风险中性贴现期望得到价格。PDE 强调动态复制, 期望公式强调鞅定价; 在本模型中它们给出同一个数。

36.3 欧式看涨和看跌公式

令 $\tau = T - t$ 。欧式看涨期权支付为 $(S_T - K)^+$, 看跌期权支付为 $(K - S_T)^+$ 。定义

$$d_1 = \frac{\log(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau},$$

并令 $N(\cdot)$ 为标准正态分布函数。

定理 36.3 (欧式看涨期权公式). 在 *Black-Scholes* 市场中, 欧式看涨期权价格为

$$C(t, S) = SN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2).$$

证明. 由风险中性定价,

$$C = e^{-r\tau}\mathbb{E}^Q[(S_T - K)^+ | S_t = S].$$

写

$$S_T = S \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau + \sigma\sqrt{\tau}Z \right\}, \quad Z \sim N(0, 1).$$

看涨期权实值条件 $S_T > K$ 等价于 $Z > -d_2$ 。于是

$$C = e^{-r\tau}\mathbb{E}^Q[S_T \mathbf{1}_{\{Z > -d_2\}}] - Ke^{-r\tau}Q(Z > -d_2).$$

第二项为 $Ke^{-r\tau}N(d_2)$ 。第一项利用正态指数倾斜恒等式

$$\mathbb{E}[e^{aZ} \mathbf{1}_{\{Z > c\}}] = e^{a^2/2}N(a - c)$$

得到 $SN(d_1)$ 。合并即得公式。 □

例 36.7 (平值看涨期权). 设 $S = K = 100$ 、 $r = 5\%$ 、 $\sigma = 20\%$ 、 $\tau = 1$ 。则

$$d_1 = \frac{0 + 0.05 + 0.02}{0.2} = 0.35, \quad d_2 = 0.15.$$

价格为

$$C = 100N(0.35) - 100e^{-0.05}N(0.15).$$

学习时先把公式拆成两块: $SN(d_1)$ 是风险调整后的股票部分, $Ke^{-r\tau}N(d_2)$ 是贴现执行价格部分。

定理 36.4 (Put-call parity). 同一标的、同一执行价、同一到期日的欧式看涨和看跌期权满足

$$C(t, S) - P(t, S) = S - Ke^{-r(T-t)}.$$

证明. 到期时,

$$(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K.$$

左边是买入看涨并卖出看跌的终端支付, 右边可由买入一股股票并借入 $Ke^{-r(T-t)}$ 复制。两者终端支付相同, 无套利要求当前价格相同。□

例 36.8 (由看涨得到看跌). 若 $S = 100$ 、 $K = 100$ 、 $r = 5\%$ 、 $\tau = 1$, 且看涨期权价格为 $C = 10.45$, 则

$$P = C - S + Ke^{-r\tau} = 10.45 - 100 + 100e^{-0.05}.$$

这比重重新积分看跌支付更快, 也更能暴露报价之间的套利错误。

推论 36.1 (欧式看跌期权公式). 欧式看跌期权价格为

$$P(t, S) = Ke^{-r\tau}N(-d_2) - SN(-d_1).$$

证明. 由 put-call parity,

$$P = C - S + Ke^{-r\tau}.$$

代入看涨公式并使用 $N(-x) = 1 - N(x)$, 即可得到结论。□

例 36.9 (价内、平值和价外). 当 $S > K$ 时, 看涨期权价内, 看跌期权价外; 当 $S = K$ 时, 二者平值; 当 $S < K$ 时, 看涨期权价外, 看跌期权价内。Black-Scholes 价格不仅反映内在价值, 还反映到期前价格波动带来的时间价值。

例 36.10 (数字期权). 支付 $\mathbf{1}_{\{S_T > K\}}$ 的现金型数字期权价格为

$$e^{-r\tau}Q(S_T > K) = e^{-r\tau}N(d_2).$$

它正好出现在看涨公式的执行价格项中, 说明 $N(d_2)$ 是风险中性实值概率。

例 36.11 (状态价格密度). 把看涨价格看成执行价 K 的函数 $C(K)$ 。形式上,

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}$$

与风险中性终端价格密度有关。这解释了为什么一串不同行权价的期权价格能够透露市场隐含的风险中性分布。

36.4 希腊值与动态复制

希腊值是价格函数对模型变量或参数的敏感度。它们不是附加装饰，而是复制策略和风险管理的局部语言。

定义 36.2 (常用希腊值). 对价格函数 $V(t, S; \sigma, r)$, 定义

$$\Delta = V_S, \quad \Gamma = V_{SS}, \quad \Theta = V_t, \quad \mathcal{V} = V_\sigma, \quad \rho = V_r.$$

命题 36.2 (看涨期权的 Delta 和 Gamma). 欧式看涨期权满足

$$\Delta_C = N(d_1), \quad \Gamma_C = \frac{\varphi(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}},$$

其中 φ 为标准正态密度。

证明. 对

$$C = SN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)$$

关于 S 求导。虽然 d_1, d_2 都依赖 S , 但由 $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$ 可验证两项中关于 d_i 的额外导数抵消, 留下

$$C_S = N(d_1).$$

再对 S 求导, 因

$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}},$$

得到 Gamma 公式。 □

例 36.12 (Delta 头寸). 若某看涨期权的 $d_1 = 0.25$, 则 $\Delta = N(0.25)$ 。复制一份期权需要持有约 $N(0.25)$ 股股票, 其余价值放在货币市场账户中。标的上涨一小段时, 期权价格的一阶变化约为 ΔdS 。

例 36.13 (Gamma 的含义). Gamma 衡量 Delta 对 S 的变化速度。临近到期且接近平值时, Γ 往往较大, 表示复制策略需要更频繁调整股票头寸。连续时间模型假设可以连续再平衡, 现实中这会变成交易成本和离散对冲误差。

定理 36.5 (Delta 对冲恒等式). 若 V 满足 Black-Scholes PDE, 则持有

$$\Delta_t = V_S(t, S_t)$$

股股票, 并把剩余价值 $V - \Delta_t S_t$ 放入货币市场账户的策略复制 $V(t, S_t)$ 。

证明. 该策略的自融资变化为

$$d\Pi = V_S dS + r(V - V_S S)dt.$$

代入股票动态可得

$$d\Pi = rVdt + \sigma SV_S dW^Q.$$

PDE 将 Itô 展开中的漂移项化为 rV , 所以

$$dV = rVdt + \sigma SV_S dW^Q = d\Pi.$$

若初始 $\Pi_t = V(t, S_t)$, 则两者路径上保持相等, 终端复制支付。□

例 36.14 (离散再平衡误差). 若只在每天收盘调整 Delta, 而不是连续调整, 那么日内价格变化会让真实头寸偏离 V_S . 误差主要受 Gamma、波动率和再平衡间隔影响。Black-Scholes 的连续复制给出理论基准, 实际交易需要把离散误差和成本加入考虑。

例 36.15 (Vega 不是希腊字母但很重要). Vega 衡量价格对波动率的敏感度。一个长期平值期权通常 Vega 较高, 因为波动率变化显著改变到期实值概率。短期期权即使 Delta 很敏感, Vega 也可能较小。

36.5 债券与短利率定价

衍生品不只包括股票期权。债券本身也可以看作支付确定或随机现金流的合约。零息债券 $P(t, T)$ 在 T 时支付一单位货币, 其价格是固定收益定价的基本构件。

定理 36.6 (确定性短利率下的零息债券价格). 若短利率路径 r_u 为确定函数, 则

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T r_u du\right).$$

若 $r_u = r$ 为常数, 则 $P(t, T) = e^{-r(T-t)}$ 。

证明. 无风险账户从 t 到 T 的增长因子为

$$\exp\left(\int_t^T r_u du\right).$$

今天投入 $P(t, T)$ 到该账户, 到期应正好得到一单位货币, 所以

$$P(t, T) \exp\left(\int_t^T r_u du\right) = 1.$$

解得公式。□

例 36.16 (常数利率债券). 若 $r = 4\%$ 、 $T - t = 5$, 则五年期零息债价格为

$$P(t, T) = e^{-0.04 \times 5} = e^{-0.2}.$$

它低于 1, 因为今天少于 1 的资金按无风险利率增长后可在五年后变成 1。

定义 36.3 (久期与凸性). 对支付现金流 CF_i 于时间 T_i 的债券, 价格为

$$P = \sum_i e^{-y(T_i - t)} CF_i.$$

Macauley 久期为

$$D = \frac{\sum_i (T_i - t) e^{-y(T_i - t)} CF_i}{P},$$

凸性为

$$C = \frac{\sum_i (T_i - t)^2 e^{-y(T_i - t)} CF_i}{P}.$$

例 36.17 (价格对收益率的近似). 若某债券久期为 $D = 4$, 收益率小幅上升 $\Delta y = 0.01$, 则一阶近似给出

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D \Delta y = -4\%.$$

加入凸性项后近似为

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D \Delta y + \frac{1}{2} C (\Delta y)^2.$$

当短利率随机时, 债券价格本身成为短利率状态变量的函数。设风险中性短利率模型为

$$dr_t = \alpha(t, r_t) dt + \beta(t, r_t) dW_t^Q.$$

零息债券价格写作 $P(t, r; T)$ 。

定理 36.7 (短利率债券定价 PDE). 若 $P(t, r; T)$ 足够光滑, 且终端条件为 $P(T, r; T) = 1$, 则

$$P_t + \alpha(t, r) P_r + \frac{1}{2} \beta(t, r)^2 P_{rr} - rP = 0.$$

证明. 风险中性定价给出

$$P(t, r; T) = \mathbb{E}^Q \left[\exp \left(- \int_t^T r_u du \right) \mid r_t = r \right].$$

令

$$M_u = \exp \left(- \int_t^u r_s ds \right) P(u, r_u; T).$$

该过程为 Q -鞅。对 M_u 用 Itô 引理, 并令漂移项为零, 得到所述 PDE。 □

例 36.18 (不能只看未来短利率均值). 随机短利率下,

$$P(t, T) = \mathbb{E}^Q \left[e^{-\int_t^T r_u du} \mid \mathcal{F}_t \right],$$

一般不等于

$$\exp \left(- \int_t^T \mathbb{E}^Q[r_u \mid \mathcal{F}_t] du \right).$$

原因是指数函数和期望不能随意交换; 利率不确定性会通过凸性影响债券价格。

定理 36.8 (Vasicek 仿射债券公式). 在风险中性 Vasicek 模型

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma_r dW_t^Q, \quad a > 0,$$

中, 零息债券价格可写成

$$P(t, r; T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r},$$

其中

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a},$$

而 $A(t, T)$ 由代入 PDE 后得到的一阶常微分方程确定。

证明. 令 $P = Ae^{-Br}$ 。则

$$P_r = -BP, \quad P_{rr} = B^2P, \quad P_t = \left(\frac{A_t}{A} - B_t r \right) P.$$

代入短利率 PDE 并除以 P , 得到

$$\frac{A_t}{A} - B_t r - aB(b - r) + \frac{1}{2}\sigma_r^2 B^2 - r = 0.$$

按 r 的系数和常数项分别为零, 得

$$B_t = aB - 1, \quad B(T, T) = 0,$$

解得

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}.$$

常数项给出 A 的方程。终端条件 $P(T, r; T) = 1$ 对应 $A(T, T) = 1$ 。□

例 36.19 (均值回复的作用). 在 Vasicek 模型中, 若当前短利率 r_t 很高, 漂移 $a(b - r_t)$ 为负, 短利率倾向于回到长期均值 b 。因此长期债券价格对当前 r_t 的敏感度不会像无均值回复模型那样无限线性累积, 而是由

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

控制。

例 36.20 (债券期权的同一逻辑). 以零息债券为标的的欧式看涨期权支付

$$(P(T_0, T_1) - K)^+$$

也可用风险中性贴现期望定价。若短利率模型给出 $P(T_0, T_1)$ 的条件分布, 就能得到闭式或数值价格。这里的标的不是股票, 而是一只到期更远的债券。

36.6 常见衍生品关系

很多衍生品公式只是风险中性定价的不同包装。远期合约、期货、数字期权和障碍期权都可以从“贴现期望加边界条件”理解。

命题 36.3 (无分红股票远期价格). 无分红股票在 T 到期交割的远期价格为

$$F(t, T) = S_t e^{r(T-t)}.$$

证明. 远期合约在到期支付 $S_T - F$ 。签订时价值为零, 因此

$$0 = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q[S_T - F | \mathcal{F}_t].$$

风险中性下 $\mathbb{E}^Q[S_T | \mathcal{F}_t] = S_t e^{r(T-t)}$, 所以 $F = S_t e^{r(T-t)}$. □

例 36.21 (远期与借钱买股票). 若 $S_t = 100$ 、 $r = 5\%$ 、 $\tau = 1$, 则远期价格为

$$F = 100e^{0.05}.$$

这等价于今天借钱买入股票并持有到期: 到期交割价必须补偿这段时间的融资成本。

例 36.22 (现金型数字期权和看涨价差). 支付 $\mathbf{1}_{\{S_T > K\}}$ 的数字期权可以用很窄的看涨价差近似:

$$\frac{C(K) - C(K + \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

当 ε 很小时, 它近似在 K 附近提取看涨价格曲线的斜率信息。

例 36.23 (障碍条件). 上敲出看涨期权在标的价格触及障碍 H 后失效。PDE 仍来自同一个生成元, 但边界条件多了

$$V(t, H) = 0.$$

这说明衍生品差异常常体现在支付和边界条件上, 而不是定价思想上。

例 36.24 (美式期权的接口). 美式期权允许提前行权。它的价格不再只满足等式 PDE, 而是满足最优停止对应的变分不等式。初版主线只保留这个接口: 提前行权把定价问题从线性 PDE 推向自由边界问题。

36.7 模型边界

Black-Scholes 模型的力量来自极端清楚的结构：一只股票、一只债券、一个 Brownian 风险源、连续交易、常数波动率、无摩擦市场。在这个结构中，市场完备，期权可以复制，价格唯一。

现实市场中，波动率会随执行价和期限变化，交易有成本，跳跃和随机波动率会引入额外风险源，连续再平衡也只是近似。因此本章公式应当被看作基准语言：它告诉我们无套利价格怎样由复制和风险中性测度产生，也告诉我们现实偏离应当从哪里进入模型。

例 36.25 (隐含波动率). 市场给出的期权价格 C^{mkt} 通常不直接等于某个固定 σ 下的理论价格。把 Black-Scholes 公式反过来求

$$C^{BS}(\sigma_{\text{imp}}) = C^{mkt}$$

得到的 σ_{imp} 称为隐含波动率。不同 K, T 的隐含波动率不同，便形成波动率微笑或曲面。

36.8 本章小结

Black-Scholes 公式不是孤立技巧，而是 Ch34 风险中性定价在最简单完备连续时间市场中的具体表达。PDE 来自 Itô 引理和 Delta 复制；闭式期权公式来自风险中性对数正态分布；希腊值描述复制和风险暴露；债券价格则把同一思想应用到短利率状态变量。下一章将把这些定价工具接入 Merton 消费-投资问题和动态资产定价。

36.9 Exercises

习题 36.1. 写出 Black-Scholes 市场中 B_t 和 S_t 在风险中性测度下的动态。

习题 36.2. 证明风险中性股票价格满足

$$\mathbb{E}^Q[e^{-r(T-t)}S_T \mid \mathcal{F}_t] = S_t.$$

习题 36.3. 从 $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q$ 推导 S_T 的显式解。

习题 36.4. 解释为什么真实漂移 μ 不出现在 Black-Scholes 欧式期权公式中。

习题 36.5. 对 $V(t, S_t)$ 使用 Itô 引理，写出 dV 。

习题 36.6. 用 Delta 复制推导 Black-Scholes PDE。

习题 36.7. 写出欧式看涨期权的终端条件和两个基本边界直觉。

习题 36.8. 说明风险中性期望公式与 Black-Scholes PDE 的关系。

习题 36.9. 定义 d_1, d_2 , 并说明二者相差多少。

习题 36.10. 写出欧式看涨期权 Black-Scholes 公式。

习题 36.11. 写出欧式看跌期权 Black-Scholes 公式。

习题 36.12. 证明 put-call parity。

习题 36.13. 若 $S = K = 100, r = 0.05, \sigma = 0.2, \tau = 1$, 计算 d_1, d_2 。

习题 36.14. 说明 $N(d_2)$ 在看涨期权公式中的概率含义。

习题 36.15. 给出现金型数字期权 $1_{\{S_T > K\}}$ 的 Black-Scholes 价格。

习题 36.16. 定义 Delta、Gamma、Theta、Vega 和 Rho。

习题 36.17. 证明欧式看涨期权的 Delta 为 $N(d_1)$ 。

习题 36.18. 证明欧式看涨期权的 Gamma 为

$$\frac{\varphi(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}.$$

习题 36.19. 解释 Gamma 为什么在离散 Delta 对冲中重要。

习题 36.20. 写出 Delta 对冲组合中股票和货币市场账户的头寸。

习题 36.21. 说明 Vega 的经济含义。

习题 36.22. 在常数短利率 r 下, 写出零息债券 $P(t, T)$ 的价格。

习题 36.23. 在确定性短利率路径 r_u 下, 推导零息债券价格。

习题 36.24. 定义 Macaulay 久期。

习题 36.25. 用久期给出债券价格对收益率小变化的一阶近似。

习题 36.26. 写出随机短利率模型下零息债券的风险中性定价公式。

习题 36.27. 推导短利率债券定价 PDE。

习题 36.28. 在 Vasicek 模型 $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma_r dW_t^Q$ 中, 写出债券价格的仿射形式。

习题 36.29. 推导 Vasicek 模型中 $B(t, T)$ 的表达式。

习题 36.30. 解释为什么随机利率下债券价格一般不等于用期望短利率贴现。

习题 36.31. 推导无分红股票远期价格 $F(t, T)$ 。

习题 36.32. 说明数字期权如何用窄看涨价差近似。

习题 36.33. 说明障碍期权相对于普通欧式期权主要改变了什么。

习题 36.34. 解释美式期权为什么会引入最优停止或自由边界问题。

习题 36.35. 说明隐含波动率的定义，并解释波动率微笑为什么提示 Black-Scholes 常数波动率假设不足。

36.10 Solutions

本章题解的主线是：先把股票价格写成风险中性几何 Brownian 运动，再用 Itô 引理和复制得到 PDE；闭式公式来自对数正态分布；希腊值是价格函数的局部导数；债券定价则把同一套风险中性贴现思想用于短利率状态变量。

解答 36.1. 风险中性测度下，

$$dB_t = rB_t dt, \quad dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q.$$

第一式表示货币市场账户以无风险利率增长；第二式表示股票的漂移也等于 r ，从而贴现股票价格为 Q -鞅。

解答 36.2. 由风险中性动态可知

$$S_T = S_t \exp \left\{ (r - \sigma^2/2)(T - t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q) \right\}.$$

条件期望为

$$\mathbb{E}^Q[S_T | \mathcal{F}_t] = S_t e^{r(T-t)}.$$

因此

$$\mathbb{E}^Q[e^{-r(T-t)} S_T | \mathcal{F}_t] = S_t.$$

解答 36.3. 对 $\log S_t$ 用 Itô 引理：

$$d \log S_t = \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t^Q.$$

积分得

$$\log S_T - \log S_t = \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q).$$

指数化即得显式解。

解答 36.4. 在完备 Black-Scholes 市场中, 欧式期权可以由股票和货币市场账户复制。复制成本由无套利决定, 不需要投资者偏好或真实漂移。真实漂移 μ 通过测度变换被市场风险价格吸收, 风险中性动态中的漂移变为 r 。

解答 36.5. 若 $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q$, 则

$$dV = V_t dt + V_S dS + \frac{1}{2} V_{SS} (dS)^2.$$

由于 $(dS)^2 = \sigma^2 S^2 dt$, 得到

$$dV = \left(V_t + rSV_S + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} \right) dt + \sigma SV_S dW_t^Q.$$

解答 36.6. 复制组合持有 $\Delta = V_S$ 股股票, 其余 $V - \Delta S$ 放入货币市场账户。组合变化为

$$d\Pi = V_S dS + r(V - V_S S) dt = rV dt + \sigma SV_S dW_t^Q.$$

复制要求 $dV = d\Pi$ 。与 Itô 展开比较漂移项, 得

$$V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0.$$

解答 36.7. 欧式看涨终端条件是

$$C(T, S) = (S - K)^+.$$

若 $S = 0$, 则 $C(t, 0) = 0$ 。当 S 很大时, 看涨近似等于持有股票并在到期支付 K , 所以

$$C(t, S) \approx S - Ke^{-r(T-t)}.$$

解答 36.8. 风险中性期望公式

$$V(t, S) = \mathbb{E}^Q[e^{-r(T-t)} \Phi(S_T) \mid S_t = S]$$

说明价格是贴现支付的条件期望。若 V 光滑, 对贴现过程 $e^{-r(u-t)} V(u, S_u)$ 用 Itô 引理并令漂移为零, 就得到 Black-Scholes PDE。

解答 36.9. 令 $\tau = T - t$, 则

$$d_1 = \frac{\log(S/K) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}.$$

因此 $d_1 - d_2 = \sigma\sqrt{\tau}$ 。

解答 36.10. 欧式看涨期权价格为

$$C(t, S) = SN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2).$$

其中 N 是标准正态分布函数, $\tau = T - t$ 。

解答 36.11. 欧式看跌期权价格为

$$P(t, S) = Ke^{-r\tau}N(-d_2) - SN(-d_1).$$

它也可由 put-call parity 从看涨公式推出。

解答 36.12. 到期时

$$(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K.$$

左边是买看涨、卖看跌, 右边是持有一股股票并承诺支付 K 。支付相同, 无套利要求价格相同:

$$C - P = S - Ke^{-r\tau}.$$

解答 36.13.

$$d_1 = \frac{\log(100/100) + (0.05 + 0.2^2/2) \cdot 1}{0.2} = \frac{0.07}{0.2} = 0.35.$$

因此

$$d_2 = d_1 - 0.2 = 0.15.$$

解答 36.14. 在风险中性测度下,

$$S_T > K$$

等价于标准正态变量超过某个阈值。计算可得

$$Q(S_T > K \mid S_t = S) = N(d_2).$$

所以 $N(d_2)$ 是风险中性实值概率, 不是真实测度下的实值概率。

解答 36.15. 现金型数字期权价格为

$$e^{-r\tau}Q(S_T > K \mid S_t = S) = e^{-r\tau}N(d_2).$$

它支付的不是股票, 而是到期实值时的一单位现金。

解答 36.16. 对价格函数 $V(t, S; \sigma, r)$,

$$\Delta = V_S, \quad \Gamma = V_{SS}, \quad \Theta = V_t, \quad \mathcal{V} = V_\sigma, \quad \rho = V_r.$$

它们分别衡量对标的价格、标的价格曲率、时间、波动率和利率的敏感度。

解答 36.17. 从

$$C = SN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)$$

关于 S 求导。利用

$$S\varphi(d_1) = Ke^{-r\tau}\varphi(d_2)$$

和

$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}},$$

两项中来自 d_i 的部分抵消，留下

$$C_S = N(d_1).$$

解答 36.18. 由上一题 $\Delta_C = N(d_1)$ 。再次对 S 求导：

$$\Gamma_C = \varphi(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S}.$$

而

$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}},$$

所以

$$\Gamma_C = \frac{\varphi(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}.$$

解答 36.19. Delta 对冲只匹配一阶价格变化。若标的价格在两次再平衡之间发生较大变化，Delta 本身会改变，这个变化由 Gamma 衡量。Gamma 越大，固定 Delta 头寸越快过时，离散对冲误差通常越重要。

解答 36.20. 复制组合持有

$$\Delta_t = V_S(t, S_t)$$

股股票。货币市场账户中的金额为

$$V(t, S_t) - \Delta_t S_t.$$

若该金额为负，表示借入资金；若为正，表示存入资金。

解答 36.21. Vega 是

$$\mathcal{V} = V_\sigma.$$

它衡量波动率变化对期权价格的影响。平值且期限较长的期权往往 Vega 较大，因为波动率会显著改变到期实值概率和尾部支付。

解答 36.22. 常数短利率下，零息债券在 T 支付 1，因此价格为

$$P(t, T) = e^{-r(T-t)}.$$

解答 36.23. 确定性短利率下，无风险账户从 t 到 T 的增长因子为

$$\exp\left(\int_t^T r_u du\right).$$

今天支付 $P(t, T)$ 到期应变成 1，所以

$$P(t, T) \exp\left(\int_t^T r_u du\right) = 1.$$

因此

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T r_u du\right).$$

解答 36.24. 若现金流 CF_i 在 T_i 支付，价格为

$$P = \sum_i e^{-y(T_i-t)} CF_i.$$

Macaulay 久期为

$$D = \frac{\sum_i (T_i - t) e^{-y(T_i-t)} CF_i}{P}.$$

它是按现值权重计算的平均收款时间。

解答 36.25. 一阶近似为

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D \Delta y.$$

收益率上升时 $\Delta y > 0$ ，价格下降；久期越大，同样收益率变化带来的价格变动越大。

解答 36.26. 随机短利率下，

$$P(t, T) = \mathbb{E}^Q \left[\exp\left(-\int_t^T r_u du\right) \mid \mathcal{F}_t \right].$$

这是风险中性贴现期望，只是贴现因子本身也随机。

解答 36.27. 设 $P = P(t, r; T)$ ，短利率动态为

$$dr_t = \alpha(t, r_t) dt + \beta(t, r_t) dW_t^Q.$$

令

$$M_u = e^{-\int_t^u r_s ds} P(u, r_u; T).$$

风险中性定价要求 M_u 为鞅。Itô 引理给出漂移项

$$P_t + \alpha P_r + \frac{1}{2} \beta^2 P_{rr} - rP.$$

令其为零，得到 PDE。

解答 36.28. Vasicek 模型中债券价格常写为

$$P(t, r; T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r}.$$

这称为仿射形式，因为对数债券价格

$$\log P = \log A - Br$$

是当前短利率 r 的仿射函数。

解答 36.29. 把 $P = Ae^{-Br}$ 代入 PDE。关于 r 的系数给出

$$B_t = aB - 1, \quad B(T, T) = 0.$$

解这个反向 ODE 得

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}.$$

解答 36.30. 债券价格包含

$$\mathbb{E}^Q \left[e^{-\int_t^T r_u du} \mid \mathcal{F}_t \right].$$

指数函数是非线性的，所以一般

$$\mathbb{E}[e^{-X}] \neq e^{-\mathbb{E}[X]}.$$

因此不能只用期望短利率路径贴现；利率不确定性本身会影响价格。

解答 36.31. 远期合约到期支付 $S_T - F$ ，签订时价值为零：

$$0 = e^{-r\tau} \mathbb{E}^Q[S_T - F \mid \mathcal{F}_t].$$

由于

$$\mathbb{E}^Q[S_T \mid \mathcal{F}_t] = S_t e^{r\tau},$$

得到

$$F(t, T) = S_t e^{r\tau}.$$

解答 36.32. 看涨价差

$$\frac{C(K) - C(K + \varepsilon)}{\varepsilon}$$

在到期时支付

$$\frac{(S_T - K)^+ - (S_T - K - \varepsilon)^+}{\varepsilon}.$$

当 $S_T > K + \varepsilon$ 时支付约为 1；当 $S_T < K$ 时为 0；中间区域线性过渡。令 ε 很小，就近似数字期权。

解答 36.33. 普通欧式期权主要由终端支付决定。障碍期权还依赖路径是否触及障碍，因此 PDE 需要额外边界条件，例如上敲出期权满足 $V(t, H) = 0$ 。定价思想仍是风险中性贴现，只是状态区域和边界改变。

解答 36.34. 美式期权允许在到期前任意时刻行权，因此持有人要在“继续持有”和“立即行权”之间选择。这个选择是最优停止问题。PDE 形式变成变分不等式，并出现未知的最优行权边界。

解答 36.35. 隐含波动率 σ_{imp} 定义为使

$$C^{BS}(\sigma_{\text{imp}}) = C^{mkt}$$

成立的波动率。若 Black-Scholes 常数波动率模型完全正确，同一标的同一到期附近的期权应给出相近波动率。现实中不同执行价和期限的隐含波动率不同，说明常数波动率和完美连续复制只是基准近似。

36.11 Computation Lab

本章计算实验的目标是把连续时间定价公式变成可检查的数值对象。

1. **Black-Scholes 价格。** 输入 $S, K, r, \sigma, T - t$ ，计算

$$d_1, \quad d_2, \quad C = SN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2),$$

并用 put-call parity 得到 P 。

2. **希腊值。** 计算

$$\Delta_C = N(d_1), \quad \Gamma_C = \frac{\varphi(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}},$$

再用有限差分检查解析 Delta 和 Gamma。

3. **Monte Carlo 定价。** 在风险中性动态

$$S_T = S_0 \exp \left\{ (r - \sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}Z \right\}$$

下模拟 S_T ，估计

$$e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (S_T^{(i)} - K)^+.$$

比较它与闭式 Black-Scholes 价格的误差。

4. **离散 Delta 对冲。**用日度或周度时间网格模拟股票路径，按 Black-Scholes Delta 再平衡复制组合，记录终端复制误差，并观察误差如何随再平衡频率变化。
5. **债券价格、久期和凸性。**给定现金流表，计算价格、久期和凸性，并用收益率扰动检验

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D\Delta y + \frac{1}{2}C(\Delta y)^2.$$

6. **Vasicek 零息债券。**给定 $a, b, \sigma_r, r_t, T - t$ ，先计算

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a},$$

再用 PDE 中得到的 $A(t, T)$ 方程或标准仿射公式计算 $P(t, T)$ ，并画出不同期限的收益率曲线。

第三十七章 Merton 消费-投资问题与动态资产定价

37.1 从定价到选择

Ch35 把无套利定价落实为 Black-Scholes 公式、希腊值和债券定价。本章换一个角度：价格过程给定以后，一个长期投资者怎样在消费和投资之间选择？这个问题的答案不仅给出最优组合，还会反过来生成资产定价核。于是 Merton 问题成为连续时间金融中连接最优控制和动态资产定价的桥。

考虑一只无风险资产和一只风险资产：

$$dB_t = rB_t dt, \quad \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t,$$

其中 $\mu > r$ 、 $\sigma > 0$ 。投资者以速率 $c_t \geq 0$ 消费，并把金额 π_t 投入风险资产，其余 $X_t - \pi_t$ 放入无风险资产。

定理 37.1 (含消费的财富方程). 若 X_t 为金融财富， π_t 为投入风险资产的金额， c_t 为消费率，则自融资预算约束给出

$$dX_t = [rX_t + \pi_t(\mu - r) - c_t] dt + \pi_t \sigma dW_t.$$

若 $X_t > 0$ ，令风险资产财富份额 $\omega_t = \pi_t/X_t$ 、消费财富比 $m_t = c_t/X_t$ ，则

$$\frac{dX_t}{X_t} = [r + \omega_t(\mu - r) - m_t] dt + \omega_t \sigma dW_t.$$

证明. 风险资产头寸 π_t 的收益为

$$\pi_t \frac{dS_t}{S_t} = \pi_t \mu dt + \pi_t \sigma dW_t.$$

无风险头寸 $X_t - \pi_t$ 的收益为

$$r(X_t - \pi_t)dt.$$

再扣除消费流 $c_t dt$ ，相加得到

$$dX_t = \pi_t \mu dt + \pi_t \sigma dW_t + r(X_t - \pi_t)dt - c_t dt.$$

整理即得第一式。第二式除以 X_t 得到。 $\square$

例 37.1 (财富方程读法). 若 $r = 3\%$ 、 $\mu = 9\%$ 、 $\sigma = 20\%$ ，投资者把财富一半投到股票，且消费财富比为 4%，则财富漂移为

$$r + \omega(\mu - r) - m = 0.03 + 0.5(0.06) - 0.04 = 0.02.$$

财富扩散项为 $0.5 \times 0.2 = 0.1$ ，表示财富年化波动率为 10%。

例 37.2 (美元头寸和比例头寸). 若财富 $X_t = 200$ ，风险资产金额 $\pi_t = 80$ ，则风险资产份额为

$$\omega_t = \frac{80}{200} = 0.4.$$

若消费率 $c_t = 10$ ，则消费财富比为

$$m_t = \frac{10}{200} = 0.05.$$

Merton 显式解常用 ω 和 m ，因为 CRRA 偏好下它们通常不依赖财富水平。

37.2 Merton 问题与 HJB

有限期 Merton 问题可以写成

$$\sup_{(c, \pi)} \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\rho(s-t)} u(c_s) ds + e^{-\rho(T-t)} g(X_T) \mid X_t = x \right],$$

其中 $\rho > 0$ 是主观贴现率， u 是即时效用， g 是终端财富效用。值函数记为 $V(t, x)$ 。

定理 37.2 (Merton HJB 方程). 若值函数足够光滑，则满足

$$0 = V_t + \max_{c \geq 0, \pi} \left\{ u(c) + V_x [rx + \pi(\mu - r) - c] + \frac{1}{2} V_{xx} \pi^2 \sigma^2 \right\} - \rho V,$$

终端条件为 $V(T, x) = g(x)$ 。

证明. 在短时间区间 $[t, t + dt]$ 上，动态规划原理给出

$$V(t, x) = \max_{c, \pi} \left\{ u(c) dt + e^{-\rho dt} \mathbb{E}[V(t + dt, X_{t+dt})] \right\}.$$

对 $V(t + dt, X_{t+dt})$ 用 Itô 展开，并保留 dt 项：

$$\mathbb{E}[dV] = \left[V_t + V_x (rx + \pi(\mu - r) - c) + \frac{1}{2} V_{xx} \pi^2 \sigma^2 \right] dt.$$

再用 $e^{-\rho dt} = 1 - \rho dt + o(dt)$ ，移项并除以 dt ，得到 HJB。 $\square$

例 37.3 (没有投资选择的退化情形). 若强制 $\pi = 0$, HJB 变为

$$0 = V_t + \max_c \{u(c) + V_x(rx - c)\} - \rho V.$$

这就是只有无风险储蓄和消费的连续时间消费-储蓄问题。投资选择只是在 HJB 中多了 $\pi(\mu - r)$ 和 $\pi^2\sigma^2$ 两项。

命题 37.1 (Merton 一阶条件). 若内部最优解存在, 且 $V_x > 0, V_{xx} < 0$, 则

$$u'(c_t^*) = V_x(t, X_t),$$

并且

$$\pi_t^* = -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{V_x(t, X_t)}{V_{xx}(t, X_t)}.$$

证明. HJB 中关于 c 的部分为

$$u(c) - V_x c.$$

一阶条件为 $u'(c) = V_x$ 。关于 π 的部分为

$$V_x \pi (\mu - r) + \frac{1}{2} V_{xx} \pi^2 \sigma^2.$$

一阶条件为

$$V_x (\mu - r) + V_{xx} \pi \sigma^2 = 0.$$

解得最优 π 。由于 $V_{xx} < 0$, 该二次项为凹函数。 □

例 37.4 (风险容忍度). 定义局部风险容忍度

$$\mathcal{T}(t, x) = -\frac{V_x(t, x)}{V_{xx}(t, x)}.$$

则

$$\pi^* = \frac{\mu - r}{\sigma^2} \mathcal{T}(t, x).$$

风险溢价越高, 投资越多; 波动率越高, 投资越少; 风险容忍度越高, 投资越多。

例 37.5 (Sharpe ratio 写法). 令 $\lambda = (\mu - r)/\sigma$ 。则

$$\pi^* = \frac{\lambda}{\sigma} \mathcal{T}(t, x).$$

这说明投资需求可以拆成“每单位风险的补偿” λ 和“把财富暴露给风险的尺度” $\mathcal{T}/\sigma$ 。

37.3 CRRA 偏好与显式策略

令

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad \gamma \neq 1.$$

γ 是相对风险厌恶系数。CRRA 偏好的关键特征是齐次性：财富扩大一倍，最优消费和风险资产金额也扩大一倍。

定理 37.3 (CRRA 风险资产份额). 在 CRRA Merton 问题中，若值函数具有齐次形式

$$V(t, x) = \frac{A(t)x^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

则最优风险资产份额为

$$\omega^* = \frac{\pi^*}{x} = \frac{\mu - r}{\gamma\sigma^2} = \frac{\lambda}{\gamma\sigma}.$$

证明. 由齐次形式，

$$V_x = A(t)x^{-\gamma}, \quad V_{xx} = -\gamma A(t)x^{-\gamma-1}.$$

代入一阶条件

$$\pi^* = -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{V_x}{V_{xx}},$$

得到

$$\pi^* = \frac{\mu - r}{\gamma\sigma^2} x.$$

除以 x 即得份额公式。 □

例 37.6 (风险厌恶的作用). 若 $\mu - r = 6\%$ 、 $\sigma = 20\%$ ，则

$$\omega^* = \frac{0.06}{\gamma(0.2)^2} = \frac{1.5}{\gamma}.$$

当 $\gamma = 3$ 时，风险资产份额为 50%；当 $\gamma = 6$ 时，份额为 25%。风险厌恶翻倍，风险资产份额减半。

例 37.7 (波动率的平方效应). 若波动率从 20% 上升到 40%，在风险溢价和风险厌恶不变时，

$$\omega^* \propto \frac{1}{\sigma^2}$$

会下降为原来的四分之一。Merton 投资份额对波动率非常敏感。

命题 37.2 (CRRA 消费规则). 若

$$V(t, x) = \frac{A(t)x^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

则最优消费为

$$c_t^* = A(t)^{-1/\gamma} X_t.$$

因此消费财富比为

$$m(t) = \frac{c_t^*}{X_t} = A(t)^{-1/\gamma}.$$

证明. 消费一阶条件为

$$u'(c) = V_x.$$

CRRA 效用满足 $u'(c) = c^{-\gamma}$, 而

$$V_x = A(t)x^{-\gamma}.$$

因此

$$c^{-\gamma} = A(t)x^{-\gamma}.$$

两边取 $-1/\gamma$ 次幂, 得到

$$c = A(t)^{-1/\gamma} x.$$

□

例 37.8 (消费财富比). 若某时刻 $A(t) = 16$, 且 $\gamma = 2$, 则

$$m(t) = A(t)^{-1/\gamma} = 16^{-1/2} = 0.25.$$

财富为 100 时, 最优消费率为 25。这里的“率”是连续时间流量, 不是一次性消费 25。

定理 37.4 (有限期 CRRA 系数方程). 若终端效用为

$$g(x) = \kappa \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

并猜测

$$V(t, x) = \frac{A(t)x^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

则 $A(T) = \kappa$, 且

$$A'(t) = \rho A(t) - (1-\gamma)A(t) \left[r + \frac{(\mu-r)^2}{2\gamma\sigma^2} \right] - \gamma A(t)^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

证明. 把齐次猜测代入 HJB. 最优风险资产份额给出的投资项为

$$Ax^{1-\gamma} \frac{(\mu - r)^2}{2\gamma\sigma^2}.$$

最优消费 $c = A^{-1/\gamma}x$ 给出的消费项满足

$$\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} - Ax^{-\gamma}c = \frac{\gamma}{1-\gamma} A^{(\gamma-1)/\gamma} x^{1-\gamma}.$$

再把 $V_t = A'x^{1-\gamma}/(1-\gamma)$ 、无风险项 $Ax^{1-\gamma}$ 和贴现项 $-\rho Ax^{1-\gamma}/(1-\gamma)$ 合并。除以 $x^{1-\gamma}/(1-\gamma)$ ，得到所述 ODE。□

例 37.9 (没有终端财富动机). 若 $g \equiv 0$ ，形式上对应 $A(T) = 0$ 。接近终点时，投资者没有留下财富的效用，只关心到期前消费，消费财富比会在终点附近上升。有限期问题因此通常需要解 $A(t)$ 的反向 ODE。

37.4 无限期 Merton 问题

无限期问题没有终端日：

$$\sup_{c, \pi} \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} u(c_t) dt \right].$$

在平稳环境中，最优消费财富比和风险资产份额为常数。

定理 37.5 (无限期 CRRA 消费财富比). 对 CRRA 效用，若平稳解存在，则

$$\omega^* = \frac{\mu - r}{\gamma\sigma^2},$$

且消费财富比

$$m^* = \frac{\rho - (1 - \gamma) \left[r + \frac{(\mu - r)^2}{2\gamma\sigma^2} \right]}{\gamma}.$$

平稳解要求 $m^* > 0$ 。

证明. 无限期时令 $A(t) = A$ 为常数，因此有限期系数方程中 $A' = 0$ 。又 $m = A^{-1/\gamma}$ ，并且

$$\frac{A^{(\gamma-1)/\gamma}}{A} = A^{-1/\gamma} = m.$$

把 $A' = 0$ 的方程除以 A ，得到

$$0 = \rho - (1 - \gamma) \left[r + \frac{(\mu - r)^2}{2\gamma\sigma^2} \right] - \gamma m.$$

解出 m 即得公式。风险资产份额仍由 CRRA 一阶条件给出。□

例 37.10 (数值计算). 设 $\rho = 4\%$ 、 $r = 2\%$ 、 $\mu - r = 6\%$ 、 $\sigma = 20\%$ 、 $\gamma = 3$ 。则

$$\frac{(\mu - r)^2}{2\gamma\sigma^2} = \frac{0.06^2}{2 \cdot 3 \cdot 0.2^2} = 0.015.$$

因此

$$m^* = \frac{0.04 - (-2)(0.02 + 0.015)}{3} = \frac{0.11}{3} \approx 0.0367.$$

最优消费约为财富的 3.67% 每年。

例 37.11 (高风险厌恶与消费). 当 $\gamma > 1$ 时, 未来投资机会的有效价值会影响当前消费。风险资产提供的投资机会项

$$\frac{(\mu - r)^2}{2\gamma\sigma^2}$$

随 γ 上升而下降, 说明高风险厌恶者从风险投资机会中获得的等价价值较小。

定理 37.6 (对数效用特例). 若

$$u(c) = \log c,$$

无限期 Merton 问题的最优策略为

$$c_t^* = \rho X_t, \quad \omega^* = \frac{\mu - r}{\sigma^2}.$$

证明. 猜测

$$V(x) = a + b \log x.$$

则

$$V_x = \frac{b}{x}, \quad V_{xx} = -\frac{b}{x^2}.$$

消费一阶条件 $1/c = V_x$ 给出 $c = x/b$ 。HJB 中 $\log x$ 的系数要求 $\rho b = 1$, 所以 $b = 1/\rho$, 从而 $c = \rho x$ 。投资一阶条件给出

$$\pi^* = \frac{\mu - r}{\sigma^2} x,$$

即 $\omega^* = (\mu - r)/\sigma^2$ 。 □

例 37.12 (对数效用的近视性). 对数效用下消费财富比只等于 ρ , 不依赖 r, μ, σ 。投资机会会影响价值函数常数项, 但不会改变消费比例。这是对数效用的特殊性质, 不能直接推广到所有 CRRA 偏好。

例 37.13 (杠杆情形). 若 $\mu - r = 8\%$ 、 $\sigma = 20\%$, 对数效用下

$$\omega^* = \frac{0.08}{0.04} = 2.$$

这表示把财富的 200% 投入风险资产, 并借入 100% 财富投资。模型允许无摩擦借贷; 现实中保证金、破产约束和交易限制会改变结果。

37.5 边际效用与随机贴现因子

Merton 问题不仅给出投资策略, 还给出动态资产定价核。在代表性投资者均衡中, 资产价格必须让最优消费计划满足 Euler 条件。若即时效用为 $u(c)$, 则边际效用贴现过程

$$M_t = e^{-\rho t} \frac{u'(c_t)}{u'(c_0)}$$

是自然的随机贴现因子。

定理 37.7 (边际效用随机贴现因子). 若代表性投资者可在资产市场中最优选择消费, 且资产支付按内点 Euler 条件定价, 则任意资产价格 P_t 和股利流 D_t 满足

$$P_t = \mathbb{E}_t \left[\int_t^T \frac{M_s}{M_t} D_s ds + \frac{M_T}{M_t} P_T \right],$$

其中

$$M_t = e^{-\rho t} \frac{u'(c_t)}{u'(c_0)}.$$

证明. 把 t 时刻的一小单位消费转移到未来状态和时间 s , 最优性要求边际效用损失等于未来边际效用收益的价格加权现值。连续时间下把这些一阶条件沿时间积分, 得到用边际效用比率贴现未来股利和终端价格的表达式。该公式是离散时间 Euler 方程

$$P_t = \mathbb{E}_t[M_{t+1}(P_{t+1} + D_{t+1})]$$

的连续时间对应形式。 □

例 37.14 (CRRA 定价核). 若

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

则

$$M_t = e^{-\rho t} \left(\frac{c_t}{c_0} \right)^{-\gamma}.$$

消费高的状态边际效用低, 因此 M_t 低; 消费低的状态边际效用高, 因此 M_t 高。资产若在低消费状态支付较多, 就更有保险价值。

例 37.15 (消费增长和贴现因子). 若消费从 c_0 增长到 $c_t = 1.1c_0$, 且 $\gamma = 4$, 忽略时间贴现时边际效用比率为

$$(1.1)^{-4}.$$

风险厌恶越高, 消费增长状态的边际效用下降越快。

37.6 连续时间风险溢价

设某资产价格满足

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_S dt + \sigma_S dW_t.$$

若随机贴现因子动态为

$$\frac{dM_t}{M_t} = -r_t dt - \eta_t dW_t,$$

则无套利要求 $M_t S_t$ 的含股利总收益贴现后为鞅。在无股利的单因子情形下得到风险溢价公式。

定理 37.8 (连续时间风险溢价公式). 若

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_S dt + \sigma_S dW_t, \quad \frac{dM_t}{M_t} = -r_t dt - \eta_t dW_t,$$

且资产不支付股利, 则

$$\mu_S - r_t = \sigma_S \eta_t.$$

证明. 由 Itô 乘积公式,

$$\frac{d(M_t S_t)}{M_t S_t} = \frac{dM_t}{M_t} + \frac{dS_t}{S_t} + \frac{dM_t}{M_t} \frac{dS_t}{S_t}.$$

漂移项为

$$-r_t + \mu_S - \eta_t \sigma_S.$$

定价核要求 $M_t S_t$ 为鞅, 因此漂移为零:

$$-r_t + \mu_S - \eta_t \sigma_S = 0.$$

整理得到公式。 □

例 37.16 (价格风险的单位补偿). 若 $\eta = 0.4$ 、资产波动率 $\sigma_S = 0.25$, 则风险溢价为

$$\mu_S - r = 0.25 \times 0.4 = 0.10.$$

资产越暴露于定价核风险, 要求的超额收益越高。

命题 37.3 (CRRA 消费风险溢价). 若消费增长满足

$$\frac{dc_t}{c_t} = \mu_c dt + \sigma_c dW_t,$$

且 $u(c) = c^{1-\gamma}/(1-\gamma)$, 则随机贴现因子的扩散项为

$$\frac{dM_t}{M_t} = \dots - \gamma \sigma_c dW_t.$$

因此单因子资产的风险溢价满足

$$\mu_S - r = \gamma \sigma_S \sigma_c.$$

证明. CRRA 定价核为

$$M_t = e^{-\rho t} c_t^{-\gamma} / c_0^{-\gamma}.$$

对 $\log M_t = -\rho t - \gamma \log c_t + \text{constant}$ 使用 Itô 形式可见, dW_t 项为

$$-\gamma \sigma_c dW_t.$$

因此 $\eta = \gamma \sigma_c$ 。代入连续时间风险溢价公式

$$\mu_S - r = \sigma_S \eta$$

得到结论。 □

例 37.17 (消费 CAPM 的直觉). 若某资产在消费低迷时上涨, 即它与消费增长的协方差为负, 则它提供保险, 风险溢价可以较低甚至为负。若资产在消费高涨时上涨、低迷时下跌, 则它加剧消费风险, 需要正风险溢价补偿。

例 37.18 (股权溢价难题的入口). 公式

$$\mu_S - r = \gamma \sigma_S \sigma_c$$

说明若消费增长波动 σ_c 很小, 要解释很高的股权溢价就需要很大的 γ 。这就是消费型资产定价中经典张力的入口: 平滑消费与高风险溢价并不容易同时匹配。

37.7 本章小结

Merton 问题把连续时间金融中的三条线合在一起: 财富 SDE 描述预算约束, HJB 描述最优消费和投资, 边际效用过程生成随机贴现因子。CRRA 偏好给出清楚的显式结构: 风险资产份额由风险溢价、波动率和风险厌恶决定; 消费财富比由耐心、投资机会和风险厌恶共同决定; 定价核的波动决定风险溢价。下一章将在这个基础上进入连续时间异质主体模型, 让不同个体的财富和状态分布成为新的核心对象。

37.8 Exercises

习题 37.1. 写出含消费和风险资产投资的财富 SDE。

习题 37.2. 把财富 SDE 改写为风险资产份额 ω_t 和消费财富比 m_t 的形式。

习题 37.3. 解释 π_t 和 ω_t 的区别。

习题 37.4. 写出有限期 Merton 问题的目标函数。

习题 37.5. 推导 Merton HJB 方程。

习题 37.6. 从 HJB 推导消费一阶条件。

习题 37.7. 从 HJB 推导风险资产金额的一阶条件。

习题 37.8. 定义值函数诱导的风险容忍度, 并用它写出最优风险资产金额。

习题 37.9. 对 CRRA 效用 $u(c) = c^{1-\gamma}/(1-\gamma)$, 计算 $u'(c)$ 。

习题 37.10. 若 $V(t, x) = A(t)x^{1-\gamma}/(1-\gamma)$, 计算 V_x, V_{xx} 。

习题 37.11. 推导 CRRA Merton 问题中的最优风险资产份额。

习题 37.12. 说明为什么 CRRA 下最优风险资产份额不依赖财富水平。

习题 37.13. 给定 $\mu - r = 0.06, \sigma = 0.2, \gamma = 3$, 计算最优风险资产份额。

习题 37.14. 推导 CRRA 下的最优消费规则 $c = A^{-1/\gamma}x$ 。

习题 37.15. 若 $A = 81, \gamma = 4, x = 100$, 计算最优消费率。

习题 37.16. 推导有限期 CRRA 系数 $A(t)$ 的 ODE。

习题 37.17. 解释终端效用系数 κ 如何给出 $A(T)$ 。

习题 37.18. 写出无限期 CRRA Merton 问题中的消费财富比公式。

习题 37.19. 说明无限期平稳解为什么要求 $m^* > 0$ 。

习题 37.20. 给定 $\rho = 0.04, r = 0.02, \mu - r = 0.06, \sigma = 0.2, \gamma = 3$, 计算 m^* 。

习题 37.21. 推导对数效用下的最优消费规则。

习题 37.22. 推导对数效用下的最优风险资产份额。

习题 37.23. 解释对数效用下消费财富比为什么等于 ρ 。

习题 37.24. 定义由边际效用生成的随机贴现因子 M_t 。

习题 37.25. 对 CRRA 偏好, 写出 M_t 与消费 c_t 的关系。

习题 37.26. 解释为什么低消费状态中的支付更有价值。

习题 37.27. 若 $dc_t/c_t = \mu_c dt + \sigma_c dW_t$, 推导 CRRA 定价核的扩散项。

习题 37.28. 写出连续时间 SDF 动态 $dM_t/M_t = -r_t dt - \eta_t dW_t$ 下的风险溢价公式。

习题 37.29. 证明 $\mu_S - r_t = \sigma_S \eta_t$ 。

习题 37.30. 推导 CRRA 消费风险溢价公式 $\mu_S - r = \gamma \sigma_S \sigma_c$ 。

习题 37.31. 说明 Merton 投资份额和 Black-Scholes 中市场风险价格 λ 的关系。

习题 37.32. 解释为什么高波动率会降低最优风险资产份额。

习题 37.33. 说明借贷约束会如何改变 Merton 解。

习题 37.34. 说明 Merton 模型如何为代表性主体资产定价提供接口。

习题 37.35. 列出本章与 Ch37 异质主体模型之间的三个连接点。

37.9 Solutions

本章题解的主线是：财富方程给出约束，HJB 给出最优性条件，CRRA 齐次性把 PDE 化为 ODE 和常数策略，边际效用过程则把最优消费问题连接到资产定价核。

解答 37.1. 财富 SDE 为

$$dX_t = [rX_t + \pi_t(\mu - r) - c_t]dt + \pi_t \sigma dW_t.$$

其中 π_t 是投入风险资产的金额， c_t 是消费流量。

解答 37.2. 当 $X_t > 0$ 时，令

$$\omega_t = \frac{\pi_t}{X_t}, \quad m_t = \frac{c_t}{X_t}.$$

把财富方程除以 X_t ，得到

$$\frac{dX_t}{X_t} = [r + \omega_t(\mu - r) - m_t]dt + \omega_t \sigma dW_t.$$

解答 37.3. π_t 是金额，单位与财富相同； ω_t 是比例，等于 π_t/X_t 。财富变化时，固定 π_t 和固定 ω_t 是不同策略。CRRA 解通常给出固定比例 ω^* 。

解答 37.4. 有限期目标函数为

$$\sup_{c, \pi} \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\rho(s-t)} u(c_s) ds + e^{-\rho(T-t)} g(X_T) \mid X_t = x \right].$$

第一项是消费效用，第二项是终端财富效用。

解答 37.5. 动态规划给出

$$V(t, x) = \max_{c, \pi} \{u(c)dt + e^{-\rho dt} \mathbb{E}[V(t + dt, X_{t+dt})]\}.$$

对 V 用 Itô 展开并保留 dt 项, 移项后得到

$$0 = V_t + \max_{c, \pi} \left\{ u(c) + V_x[rx + \pi(\mu - r) - c] + \frac{1}{2}V_{xx}\pi^2\sigma^2 \right\} - \rho V.$$

解答 37.6. HJB 中关于 c 的项为

$$u(c) - V_x c.$$

内点最优满足

$$u'(c^*) - V_x = 0,$$

即

$$u'(c^*) = V_x.$$

解答 37.7. HJB 中关于 π 的项为

$$V_x \pi(\mu - r) + \frac{1}{2}V_{xx}\pi^2\sigma^2.$$

一阶条件为

$$V_x(\mu - r) + V_{xx}\pi^*\sigma^2 = 0.$$

因此

$$\pi^* = -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{V_x}{V_{xx}}.$$

解答 37.8. 风险容忍度定义为

$$\mathcal{T}(t, x) = -\frac{V_x(t, x)}{V_{xx}(t, x)}.$$

于是

$$\pi^* = \frac{\mu - r}{\sigma^2} \mathcal{T}(t, x).$$

它把投资需求分成风险补偿和愿意承担风险的财富尺度。

解答 37.9. 对

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

求导, 得

$$u'(c) = c^{-\gamma}.$$

解答 37.10. 若

$$V(t, x) = \frac{A(t)x^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

则

$$V_x = A(t)x^{-\gamma}, \quad V_{xx} = -\gamma A(t)x^{-\gamma-1}.$$

解答 37.11. 把上一题代入

$$\pi^* = -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{V_x}{V_{xx}},$$

得到

$$\pi^* = \frac{\mu - r}{\gamma \sigma^2} x.$$

所以

$$\omega^* = \frac{\pi^*}{x} = \frac{\mu - r}{\gamma \sigma^2}.$$

解答 37.12. CRRA 值函数是财富的齐次函数, 因此风险容忍度

$$-\frac{V_x}{V_{xx}} = \frac{x}{\gamma}$$

与财富成正比。最优风险资产金额与财富成正比, 所以比例 ω^* 不依赖财富水平。

解答 37.13.

$$\omega^* = \frac{0.06}{3 \cdot 0.2^2} = \frac{0.06}{0.12} = 0.5.$$

最优风险资产份额为 50%。

解答 37.14. 消费一阶条件为

$$c^{-\gamma} = V_x = Ax^{-\gamma}.$$

因此

$$c = A^{-1/\gamma} x.$$

这说明消费财富比为 $A^{-1/\gamma}$ 。

解答 37.15.

$$m = A^{-1/\gamma} = 81^{-1/4} = 3^{-1} = \frac{1}{3}.$$

若 $x = 100$, 则

$$c = mx = \frac{100}{3}.$$

解答 37.16. 把 CRRA 猜测代入 HJB，并使用最优消费和投资。投资项给出

$$Ax^{1-\gamma} \frac{(\mu - r)^2}{2\gamma\sigma^2}.$$

消费项合并为

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} A^{(\gamma-1)/\gamma} x^{1-\gamma}.$$

再合并 V_t 、无风险项和贴现项，得到

$$A' = \rho A - (1-\gamma)A \left[r + \frac{(\mu - r)^2}{2\gamma\sigma^2} \right] - \gamma A^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

解答 37.17. 若终端效用为

$$g(x) = \kappa \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

而值函数猜测为

$$V(T, x) = A(T) \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

比较两式得

$$A(T) = \kappa.$$

解答 37.18. 无限期平稳解中

$$m^* = \frac{\rho - (1-\gamma) \left[r + \frac{(\mu-r)^2}{2\gamma\sigma^2} \right]}{\gamma}.$$

风险资产份额仍为

$$\omega^* = \frac{\mu - r}{\gamma\sigma^2}.$$

解答 37.19. 若 $m^* \leq 0$ ，最优消费率非正，这与 $c_t \geq 0$ 且通常要求内点消费相冲突。平稳 CRRA 解需要正消费财富比，才能让财富和效用问题有经济意义。

解答 37.20. 先计算

$$\frac{(\mu - r)^2}{2\gamma\sigma^2} = \frac{0.06^2}{2 \cdot 3 \cdot 0.2^2} = 0.015.$$

因此

$$m^* = \frac{0.04 - (1-3)(0.02 + 0.015)}{3} = \frac{0.04 + 0.07}{3} \approx 0.0367.$$

解答 37.21. 对数效用下猜测

$$V(x) = a + b \log x.$$

消费一阶条件为

$$\frac{1}{c} = V_x = \frac{b}{x},$$

所以 $c = x/b$ 。HJB 中 $\log x$ 的系数要求 $b = 1/\rho$ ，因此

$$c^* = \rho x.$$

解答 37.22. 对数效用下

$$V_x = \frac{b}{x}, \quad V_{xx} = -\frac{b}{x^2}.$$

代入投资一阶条件:

$$\pi^* = -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{V_x}{V_{xx}} = \frac{\mu - r}{\sigma^2} x.$$

所以

$$\omega^* = \frac{\mu - r}{\sigma^2}.$$

解答 37.23. 对数效用的值函数中 $\log x$ 的系数由贴现率固定为 $1/\rho$ 。消费一阶条件给出 $c = x/b$, 因此 $c = \rho x$ 。投资机会只影响常数项, 不影响消费比例。

解答 37.24. 由边际效用生成的随机贴现因子为

$$M_t = e^{-\rho t} \frac{u'(c_t)}{u'(c_0)}.$$

它用未来边际效用相对于当前边际效用的比率给未来支付定价。

解答 37.25. CRRA 下 $u'(c) = c^{-\gamma}$, 所以

$$M_t = e^{-\rho t} \left(\frac{c_t}{c_0} \right)^{-\gamma}.$$

解答 37.26. 低消费状态中, 边际效用 $u'(c)$ 高。若某资产在这些状态支付, 它能缓解稀缺消费带来的痛苦, 因此保险价值高, 当前价格也更高, 要求收益率更低。

解答 37.27. CRRA 定价核满足

$$\log M_t = -\rho t - \gamma \log c_t + \text{constant}.$$

若

$$\frac{dc_t}{c_t} = \mu_c dt + \sigma_c dW_t,$$

则 $\log c_t$ 的扩散项为 $\sigma_c dW_t$ 。因此 $\log M_t$ 的扩散项为

$$-\gamma \sigma_c dW_t,$$

也即 dM_t/M_t 的扩散项为 $-\gamma \sigma_c dW_t$ 。

解答 37.28. 若

$$\frac{dM_t}{M_t} = -r_t dt - \eta_t dW_t,$$

且资产

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_S dt + \sigma_S dW_t,$$

则风险溢价为

$$\mu_S - r_t = \sigma_S \eta_t.$$

解答 37.29. 由 Itô 乘积公式,

$$\frac{d(MS)}{MS} = (-r_t + \mu_S - \eta_t \sigma_S) dt + (\sigma_S - \eta_t) dW_t.$$

无股利资产的 MS 应为鞅, 漂移为零, 所以

$$\mu_S - r_t = \sigma_S \eta_t.$$

解答 37.30. CRRA 消费定价核扩散项为 $-\gamma \sigma_c dW_t$, 所以 $\eta = \gamma \sigma_c$. 代入

$$\mu_S - r = \sigma_S \eta$$

得到

$$\mu_S - r = \gamma \sigma_S \sigma_c.$$

解答 37.31. 市场风险价格为

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}.$$

Merton 份额可写为

$$\omega^* = \frac{\lambda}{\gamma \sigma}.$$

因此投资份额随 Sharpe ratio 上升而上升, 随风险厌恶和波动率上升而下降。

解答 37.32. 风险资产带来的补偿是一阶项 $\omega(\mu - r)$, 风险成本在 HJB 中通过二阶项体现, 大小与 $\omega^2 \sigma^2$ 成正比。波动率越高, 同样头寸带来的效用风险越大, 因此最优份额下降。

解答 37.33. 若存在借贷约束或杠杆上限, 例如 $\omega \leq 1$, 无约束 Merton 解若超过上限就不可行。最优策略会变成

$$\omega^{\text{constrained}} = \min\{\omega^*, 1\}$$

这类截断形式, 具体取决于约束集合。

解答 37.34. 代表性主体最优消费的一阶条件给出边际效用定价核

$$M_t = e^{-\rho t} u'(c_t) / u'(c_0).$$

因此 Merton 模型不仅描述个人选择, 还说明均衡资产价格必须与代表性主体的边际效用过程一致。

解答 37.35. 三个连接点是: 第一, 个体财富 X_t 的 SDE 会成为分布演化的状态; 第二, 消费和投资政策从 HJB 得到, 会变成异质主体模型中的策略函数; 第三, 资产价格或利率需要由总资产需求和市场清算共同决定。

37.10 Computation Lab

本章计算实验的目标是把 Merton 问题中的闭式策略、HJB 降维和定价核关系变成可运行的数值检查。

1. **Merton 风险资产份额。** 给定 μ, r, σ, γ , 计算

$$\omega^* = \frac{\mu - r}{\gamma \sigma^2}.$$

改变 γ 和 σ , 画出最优份额的敏感度曲线。

2. **无限期消费财富比。** 给定 $\rho, r, \mu, \sigma, \gamma$, 计算

$$m^* = \frac{\rho - (1 - \gamma) \left[r + \frac{(\mu - r)^2}{2\gamma\sigma^2} \right]}{\gamma}.$$

检查参数组合是否满足 $m^* > 0$ 。

3. **最优财富路径模拟。** 使用

$$\frac{dX_t}{X_t} = [r + \omega^*(\mu - r) - m^*]dt + \omega^*\sigma dW_t$$

模拟财富路径, 并记录消费 $c_t = m^*X_t$ 。

4. **有限期系数 ODE。** 对给定终端条件 $A(T) = \kappa$, 反向求解

$$A' = \rho A - (1 - \gamma)A \left[r + \frac{(\mu - r)^2}{2\gamma\sigma^2} \right] - \gamma A^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

再计算 $m(t) = A(t)^{-1/\gamma}$ 。

5. **对数效用校验。** 对 $\gamma = 1$ 的对数效用情形, 比较

$$c_t = \rho X_t, \quad \omega^* = \frac{\mu - r}{\sigma^2}$$

与接近 $\gamma = 1$ 的 CRRA 数值结果。

6. **消费型 SDF 和风险溢价。** 模拟消费增长

$$\frac{dc_t}{c_t} = \mu_c dt + \sigma_c dW_t,$$

构造

$$M_t = e^{-\rho t} (c_t/c_0)^{-\gamma},$$

并检验资产风险溢价

$$\mu_S - r = \gamma \sigma_S \sigma_c$$

对 γ 、 σ_c 和 σ_S 的敏感性。

第三十八章 连续时间异质性主体模型

38.1 为什么需要分布

Ch36 的 Merton 问题只有一个代表性投资者，状态是财富 X_t ，最优消费和投资由一个 HJB 决定。异质性主体模型中，每个个体都有自己的财富、收入或生产率状态。宏观变量不再只由“一个代表性状态”决定，而是由所有个体状态的分布决定。

若个体状态为 x ，时点 t 的密度为 $m(t, x)$ ，则聚合资产可以写成

$$A_t = \int x m(t, x) dx.$$

价格、工资、利率和总储蓄都可能依赖这个分布。

定义 38.1 (异质性主体状态分布). 若 $m(t, x) \geq 0$ 且

$$\int_{\Omega} m(t, x) dx = 1,$$

则 $m(t, \cdot)$ 表示时点 t 个体状态 $x \in \Omega$ 的概率密度。对函数 ϕ ，横截面平均为

$$\int_{\Omega} \phi(x) m(t, x) dx.$$

例 38.1 (财富分布和平均财富). 若财富 $x \in [0, 10]$ ，密度为 $m(t, x)$ ，则平均财富为

$$\bar{x}_t = \int_0^{10} x m(t, x) dx.$$

如果 $\bar{x}_t$ 相同但分布形状不同，借贷约束附近的人数、储蓄反应和总需求仍可能完全不同。

例 38.2 (两类主体不是连续分布). 若经济中只有贫穷和富有两类主体，贫穷占比为 p_t ，富有占比为 $1 - p_t$ ，则分布可以表示为两个点质量。连续密度模型是这种思想的连续状态版本。

38.2 个体状态过程和生成元

给定价格和政策函数后，个体状态常写成扩散过程

$$dX_t = g(X_t)dt + \sigma_x(X_t)dW_t.$$

其中 g 是状态漂移， σ_x 是个体风险。若还有离散收入状态 z ，则状态可以是 (x, z) ，并由 Poisson 转移或有限状态 Markov 链描述 z 的变化。

定义 38.2 (生成元). 对扩散

$$dX_t = g(X_t)dt + \sigma_x(X_t)dW_t,$$

其生成元作用在光滑测试函数 ϕ 上为

$$\mathcal{A}\phi(x) = g(x)\phi'(x) + \frac{1}{2}\sigma_x(x)^2\phi''(x).$$

例 38.3 (确定性储蓄漂移). 若个体资产满足

$$da_t = s(a_t)dt,$$

则 $\sigma_x = 0$ ，生成元为

$$\mathcal{A}\phi(a) = s(a)\phi'(a).$$

这时分布只沿着储蓄漂移方向移动，没有扩散平滑。

例 38.4 (带收入风险的资产漂移). 若

$$da_t = [wz_t + ra_t - c(a_t, z_t)]dt,$$

则资产漂移为

$$s(a, z) = wz + ra - c(a, z).$$

收入状态 z 高时，给定消费政策下储蓄漂移通常更高。

定理 38.1 (生成元与 HJB 的连接). 若个体状态过程在控制 u 下的生成元为 $\mathcal{A}^u$ ，即时收益为 $R(x, u)$ ，贴现率为 ρ ，则平稳值函数满足

$$\rho v(x) = \max_u \{R(x, u) + \mathcal{A}^u v(x)\}.$$

证明. 动态规划在小区间 dt 上给出

$$v(x) = \max_u \{R(x, u)dt + e^{-\rho dt}\mathbb{E}[v(X_{dt}) \mid X_0 = x]\}.$$

由生成元定义，

$$\mathbb{E}[v(X_{dt}) \mid X_0 = x] = v(x) + \mathcal{A}^u v(x)dt + o(dt).$$

再用 $e^{-\rho dt} = 1 - \rho dt + o(dt)$ ，移项除以 dt ，得到 HJB. □

例 38.5 (消费储蓄 HJB). 若个体选择消费 c , 资产漂移为

$$s(a, z) = wz + ra - c,$$

且 z 暂时固定, 则

$$\rho v(a, z) = \max_c \{u(c) + v_a(a, z)[wz + ra - c]\}.$$

如果 z 会跳转, 还要在右边加入状态转换项。

38.3 Kolmogorov forward 方程

HJB 描述个体如何选择; 分布方程描述在这些选择下, 个体状态密度如何演化。对扩散过程

$$dX_t = g(X_t)dt + \sigma_x(X_t)dW_t,$$

密度 $m(t, x)$ 满足 Kolmogorov forward 方程, 也称 Fokker-Planck 方程:

$$\partial_t m(t, x) = -\partial_x [g(x)m(t, x)] + \frac{1}{2}\partial_{xx} [\sigma_x(x)^2 m(t, x)].$$

定理 38.2 (Kolmogorov forward 方程). 若 X_t 的生成元为

$$\mathcal{A}\phi = g\phi' + \frac{1}{2}\sigma_x^2\phi'',$$

且密度 m 足够光滑并满足合适边界条件, 则

$$\partial_t m = -\partial_x(gm) + \frac{1}{2}\partial_{xx}(\sigma_x^2 m).$$

证明. 对任意光滑测试函数 ϕ , 有

$$\frac{d}{dt} \int \phi(x)m(t, x)dx = \int \mathcal{A}\phi(x)m(t, x)dx.$$

右边为

$$\int g\phi' m dx + \frac{1}{2} \int \sigma_x^2 \phi'' m dx.$$

对第一项分部积分一次, 对第二项分部积分两次, 并假设边界项为零, 得到

$$\int \phi \left[-\partial_x(gm) + \frac{1}{2}\partial_{xx}(\sigma_x^2 m) \right] dx.$$

由于对所有测试函数 ϕ 成立, 括号内即为 $\partial_t m$ 。 □

例 38.6 (纯漂移的密度方程). 若

$$dX_t = g(X_t)dt,$$

则

$$\partial_t m = -\partial_x(gm).$$

这像一条守恒方程: 密度被速度 $g(x)$ 推着流动。

例 38.7 (常数扩散的密度方程). 若

$$dX_t = \sigma dW_t,$$

则

$$\partial_t m = \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{xx} m.$$

这就是热方程。个体状态的不确定性会让分布扩散和平滑。

定理 38.3 (概率质量守恒). 若边界通量为零, 则 *Kolmogorov forward* 方程保持总质量:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} m(t, x) dx = 0.$$

证明. 把 KF 方程在 Ω 上积分:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} m dx = \int_{\Omega} \left[-\partial_x(gm) + \frac{1}{2} \partial_{xx}(\sigma_x^2 m) \right] dx.$$

右边等于边界通量之差。若边界没有概率流入或流出, 该项为零, 所以总质量保持不变。□

例 38.8 (反射边界). 若资产下界为 $\underline{a}$, 借贷约束阻止个体越过该边界。数学上常用零通量条件表达:

$$s(\underline{a}, z)m(t, \underline{a}, z) - \frac{1}{2} \partial_a[\sigma_a^2 m](t, \underline{a}, z) = 0.$$

它表示概率质量不会从状态空间左端流失。

38.4 离散收入状态

宏观异质性主体模型常有连续资产 a 和离散收入状态 $z \in \{z_1, \dots, z_N\}$ 。若收入状态按强度矩阵 $\Lambda = (\lambda_{ij})$ 转移, 则每个收入状态有一个密度 $m_i(t, a)$ 。

命题 38.1 (带离散状态的 KF 方程). 若资产漂移为 $s_i(a)$, 收入状态从 i 到 j 的转移强度为 λ_{ij} , 则

$$\partial_t m_i(t, a) = -\partial_a[s_i(a)m_i(t, a)] + \sum_{j \neq i} \lambda_{ji} m_j(t, a) - \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} m_i(t, a).$$

证明. 第一项来自资产漂移导致的密度流动。第二项是从其他状态 j 跳入状态 i 的概率流入。第三项是从状态 i 跳到其他状态的概率流出。把这些概率流相加, 就得到密度在 i 状态下的变化率。 $\square$

例 38.9 (就业和失业两状态). 设就业 e 以强度 λ_{eu} 变成失业 u , 失业以强度 λ_{ue} 找到工作。则

$$\partial_t m_e = -\partial_a(s_e m_e) - \lambda_{eu} m_e + \lambda_{ue} m_u,$$

$$\partial_t m_u = -\partial_a(s_u m_u) + \lambda_{eu} m_e - \lambda_{ue} m_u.$$

就业密度减少的转移项, 正好是失业密度增加的转移项。

定理 38.4 (两状态 Markov 平稳分布). 若只有状态 e, u , 转移强度为 λ_{eu} 和 λ_{ue} , 则离散状态的平稳概率为

$$p_e = \frac{\lambda_{ue}}{\lambda_{eu} + \lambda_{ue}}, \quad p_u = \frac{\lambda_{eu}}{\lambda_{eu} + \lambda_{ue}}.$$

证明. 平稳时流入就业等于流出就业:

$$\lambda_{ue} p_u = \lambda_{eu} p_e.$$

又

$$p_e + p_u = 1.$$

由第一式得 $p_u = (\lambda_{eu}/\lambda_{ue})p_e$ 。代入总和为一, 解得公式。 $\square$

例 38.10 (失业率). 若失业率退出强度 $\lambda_{ue} = 0.5$, 就业丧失强度 $\lambda_{eu} = 0.05$, 则平稳失业概率为

$$p_u = \frac{0.05}{0.55} \approx 0.091.$$

高找工作强度会降低长期失业占比。

38.5 平稳 HJB-KF 系统

在平稳均衡中, 价格不随时间变化, 个体策略不随时间变化, 分布也不随时间变化。系统由两部分组成:

$$\rho v = \max_c \{u(c) + \mathcal{A}^c v\},$$

$$0 = (\mathcal{A}^c)^\dagger m.$$

第一式是 HJB, 第二式是 KF 的平稳版本, 其中 $\dagger$ 表示生成元的伴随算子。

定理 38.5 (平稳分布条件). 若密度 $m(x)$ 在给定策略下平稳, 则

$$0 = -\partial_x[g(x)m(x)] + \frac{1}{2}\partial_{xx}[\sigma_x(x)^2m(x)].$$

反过来, 若 $m \geq 0$ 、积分为一、满足该方程和边界条件, 则它是该状态过程的平稳密度。

证明. 平稳表示 $\partial_t m = 0$ 。把这一条件代入 KF 方程, 得到所述方程。反过来, 若初始密度为满足该方程的 m , 则 KF 右边为零, 密度不随时间变化, 因此为平稳密度。□

例 38.11 (零漂移平稳条件). 若没有扩散且 $g(x)m(x)$ 的通量为常数, 零通量边界要求该常数为零。因此若 $m(x) > 0$, 就需要 $g(x) = 0$ 。纯确定性漂移模型通常不会自然生成平滑平稳分布, 除非有状态转移、扩散或边界机制。

例 38.12 (HJB-KF 的前后关系). HJB 给出策略 $c(a, z)$, 策略决定资产漂移

$$s(a, z) = wz + ra - c(a, z).$$

KF 再用这个漂移推动密度 $m(a, z)$ 。所以求解时常见顺序是: 猜价格, 解 HJB, 得到策略, 解 KF, 计算聚合量, 再检查价格是否清算。

38.6 聚合与市场清算

给定分布 $m(a, z)$, 聚合资产为

$$A = \sum_z \int a m(a, z) da,$$

聚合劳动效率为

$$L = \sum_z \int z m(a, z) da.$$

若生产函数为 $F(K, L)$, 竞争性要素价格满足

$$r + \delta = F_K(K, L), \quad w = F_L(K, L).$$

资产市场清算要求家庭持有的资产等于企业资本:

$$A = K.$$

定理 38.6 (由 KF 推出聚合矩动态). 若资产密度满足

$$\partial_t m = -\partial_a(sm)$$

且边界通量项为零，则聚合资产

$$A_t = \int a m(t, a) da$$

满足

$$\dot{A}_t = \int s(a) m(t, a) da.$$

证明. 对 A_t 求导:

$$\dot{A}_t = \int a \partial_t m(t, a) da = - \int a \partial_a (sm) da.$$

分部积分得

$$- [a s(a) m(t, a)]_{\partial\Omega} + \int s(a) m(t, a) da.$$

零通量边界使边界项为零，因此得到公式。 $\square$

例 38.13 (总储蓄等于总资产变化). 若 $s(a, z) = wz + ra - c(a, z)$ ，则

$$\dot{A}_t = \sum_z \int [wz + ra - c(a, z)] m(t, a, z) da.$$

这就是横截面个体储蓄的总和。

命题 38.2 (市场清算固定点). 给定利率 r ，家庭问题和 KF 方程决定资产供给 $A^s(r)$ 。企业需求决定资本需求 $K^d(r)$ 。平稳均衡利率满足

$$A^s(r) = K^d(r).$$

证明. 在给定 r 下，工资由企业一阶条件或外生条件给出。家庭 HJB-KF 系统给出平稳分布，进而给出聚合资产供给 $A^s(r)$ 。企业最优性给出资本需求 $K^d(r)$ 。市场清算要求家庭持有的资产正好等于企业使用的资本，因此均衡是方程 $A^s(r) = K^d(r)$ 的根。 $\square$

例 38.14 (利率搜索). 若某个试探利率下 $A^s(r) > K^d(r)$ ，家庭想持有的资产多于企业需要的资本，利率通常需要下降以降低储蓄吸引力并提高资本需求。数值算法常在利率上做二分搜索。

38.7 借贷约束和边界

异质主体模型的关键经济机制常来自约束。最简单的是资产下界

$$a_t \geq \underline{a}.$$

在下界处，策略必须保证状态不会流出可行区域。

定义 38.3 (借贷约束边界条件). 若资产状态满足 $a \geq \underline{a}$, 则在 $a = \underline{a}$ 处可行消费必须满足

$$s(\underline{a}, z) = wz + r\underline{a} - c(\underline{a}, z) \geq 0$$

或由反射机制保证概率不流出状态空间。

例 38.15 (约束处的消费上限). 若 $\underline{a} = 0$, 且失业收入 $wz = 1$, 利率项为零, 则约束处消费不能超过 1:

$$c(0, z) \leq 1.$$

否则资产漂移为负, 个体会试图进入不可行的负资产区域。

例 38.16 (边际效用和约束). 在无约束内部, Euler 条件通常让当前边际效用和未来边际价值平衡。约束绑定时, 个体想借更多但不能借, 消费会低于无约束水平, 边际效用较高。这就是借贷约束放大异质性的基本渠道。

38.8 有限差分入口

连续状态模型最终常要离散化。设资产网格

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_I.$$

HJB 中的一阶导数要根据漂移方向使用迎风差分: 若 $s_i > 0$, 用后向差分; 若 $s_i < 0$, 用前向差分。这保证概率流动方向和数值信息方向一致。

定义 38.4 (迎风差分). 对网格函数 $v_i = v(a_i)$, 若漂移 $s_i > 0$, 取

$$v_a(a_i) \approx \frac{v_i - v_{i-1}}{a_i - a_{i-1}}.$$

若 $s_i < 0$, 取

$$v_a(a_i) \approx \frac{v_{i+1} - v_i}{a_{i+1} - a_i}.$$

例 38.17 (为什么要迎风). 若漂移 $s_i > 0$, 状态从左向右流动, 点 a_i 的值受左侧状态影响更直接, 因此使用后向差分。若用反方向差分, 数值解可能出现振荡或违反单调性。

例 38.18 (离散 KF 是转移矩阵). 在网格上, KF 方程常写成

$$\dot{m} = G^\top m,$$

其中 G 是 HJB 离散生成元矩阵。平稳分布满足

$$G^\top m = 0, \quad \sum_i m_i = 1.$$

这和有限状态 Markov 链的平稳分布完全同构。

38.9 本章小结

连续时间异质性主体模型的核心是两条方程同时成立：HJB 描述个体在给定价格下的最优行为，Kolmogorov forward 方程描述这些行为如何改变横截面分布。分布再通过聚合资产、劳动和市场清算影响价格。这样，宏观均衡成为一个由个体最优、分布演化和市场清算组成的固定点。下一章将在这个框架上加入不完全市场、金融摩擦和宏观金融机制。

38.10 Exercises

习题 38.1. 解释为什么异质性主体模型需要跟踪分布 $m(t, x)$ 。

习题 38.2. 定义状态密度 $m(t, x)$ ，并写出总质量条件。

习题 38.3. 给定密度 $m(t, x)$ ，写出平均财富公式。

习题 38.4. 对扩散 $dX_t = g(X_t)dt + \sigma_x(X_t)dW_t$ ，写出生成元。

习题 38.5. 若 $da_t = s(a_t)dt$ ，写出生成元。

习题 38.6. 从动态规划推导平稳 HJB 形式 $\rho v = \max_u \{R + \mathcal{A}^u v\}$ 。

习题 38.7. 写出消费储蓄问题中资产漂移 $s(a, z)$ 。

习题 38.8. 写出扩散过程对应的 Kolmogorov forward 方程。

习题 38.9. 用测试函数和分部积分推导 KF 方程。

习题 38.10. 纯漂移过程 $dX_t = g(X_t)dt$ 的密度方程是什么？

习题 38.11. 常数扩散过程 $dX_t = \sigma dW_t$ 的密度方程是什么？

习题 38.12. 证明零通量边界下概率质量守恒。

习题 38.13. 解释借贷约束处零通量边界的经济含义。

习题 38.14. 写出带离散收入状态的 KF 方程。

习题 38.15. 在就业-失业两状态模型中写出 m_e, m_u 的转移项。

习题 38.16. 推导两状态 Markov 链的平稳分布。

习题 38.17. 若 $\lambda_{eu} = 0.04, \lambda_{ue} = 0.36$ ，计算平稳失业率。

习题 38.18. 定义平稳分布。

习题 38.19. 写出平稳 KF 方程。

习题 38.20. 解释 HJB-KF 系统中 HJB 和 KF 的先后关系。

习题 38.21. 给定 $m(a, z)$, 写出聚合资产 A 。

习题 38.22. 给定 $m(a, z)$, 写出聚合劳动效率 L 。

习题 38.23. 若生产函数为 $F(K, L)$, 写出竞争性要素价格条件。

习题 38.24. 证明纯漂移 KF 下 $\dot{A}_t = \int s(a)m(t, a)da$ 。

习题 38.25. 说明资产市场清算条件 $A = K$ 的含义。

习题 38.26. 把均衡利率写成 $A^s(r) = K^d(r)$ 的固定点。

习题 38.27. 若 $A^s(r) > K^d(r)$, 解释利率搜索方向。

习题 38.28. 写出借贷约束 $a \geq \underline{a}$ 下的漂移可行性条件。

习题 38.29. 若 $\underline{a} = 0, wz = 2, r = 0$, 约束处消费上限是多少?

习题 38.30. 解释约束绑定时边际效用为什么较高。

习题 38.31. 定义迎风差分。

习题 38.32. 说明为什么漂移为正时使用后向差分。

习题 38.33. 把离散 KF 写成矩阵形式。

习题 38.34. 写出离散平稳分布的线性方程组。

习题 38.35. 列出求解平稳异质性主体模型的一般计算步骤。

38.11 Solutions

本章题解的主线是：HJB 给出给定价格下的个体策略，KF 方程把策略变成分布演化，聚合和市场清算再把分布变成均衡价格。

解答 38.1. 异质性主体模型中，不同个体有不同财富、收入或生产率。总消费、总储蓄和价格不仅取决于平均状态，还取决于有多少人接近借贷约束、收入风险如何分布等。因此需要跟踪整个分布 $m(t, x)$ 。

解答 38.2. 状态密度 $m(t, x)$ 满足

$$m(t, x) \geq 0, \quad \int_{\Omega} m(t, x) dx = 1.$$

它表示时点 t 状态落在 x 附近的个体比例。

解答 38.3. 平均财富为

$$\bar{x}_t = \int_{\Omega} x m(t, x) dx.$$

若还有离散状态 z , 则平均财富为

$$\sum_z \int x m(t, x, z) dx.$$

解答 38.4. 生成元为

$$\mathcal{A}\phi(x) = g(x)\phi'(x) + \frac{1}{2}\sigma_x(x)^2\phi''(x).$$

它描述测试函数沿状态过程的瞬时期望变化率。

解答 38.5. 若

$$da_t = s(a_t)dt,$$

没有扩散项, 所以生成元为

$$\mathcal{A}\phi(a) = s(a)\phi'(a).$$

解答 38.6. 动态规划给出

$$v(x) = \max_u \{R(x, u)dt + e^{-\rho dt} \mathbb{E}[v(X_{dt})]\}.$$

由生成元定义,

$$\mathbb{E}[v(X_{dt})] = v(x) + \mathcal{A}^u v(x)dt + o(dt).$$

代入并使用 $e^{-\rho dt} = 1 - \rho dt + o(dt)$, 整理得

$$\rho v(x) = \max_u \{R(x, u) + \mathcal{A}^u v(x)\}.$$

解答 38.7. 若收入为 wz , 资产收益为 ra , 消费为 $c(a, z)$, 则资产漂移为

$$s(a, z) = wz + ra - c(a, z).$$

解答 38.8. 扩散过程

$$dX_t = g(X_t)dt + \sigma_x(X_t)dW_t$$

的密度满足

$$\partial_t m = -\partial_x(gm) + \frac{1}{2}\partial_{xx}(\sigma_x^2 m).$$

解答 38.9. 对任意测试函数 ϕ ,

$$\frac{d}{dt} \int \phi m dx = \int \mathcal{A} \phi m dx.$$

右边等于

$$\int g \phi' m dx + \frac{1}{2} \int \sigma_x^2 \phi'' m dx.$$

分部积分, 把导数从 ϕ 转移到 gm 和 $\sigma_x^2 m$, 得到

$$\int \phi \left[-\partial_x(gm) + \frac{1}{2} \partial_{xx}(\sigma_x^2 m) \right] dx.$$

因此括号内就是 $\partial_t m$ 。

解答 38.10. 纯漂移时 $\sigma_x = 0$, 所以

$$\partial_t m = -\partial_x(gm).$$

它是概率质量的守恒方程。

解答 38.11. 若 $g = 0$ 、 $\sigma_x = \sigma$ 为常数, 则

$$\partial_t m = \frac{1}{2} \sigma^2 \partial_{xx} m.$$

这就是热方程。

解答 38.12. 积分 KF 方程:

$$\frac{d}{dt} \int m dx = \int \left[-\partial_x(gm) + \frac{1}{2} \partial_{xx}(\sigma_x^2 m) \right] dx.$$

右边是边界通量。零通量边界使它为零, 所以

$$\frac{d}{dt} \int m dx = 0.$$

解答 38.13. 借贷约束处零通量表示个体不能越过资产下界。概率质量不能从状态空间流出; 经济上, 这表示约束阻止个体继续借债或进入不可行资产区域。

解答 38.14. 若离散状态为 i , 资产漂移为 $s_i(a)$, 转移强度为 λ_{ij} , 则

$$\partial_t m_i = -\partial_a(s_i m_i) + \sum_{j \neq i} \lambda_{ji} m_j - \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} m_i.$$

解答 38.15. 就业密度转移项为

$$-\lambda_{eu}m_e + \lambda_{ue}m_u.$$

失业密度转移项为

$$\lambda_{eu}m_e - \lambda_{ue}m_u.$$

两者相加为零，因此离散状态转移保持总人数。

解答 38.16. 平稳时

$$\lambda_{ue}p_u = \lambda_{eu}p_e, \quad p_e + p_u = 1.$$

解得

$$p_e = \frac{\lambda_{ue}}{\lambda_{eu} + \lambda_{ue}}, \quad p_u = \frac{\lambda_{eu}}{\lambda_{eu} + \lambda_{ue}}.$$

解答 38.17.

$$p_u = \frac{0.04}{0.04 + 0.36} = 0.1.$$

平稳失业率为 10%。

解答 38.18. 平稳分布是随时间不变的密度 $m(x)$ 。若以它作为初始分布，在给定策略和状态转移下，未来分布仍等于 m 。

解答 38.19. 平稳 KF 方程为

$$0 = -\partial_x(gm) + \frac{1}{2}\partial_{xx}(\sigma_x^2 m).$$

若有离散状态，还要加入状态间流入和流出项。

解答 38.20. HJB 在给定价格下求个体最优策略。策略决定状态漂移和转移强度。KF 用这些漂移和转移强度更新分布。因此计算上常先解 HJB，再解 KF。

解答 38.21. 聚合资产为

$$A = \sum_z \int a m(a, z) da.$$

如果没有离散状态，就写作

$$A = \int a m(a) da.$$

解答 38.22. 聚合劳动效率为

$$L = \sum_z \int z m(a, z) da.$$

它是个体劳动效率 z 的横截面平均。

解答 38.23. 竞争性要素价格满足

$$r + \delta = F_K(K, L), \quad w = F_L(K, L).$$

资本边际产出扣除折旧给出利率，劳动边际产出给出工资。

解答 38.24. 由

$$A_t = \int a m(t, a) da$$

得

$$\dot{A}_t = \int a \partial_t m(t, a) da = - \int a \partial_a (sm) da.$$

分部积分并用零通量边界消去边界项，得到

$$\dot{A}_t = \int s(a) m(t, a) da.$$

解答 38.25. 资产市场清算 $A = K$ 表示家庭想持有的总资产等于企业用于生产的资本。若二者不等，利率或价格必须调整。

解答 38.26. 给定 r ，家庭 HJB-KF 给出资产供给 $A^s(r)$ ，企业一阶条件给出资本需求 $K^d(r)$ 。均衡利率满足

$$A^s(r) = K^d(r).$$

解答 38.27. 若 $A^s(r) > K^d(r)$ ，资产供给过多。通常降低 r 会减少储蓄吸引力并提高资本需求，因此利率搜索应向下调整。具体单调性仍需由模型条件确认。

解答 38.28. 在 $a = \underline{a}$ 处，需要

$$s(\underline{a}, z) = wz + r\underline{a} - c(\underline{a}, z) \geq 0,$$

或用反射/零通量条件防止概率流出状态空间。

解答 38.29. 若 $\underline{a} = 0, wz = 2, r = 0$ ，约束处要求

$$2 - c(0, z) \geq 0.$$

因此消费上限为

$$c(0, z) \leq 2.$$

解答 38.30. 约束绑定时，个体想把未来资源转移到现在但不能借更多。当前消费被压低，边际效用 $u'(c)$ 较高。这个高边际效用体现了流动性约束的影子价值。

解答 38.31. 迎风差分根据漂移方向选择导数近似。若 $s_i > 0$ ，使用后向差分

$$\frac{v_i - v_{i-1}}{a_i - a_{i-1}}.$$

若 $s_i < 0$ ，使用前向差分

$$\frac{v_{i+1} - v_i}{a_{i+1} - a_i}.$$

解答 38.32. 漂移为正时，状态从左向右流动，网格点 a_i 的信息来自左侧。后向差分使用左侧点，符合状态流动方向，也有助于保持数值单调性。

解答 38.33. 离散 KF 常写作

$$\dot{m} = G^\top m,$$

其中 G 是离散生成元矩阵， m 是网格上的概率质量向量。

解答 38.34. 平稳分布满足

$$G^\top m = 0, \quad \mathbf{1}^\top m = 1.$$

第一式表示分布不变，第二式把概率质量归一化。

解答 38.35. 一般步骤是：猜测价格 r, w ；解个体 HJB 得到政策；用政策构造生成元；解 $G^\top m = 0$ 得到平稳分布；计算聚合资产和劳动；检查市场清算；若不清算，更新价格并重复。

38.12 Computation Lab

本章计算实验的目标是把 HJB-KF 系统拆成可检查的矩阵和网格对象。

1. 两状态收入平稳分布。给定 λ_{eu} 和 λ_{ue} ，计算

$$p_u = \frac{\lambda_{eu}}{\lambda_{eu} + \lambda_{ue}}, \quad p_e = 1 - p_u.$$

验证流入和流出相等。

2. 资产网格和迎风差分。构造 $a_1, \dots, a_I$ ，给定漂移 s_i ，按 s_i 的符号选择前向或后向差分，并标记借贷约束边界。
3. 离散生成元。在纯漂移情形下构造矩阵 G ，使得每一行和为零、非对角元非负。检查这两个性质是否成立。

4. 平稳分布。求解

$$G^{\top} m = 0, \quad \sum_i m_i = 1.$$

检查 $m_i \geq 0$, 并计算聚合资产

$$A = \sum_i a_i m_i.$$

5. 市场清算搜索。对一组利率 r , 重复 HJB-KF 计算得到 $A^s(r)$ 。给定企业资本需求 $K^d(r)$, 寻找

$$A^s(r) - K^d(r) = 0.$$

6. 质量守恒检查。从任意初始分布 m_0 出发, 用

$$\dot{m} = G^{\top} m$$

做短时间推进, 检查 $\sum_i m_i$ 是否保持为一。

第三十九章 不完全市场、金融摩擦与宏观金融

39.1 完全市场基准

Ch37 建立了异质性主体模型的基本框架：个体 HJB 决定策略，KF 方程决定分布，市场清算决定价格。本章加入金融摩擦。为了看清摩擦的作用，先从完全市场基准开始。

完全市场中，每个未来状态的支付都可以交易。个体可以把收入风险完全保险掉，因此均衡中的风险分担有强结构：不同个体的边际效用按固定权重相等。

定理 39.1 (完全市场风险分担条件). 设个体 $i = 1, \dots, I$ 的效用为

$$\mathbb{E} \sum_t \beta^t u_i(c_{it}),$$

且每个状态的总资源为 C_t 。若 Arrow 状态证券完备且内点配置最优，则存在常数权重 $\lambda_i > 0$ ，使得每个日期和状态下

$$\lambda_i u'_i(c_{it}) = \lambda_j u'_j(c_{jt})$$

对任意 i, j 成立。

证明. 社会规划问题可写为最大化

$$\sum_i \alpha_i \mathbb{E} \sum_t \beta^t u_i(c_{it})$$

并满足每个日期状态下的资源约束

$$\sum_i c_{it} = C_t.$$

对状态逐点写一阶条件：

$$\alpha_i \beta^t u'_i(c_{it}) = \nu_t,$$

其中 ν_t 是该状态资源约束乘子。消去共同乘子 ν_t , 得到

$$\alpha_i u'_i(c_{it}) = \alpha_j u'_j(c_{jt}).$$

令 $\lambda_i = \alpha_i$ 即得结论。完全市场竞争均衡在标准条件下支持该配置。 $\square$

例 39.1 (相同 CRRA 个体). 若所有个体有相同 CRRA 效用

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

风险分担条件为

$$\lambda_i c_{it}^{-\gamma} = \lambda_j c_{jt}^{-\gamma}.$$

因此

$$\frac{c_{it}}{c_{jt}} = \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right)^{1/\gamma},$$

消费比例不随状态变化。完全市场把个体收入风险完全平滑掉。

例 39.2 (不完全市场的第一信号). 若两个个体收入分别受独立冲击, 但只能交易一只无风险债券, 低收入个体无法购买只在自己低收入状态支付的保险。于是边际效用比率会随状态波动, 这就是市场不完全的直接表现。

39.2 不可保险风险与预防性储蓄

不完全市场中, 个体面对不能完全交易的收入风险。最简单的模型是: 个体持有无风险资产 a_t , 收入状态 z_t 随机变化, 消费为

$$c_t = wz_t + ra_t - \dot{a}_t.$$

若未来收入可能很低, 个体会多储蓄以自我保险, 这就是预防性储蓄。

定义 39.1 (不完全市场). 若存在未来状态或个体风险无法由可交易资产组合复制, 则市场称为不完全。在不完全市场中, 个体不能完全保险所有状态依赖收入风险。

例 39.3 (只有无风险债券). 若个体收入明天可能为高或低, 但唯一资产是无风险债券, 则个体只能把资源跨期转移, 不能让支付专门在低收入状态发生。因此债券可以平滑平均意义上的时间风险, 却不能完全保险收入状态风险。

定理 39.2 (预防性储蓄的 Jensen 直觉). 若边际效用 $u'(c)$ 是凸函数, 且未来消费随机, 则

$$\mathbb{E}[u'(c_{t+1})] > u'(\mathbb{E}[c_{t+1}])$$

只要 c_{t+1} 非退化。未来风险提高期望边际效用, 从而增加今天储蓄的吸引力。

证明. Jensen 不等式说明, 对凸函数 f ,

$$\mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X]).$$

取 $f = u'$ 、 $X = c_{t+1}$, 得到

$$\mathbb{E}[u'(c_{t+1})] \geq u'(\mathbb{E}[c_{t+1}]).$$

若 u' 严格凸且 c_{t+1} 有真实风险, 则不等式严格。Euler 方程中未来边际效用越高, 今天减少消费、增加储蓄越有价值。□

例 39.4 (CRRA 的谨慎性). CRRA 效用下

$$u'(c) = c^{-\gamma}.$$

当 $\gamma > 0$ 时, u' 是凸的, 因为

$$u'''(c) = \gamma(\gamma + 1)c^{-\gamma-2} > 0.$$

所以未来消费风险会提高期望边际效用, 推动预防性储蓄。

例 39.5 (风险和均值的区别). 两个个体有相同的未来平均收入, 但一个人的收入更不稳定。若两人都不能保险收入风险, 则更不稳定的个体通常选择更多资产缓冲。平均收入相同并不意味着储蓄相同。

39.3 借贷约束与 Euler 不等式

令资产满足下界

$$a_{t+1} \geq \underline{a}.$$

离散时间中, 债券 Euler 条件从等式变成不等式; 连续时间 HJB 中, 这对应状态约束边界和影子价格。

定理 39.3 (借贷约束下的 Euler 不等式). 考虑一周期无风险债券, 预算约束为

$$c_t + a_{t+1} = y_t + Ra_t, \quad a_{t+1} \geq \underline{a}.$$

若最优消费为内点正值, 则

$$u'(c_t) \geq \beta R \mathbb{E}_t[u'(c_{t+1})],$$

且当借贷约束不绑定时等号成立。

证明. 选择 a_{t+1} 的拉格朗日条件为

$$-u'(c_t) + \beta R \mathbb{E}_t[u'(c_{t+1})] + \xi_t = 0,$$

其中 $\xi_t \geq 0$ 是约束 $a_{t+1} \geq \underline{a}$ 的乘子。于是

$$u'(c_t) = \beta R \mathbb{E}_t[u'(c_{t+1})] + \xi_t \geq \beta R \mathbb{E}_t[u'(c_{t+1})].$$

若约束不绑定, 则 $\xi_t = 0$, 得到等式。 □

例 39.6 (约束绑定). 若个体今天很穷且想借款, 但 $a_{t+1} = \underline{a}$, 则 $\xi_t > 0$ 。此时

$$u'(c_t) > \beta R \mathbb{E}_t[u'(c_{t+1})],$$

表示今天消费的边际价值高于通过市场价格转移到未来的边际价值; 个体想把未来资源搬到今天, 但约束阻止了它。

定理 39.4 (自然借贷限额). 若未来最低收入流为 $\underline{y}_{t+s}$, 无风险总收益为常数 $R > 1$, 并且要求任何历史下都能偿还债务, 则自然借贷限额为

$$a_t \geq - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\underline{y}_{t+s}}{R^s},$$

只要右侧级数收敛。

证明. 若个体承诺未来把最低收入流全部用于偿债, 则从 t 看未来可保证收入的现值为

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\underline{y}_{t+s}}{R^s}.$$

债务不能超过这笔可保证现值, 否则在最低收入历史下无法偿还。因此资产不能低于该现值的相反数。 □

例 39.7 (常数最低收入). 若最低收入恒为 $\underline{y}$, 则

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\underline{y}}{R^s} = \frac{\underline{y}}{R-1}.$$

自然借贷限额为

$$a_t \geq - \frac{\underline{y}}{R-1}.$$

若最低收入为零, 自然借贷限额就是不能持有负资产。

39.4 连续时间状态约束

在连续时间 HJB 中，借贷约束 $a \geq \underline{a}$ 表示状态不能流出可行区域。若资产漂移为

$$s(a, z) = wz + ra - c,$$

则在边界处必须有

$$s(\underline{a}, z) \geq 0$$

或通过反射项把状态推回可行区域。

定理 39.5 (状态约束 HJB 边界条件). 若资产状态满足 $a \geq \underline{a}$ ，且无反射扩散项，则在边界 $a = \underline{a}$ 处，可行控制集合必须满足

$$wz + r\underline{a} - c \geq 0.$$

因此 HJB 在边界处的最大化应在该受限集合上进行。

证明. 若在边界处选择 $c > wz + r\underline{a}$ ，则资产漂移

$$s(\underline{a}, z) = wz + r\underline{a} - c < 0.$$

在短时间 dt 后，资产会向 $\underline{a}$ 以下移动，违反状态约束。因此边界可行控制必须满足非负漂移。HJB 的控制集合必须排除不可行控制。□

例 39.8 (边界消费). 若 $\underline{a} = 0$ 、 $wz = 1$ 、 $r = 0.03$ ，则边界处

$$c \leq 1.$$

因为没有资产收入，个体最多消费当期劳动收入；否则资产会变成负数。

例 39.9 (约束造成政策折点). 在内部，消费由 Euler 条件平滑决定；在边界，消费被可行性条件限制。于是消费政策 $c(a, z)$ 可能在接近 $\underline{a}$ 时出现斜率变化，这也是数值求解中需要细网格的区域。

39.5 抵押约束

金融摩擦常不是简单的固定债务下界，而是依赖资产价格和抵押品。设个体或企业持有抵押资产 h_t ，价格为 q_t ，债务 b_t 满足

$$b_t \leq \kappa q_t h_t,$$

其中 $\kappa \in (0, 1)$ 是可抵押比例。

定义 39.2 (抵押约束). 抵押约束把借款上限与可抵押资产价值相连:

$$b \leq \kappa q h.$$

资产价格 q 下跌会直接降低借款能力。

定理 39.6 (抵押约束的一阶楔子). 设选择抵押资产 h 的目标函数中, 约束

$$b \leq \kappa q h$$

的乘子为 $\xi \geq 0$ 。若 h 的无约束边际收益为 R_h , 边际成本为 q , 则一阶条件可写为

$$q = R_h + \xi \kappa q$$

的形式。约束绑定时, 抵押资产有额外的融资价值。

证明. 拉格朗日项包含

$$\xi(\kappa q h - b).$$

对 h 求导时, 除了资产本身收益 R_h 和成本 q 外, 还出现约束放松带来的边际价值

$$\xi \kappa q.$$

因此最优性条件为成本等于直接收益加抵押服务收益:

$$q = R_h + \xi \kappa q.$$

□

例 39.10 (房价和借款能力). 若 $\kappa = 0.8$ 、房价 $q = 100$ 、住房 $h = 1$, 最多可借

$$b \leq 80.$$

若房价跌到 80, 最多可借变成

$$b \leq 64.$$

价格下跌会收紧借款能力, 即使个体持有的实物抵押品数量不变。

例 39.11 (抵押品溢价). 两项资产现金流相同, 但一项可以作为抵押品, 另一项不能。若约束常绑定, 可抵押资产会有更高价格或更低收益率, 因为它还提供放松融资约束的服务。

39.6 外部融资溢价和价格楔子

企业或金融中介使用外部资金时，融资成本可能高于无风险利率。记外部融资成本为

$$R^b = R^f + \chi,$$

其中 $\chi \geq 0$ 是外部融资溢价。它可以来自代理问题、违约风险、监管资本或信息不对称。

命题 39.1 (外部融资溢价楔子). 若企业投资的边际收益为 MPK ，外部借款成本为 $R^b = R^f + \chi$ ，则内部最优投资条件由

$$MPK = R^f$$

变为

$$MPK = R^f + \chi.$$

因此 χ 在投资和无风险利率之间形成楔子。

证明. 企业投资一单位资本的边际收益为 MPK 。若该投资需要外部融资，边际资金成本为 R^b 。最优性要求边际收益等于边际成本：

$$MPK = R^b.$$

代入 $R^b = R^f + \chi$ ，得到结论。 □

例 39.12 (投资下降). 若无摩擦时 $R^f = 4\%$ ，企业投资到 $MPK = 4\%$ 。当外部融资溢价升到 3% 时，投资条件变为

$$MPK = 7\%.$$

在边际产出递减下，达到更高 MPK 需要更低资本存量，因此投资下降。

39.7 杠杆放大

金融摩擦的宏观作用常来自杠杆。设资产价值为 QK ，净值为 N ，杠杆为

$$L = \frac{QK}{N}.$$

当资产价格下跌时，净值通常按更高比例下降，导致杠杆上升或迫使去杠杆。

定理 39.7 (杠杆放大恒等式). 若债务 D 固定，资产价值为 V ，净值为 $N = V - D$ ，杠杆为 $L = V/N$ ，则小幅资产价值变化满足

$$\frac{dN}{N} = L \frac{dV}{V}.$$

证明. 因为 $N = V - D$, 且短期内 D 固定, 所以 $dN = dV$. 于是

$$\frac{dN}{N} = \frac{dV}{N} = \frac{V}{N} \frac{dV}{V} = L \frac{dV}{V}.$$

□

例 39.13 (高杠杆损失). 若杠杆 $L = 10$, 资产价值下降 2%, 则净值变化约为

$$\frac{dN}{N} = 10(-2\%) = -20\%.$$

小资产价格冲击会变成大净值冲击。

例 39.14 (去杠杆反馈). 净值下降后, 若金融机构必须满足最高杠杆约束, 就需要卖出资产。卖出资产压低价格, 价格下跌进一步压低净值。这是火售反馈的基本逻辑。

39.8 嵌入 HJB-KF 系统

金融摩擦进入异质主体模型时, HJB 的控制集合和预算约束改变, KF 的漂移也随之改变。例如, 有借贷约束和收入风险的消费储蓄问题可写为

$$\rho v(a, z) = \max_c \left\{ u(c) + v_a(a, z)[wz + ra - c] + \sum_{z'} \lambda_{zz'} [v(a, z') - v(a, z)] \right\},$$

约束为

$$a \geq \underline{a}, \quad c \leq wz + r\underline{a} \quad \text{at } a = \underline{a}.$$

KF 方程由最优漂移

$$s^*(a, z) = wz + ra - c^*(a, z)$$

决定。

命题 39.2 (约束改变分布漂移). 若借贷约束使低资产个体消费下降, 则其资产漂移

$$s^*(a, z) = wz + ra - c^*(a, z)$$

在约束附近上升。KF 方程中的通量 s^*m 因此改变, 平稳分布会在约束附近重新分配质量。

证明. 借贷约束绑定时, 可行消费低于无约束消费。给定收入和资产收益, 消费下降会提高

$$wz + ra - c.$$

因此状态漂移 s^* 改变。KF 方程

$$\partial_t m = -\partial_a(s^*m) + \dots$$

中的概率流随之改变, 平稳分布也改变。

□

例 39.15 (约束附近的质量堆积). 若许多个体在坏收入状态下被推到借贷约束附近, 而约束又阻止他们继续借款, 平稳分布可能在 $\underline{a}$ 附近出现较高密度。这部分人群对利率、工资和转移支付更敏感。

39.9 本章小结

不完全市场和金融摩擦改变了连续时间宏观金融模型的核心结构。完全市场中, 边际效用比率被风险分担条件钉住; 不完全市场中, 不可保险风险、借贷约束和抵押约束让个体边际效用随状态和财富变化。金融摩擦通过影子价格、融资溢价和杠杆放大进入 HJB 与市场清算, 并通过 KF 方程影响整个分布。下一章将把前面各章的证明和模型转化为数值方法: 如何从 HJB、KF、PDE 和固定点走向可运行求解。

39.10 Exercises

习题 39.1. 说明完全市场和不完全市场的区别, 并给出一个只有无风险债券时市场不完全的理由。

习题 39.2. 写出完全市场风险分担条件, 并解释权重 λ_i 的经济含义。

习题 39.3. 若两个个体都有相同 CRRA 效用 $u(c) = c^{1-\gamma}/(1-\gamma)$, 由风险分担条件推导 c_{1t}/c_{2t} 的形式。

习题 39.4. 解释为什么不完全市场中个体边际效用比率通常会随状态变化。

习题 39.5. 用 Jensen 不等式解释预防性储蓄的基本逻辑。

习题 39.6. 对 CRRA 效用证明 $u'(c)$ 是凸函数。

习题 39.7. 写出一周期借贷约束 $a_{t+1} \geq \underline{a}$ 下的 Euler 不等式。

习题 39.8. 解释 Euler 不等式中影子价格 ξ_t 为正时的经济含义。

习题 39.9. 若预算约束为 $c_t + a_{t+1} = y_t + Ra_t$, 且约束绑定, 写出 a_{t+1} 和 c_t 的关系。

习题 39.10. 推导自然借贷限额

$$a_t \geq - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{y_{t+s}}{R^s}.$$

习题 39.11. 若最低收入恒为 $\underline{y}$, 计算自然借贷限额。

习题 39.12. 比较自然借贷限额和外生固定借贷限额 $\underline{a}$ 。

习题 39.13. 在连续时间 HJB 中, 解释为什么 $a = \underline{a}$ 处必须满足 $wz + r\underline{a} - c \geq 0$ 。

习题 39.14. 若 $\underline{a} = 0, wz = 1.5, r = 0.04$, 计算边界处消费上限。

习题 39.15. 说明为什么借贷约束附近的消费政策可能出现斜率变化。

习题 39.16. 定义抵押约束 $b \leq \kappa qh$, 并说明 q 下跌如何影响借款能力。

习题 39.17. 若 $\kappa = 0.75, q = 200, h = 2$, 最大可借金额是多少?

习题 39.18. 若上题中 q 下跌到 160, 最大可借金额下降多少?

习题 39.19. 写出抵押资产的一阶条件 $q = R_h + \xi \kappa q$, 并解释 $\xi \kappa q$ 。

习题 39.20. 解释为什么可抵押资产可能有更高价格或更低收益率。

习题 39.21. 定义外部融资溢价 χ , 并写出企业投资条件。

习题 39.22. 若 $R^f = 3\%$ 、 $\chi = 2\%$, 企业边际产出需要达到多少才会投资到边际?

习题 39.23. 解释外部融资溢价上升为什么会压低投资。

习题 39.24. 定义杠杆 $L = V/N$, 其中 $N = V - D$ 。

习题 39.25. 证明在债务 D 固定时, $\frac{dN}{N} = L \frac{dV}{V}$ 。

习题 39.26. 若杠杆为 8, 资产价值下降 3%, 净值约下降多少?

习题 39.27. 说明去杠杆反馈为何会放大资产价格下跌。

习题 39.28. 写出带离散收入状态的连续时间消费储蓄 HJB。

习题 39.29. 写出给定最优消费 $c^*(a, z)$ 时的资产漂移 $s^*(a, z)$ 。

习题 39.30. 解释借贷约束如何改变 KF 方程中的概率通量。

习题 39.31. 为什么约束附近可能出现分布质量堆积?

习题 39.32. 给定密度 $m(a, z)$, 写出聚合资产。

习题 39.33. 说明金融摩擦进入一般均衡时会改变哪些对象: 个体政策、分布、价格或市场清算。

习题 39.34. 比较完全市场代表性主体定价和不完全市场异质性主体定价。

习题 39.35. 列出求解带借贷约束的不完全市场 HJB-KF 模型的一般步骤。

39.11 Solutions

本章题解的主线是：不完全市场让个体不能完全保险风险，金融摩擦让约束和价格互相反馈；因此最优性条件从等式变成带影子价格的条件，HJB-KF 系统也必须显式处理边界和分布。

解答 39.1. 完全市场中，每个未来状态的支付都可以由可交易资产组合复制，因此个体可以完全保险状态风险。不完全市场中，至少有某些未来状态或个体风险不能被交易资产复制。若只有无风险债券，个体只能跨期转移确定资源，不能购买“只在自己低收入时支付”的保险，所以收入状态风险不能完全保险。

解答 39.2. 完全市场风险分担条件为

$$\lambda_i u'_i(c_{it}) = \lambda_j u'_j(c_{jt})$$

对任意 i, j 和每个状态成立。权重 λ_i 反映个体在社会规划问题中的福利权重，也对应竞争均衡中初始财富和资产交易所决定的 Pareto 权重。

解答 39.3. 相同 CRRA 下 $u'(c) = c^{-\gamma}$ 。风险分担条件给出

$$\lambda_1 c_{1t}^{-\gamma} = \lambda_2 c_{2t}^{-\gamma}.$$

整理得

$$\left(\frac{c_{1t}}{c_{2t}}\right)^{\gamma} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \frac{c_{1t}}{c_{2t}} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1/\gamma}.$$

因此消费比例不随状态变化。

解答 39.4. 不完全市场中，个体不能用资产组合完全复制所有状态支付。低收入、低财富或约束绑定状态下，个体消费会相对更低，边际效用更高；高收入或资产充足状态下则相反。因此不同个体的边际效用比率会随着收入、财富和约束状态变化。

解答 39.5. 若 $u'(c)$ 是凸函数，则 Jensen 不等式给出

$$\mathbb{E}[u'(c_{t+1})] \geq u'(\mathbb{E}[c_{t+1}]).$$

未来消费风险越大，期望边际效用越高。Euler 方程中未来边际效用越高，今天储蓄越有价值，所以个体倾向于减少当前消费、增加缓冲资产。

解答 39.6. CRRA 效用的边际效用为

$$u'(c) = c^{-\gamma}.$$

一阶和二阶导数为

$$u''(c) = -\gamma c^{-\gamma-1}, \quad u'''(c) = \gamma(\gamma+1)c^{-\gamma-2}.$$

当 $\gamma > 0$ 时, $u'''(c) > 0$, 所以 $u'(c)$ 是凸函数。

解答 39.7. 在

$$c_t + a_{t+1} = y_t + Ra_t, \quad a_{t+1} \geq \underline{a}$$

下, Euler 条件变为

$$u'(c_t) \geq \beta R \mathbb{E}_t[u'(c_{t+1})].$$

若约束不绑定, 等号成立; 若约束绑定, 通常严格大于。

解答 39.8. $\xi_t > 0$ 表示借贷约束绑定。个体想把 a_{t+1} 选得更低, 也就是想借更多来提高当前消费, 但约束不允许。此时当前消费的边际效用高于市场跨期价格所能平衡的水平, 差额就是放松约束的边际价值。

解答 39.9. 约束绑定时

$$a_{t+1} = \underline{a}.$$

代入预算约束得

$$c_t = y_t + Ra_t - \underline{a}.$$

这说明当前消费由当期资源和最小允许资产共同钉住。

解答 39.10. 为了保证所有未来最低收入历史下都能偿还债务, 当前债务不能超过未来最低收入流的现值。若最低收入为 $\underline{y}_{t+s}$, 则可保证收入现值为

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\underline{y}_{t+s}}{R^s}.$$

资产为负时代表债务, 所以资产下界是该现值的相反数:

$$a_t \geq -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\underline{y}_{t+s}}{R^s}.$$

解答 39.11. 若 $\underline{y}_{t+s} = \underline{y}$, 则

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\underline{y}}{R^s} = \underline{y} \frac{1/R}{1 - 1/R} = \frac{\underline{y}}{R - 1}.$$

因此自然借贷限额为

$$a_t \geq -\frac{\underline{y}}{R - 1}.$$

解答 39.12. 自然借贷限额由未来最低可保证收入内生决定，它保证任何历史下都不会违约。外生固定借贷限额 $\underline{a}$ 是模型设定或制度限制，可以比自然限额更紧，也可以更松。若外生限额更紧，它会产生额外的流动性约束。

解答 39.13. 连续时间中资产漂移为

$$\dot{a} = wz + ra - c.$$

在边界 $a = \underline{a}$ 处，如果 $wz + r\underline{a} - c < 0$ ，资产会立刻向下越过可行区域。因此必须要求

$$wz + r\underline{a} - c \geq 0$$

或引入反射机制把状态推回可行域。

解答 39.14. 边界消费上限为

$$c \leq wz + r\underline{a}.$$

代入 $\underline{a} = 0, wz = 1.5, r = 0.04$ ，得到

$$c \leq 1.5.$$

因为边界处没有资产收入，最多只能消费劳动收入。

解答 39.15. 在内部，消费政策由 Euler 条件平滑决定；在边界，消费还要满足不越界条件。接近约束时，最优政策从“按跨期边际效用平滑”转向“保持资产不低于下界”，因此消费函数可能出现斜率变化。

解答 39.16. 抵押约束为

$$b \leq \kappa qh,$$

其中 b 是债务， h 是抵押资产数量， q 是抵押资产价格， κ 是可抵押比例。若 q 下跌，右侧下降，即使 h 不变，最大可借金额也会下降。

解答 39.17. 最大可借金额为

$$b_{\max} = \kappa qh = 0.75 \times 200 \times 2 = 300.$$

解答 39.18. 新最大可借金额为

$$0.75 \times 160 \times 2 = 240.$$

下降量为

$$300 - 240 = 60.$$

解答 39.19. 一阶条件

$$q = R_h + \xi \kappa q$$

表示购买一单位抵押资产的成本 q 等于资产直接收益 R_h 加上抵押服务价值。项 $\xi \kappa q$ 是因为多持有一单位资产会放松借款上限 κq ，而每单位放松的影子价值为 ξ 。

解答 39.20. 可抵押资产除了现金流，还提供放松融资约束的服务。若约束经常绑定，持有这类资产能提高借款能力，因此投资者愿意支付更高价格。给定现金流，更高价格对应更低预期收益率。

解答 39.21. 外部融资溢价定义为外部融资成本相对无风险利率的额外部分：

$$R^b = R^f + \chi.$$

企业边际投资条件为

$$MPK = R^f + \chi.$$

无摩擦时 $\chi = 0$ ，条件退化为 $MPK = R^f$ 。

解答 39.22. 边际融资成本为

$$R^f + \chi = 3\% + 2\% = 5\%.$$

因此企业会投资到 $MPK = 5\%$ 的边际。

解答 39.23. 当 χ 上升时，投资的资金成本上升。若资本边际产出递减，要让 MPK 提高到新的成本水平，资本存量必须更低。因此投资减少，资本积累放慢。

解答 39.24. 资产价值为 V ，债务为 D ，净值为

$$N = V - D.$$

杠杆定义为

$$L = \frac{V}{N}.$$

它衡量一单位净值支撑了多少资产。

解答 39.25. 债务 D 固定时

$$dN = dV.$$

于是

$$\frac{dN}{N} = \frac{dV}{N} = \frac{V}{N} \frac{dV}{V} = L \frac{dV}{V}.$$

因此资产价值的小幅变化会被杠杆 L 放大到净值变化上。

解答 39.26. 由杠杆放大公式,

$$\frac{dN}{N} = 8(-3\%) = -24\%.$$

净值约下降 24%。

解答 39.27. 资产价格下跌会降低净值并提高杠杆。若机构必须满足杠杆上限, 就需要出售资产来缩表。出售压力进一步压低资产价格, 又继续损害净值, 形成价格下跌和去杠杆之间的反馈。

解答 39.28. 带离散收入状态 z 的 HJB 可写为

$$\rho v(a, z) = \max_c \left\{ u(c) + v_a(a, z)[wz + ra - c] + \sum_{z'} \lambda_{zz'} [v(a, z') - v(a, z)] \right\}.$$

在 $a = \underline{a}$ 处, 还要限制 $wz + r\underline{a} - c \geq 0$ 。

解答 39.29. 给定最优消费 $c^*(a, z)$, 资产漂移为

$$s^*(a, z) = wz + ra - c^*(a, z).$$

它决定个体财富沿资产维度向上还是向下移动。

解答 39.30. KF 方程中的资产通量为

$$s^*(a, z)m(a, z).$$

借贷约束要求边界处概率质量不能流出可行域, 所以在 $a = \underline{a}$ 附近必须使用可行漂移或零通量条件。这会改变密度从低资产区域流入和流出的速度。

解答 39.31. 若坏收入冲击把许多个体推向资产下界, 而约束又阻止他们继续借债平滑消费, 那么他们会在低资产区域停留更久。流入边界附近的质量较大、流出速度有限, 就会形成分布质量堆积。

解答 39.32. 聚合资产为

$$A = \sum_z \int a m(a, z) da.$$

若没有离散状态, 则简化为

$$A = \int a m(a) da.$$

解答 39.33. 金融摩擦首先改变个体约束和一阶条件, 因此改变消费、储蓄、投资和组合政策。政策改变后, KF 方程中的漂移和分布也改变。分布改变又影响总资产、资本、抵押品需求和净值, 最终通过市场清算改变利率、工资和资产价格。

解答 39.34. 完全市场代表性主体定价通常使用一个共同的边际效用或 SDF。可保险风险被平滑后，个体异质性对定价影响较小。不完全市场中，边际效用在个体和状态之间不同，接近约束者的边际效用尤其高；资产价格取决于谁持有资产、谁受约束以及风险暴露落在哪些状态上。

解答 39.35. 一般步骤是：给定价格 r, w 和约束参数；在资产网格上解 HJB，处理边界可行性；由最优消费得到资产漂移；构造离散生成元或连续 KF 方程；求平稳分布；计算聚合资产和其他总量；检查资产、资本或债券市场清算；若不清算，更新价格并重复。

39.12 Computation Lab

本章计算实验的目标是把金融摩擦从经济语言翻译为可检查的网格、约束、影子价格和市场清算残差。

1. **借贷约束边界检查。** 构造资产网格 $a_1, \dots, a_I$ ，令 $a_1 = \underline{a}$ 。给定消费政策 $c_i(z)$ ，检查每个收入状态在边界是否满足

$$wz + r\underline{a} - c_1(z) \geq 0.$$

2. **自然借贷限额。** 给定 $R > 1$ 和最低收入序列 $\underline{y}_{t+s}$ ，计算

$$\underline{a}^{nat} = - \sum_{s=1}^S \frac{\underline{y}_{t+s}}{R^s}$$

的截断近似，并观察 S 增大时的收敛。

3. **抵押约束敏感性。** 对一组资产价格 q 和抵押比例 κ ，计算

$$b_{\max} = \kappa q h.$$

画出 q 下跌时最大债务如何变化。

4. **杠杆放大。** 给定资产价值变化率 $\Delta V/V$ 和杠杆 L ，计算

$$\Delta N/N \approx L \Delta V/V.$$

比较 $L = 2, 5, 10$ 时同一资产价格冲击对净值的影响。

5. **外部融资溢价。** 给定 R^f 和 χ ，计算边际投资门槛

$$MPK^* = R^f + \chi.$$

若 $MPK(K)$ 递减，求使 $MPK(K) = MPK^*$ 的资本需求。

6. **HJB-KF 清算残差**。给定价格猜测，解 HJB 得到 $c^*(a, z)$ ，构造漂移

$$s^*(a, z) = wz + ra - c^*(a, z).$$

用 KF 求平稳分布 $m(a, z)$ ，计算

$$A^s = \sum_z \int a m(a, z) da,$$

并记录市场清算残差 $A^s - K^d$ 。

第四十章 计算方法：从证明走向求解

40.1 为什么最后需要计算

前面各章反复出现同一种结构：先写出最优性条件、状态方程、分布方程和市场清算，再证明均衡或解的性质。真正使用模型时，还要把这些条件变成可运行的对象。本章的任务就是完成这一步：把数学对象翻译成网格、矩阵、迭代、残差和诊断。

计算不是证明的替代品。证明告诉我们对象应该满足什么条件，计算则检查一个离散近似是否足够接近这些条件。一个可靠的计算流程至少要回答五个问题：状态如何离散化，方程如何近似，迭代如何停止，误差如何诊断，结果如何复现。

定义 40.1 (计算对象). 在本章中，一个连续或递归经济模型的计算对象包括：状态网格、控制网格或一阶条件、离散算子、未知向量、残差函数、迭代规则和停止准则。若这些对象没有被明确写出，模型还没有真正变成可计算问题。

例 40.1 (从 Ramsey 方程到计算对象). 连续时间 Ramsey 模型可写成

$$\dot{k} = f(k) - c - \delta k, \quad \frac{\dot{c}}{c} = \frac{f'(k) - \delta - \rho}{\theta}.$$

计算时需要给 k, c 初值或边界条件，选择时间步长 Δt ，用差分近似 $\dot{k}, \dot{c}$ ，并用残差检查方程是否满足。证明中的相图变成了数值中的路径、步长和误差表。

40.2 网格、插值与残差

设连续状态 $x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ 。最简单的均匀网格是

$$x_i = \underline{x} + (i-1)\Delta x, \quad \Delta x = \frac{\bar{x} - \underline{x}}{I-1}, \quad i = 1, \dots, I.$$

未知函数 $v(x)$ 被未知向量

$$v_i \approx v(x_i)$$

替代。方程 $F(v) = 0$ 被离散方程 $F_I(v_I) = 0$ 替代。数值解的第一检查不是图像好不好看，而是残差

$$R_i = F_I(v_I)_i$$

是否足够小。

定义 40.2 (残差). 给定离散方程 $F_I(u) = 0$ 和候选解 $\hat{u}$ ，残差为

$$R(\hat{u}) = F_I(\hat{u}).$$

常用诊断包括最大残差 $\|R(\hat{u})\|_\infty$ 、平均残差和市场清算残差。

例 40.2 (资产网格). 在资产储蓄问题中，若资产约束为 $a \in [0, 20]$ ，取 $I = 101$ ，则

$$\Delta a = \frac{20 - 0}{100} = 0.2.$$

网格点为 $0, 0.2, 0.4, \dots, 20$ 。如果大量个体集中在借贷约束附近，可以改用非均匀网格，让 $a = 0$ 附近点更密。

例 40.3 (残差比图像更可靠). 两个消费政策图可能看起来都很平滑，但一个满足 Euler 残差

$$\max_i |R_i| = 10^{-6},$$

另一个只有 10^{-2} 。若变量单位相同，前者通常更可信。图像用于发现形状异常，残差用于检查方程是否真的被解了。

40.3 ODE 的时间离散

最基本的动态方程是 ODE:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)).$$

显式 Euler 方法把导数近似为

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = f(x_n),$$

即

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t f(x_n).$$

它的优点是简单，缺点是步长过大时可能不稳定。

命题 40.1 (显式 Euler 的一步误差). 若 $x(t)$ 二阶连续可微，且 $x'(t) = f(x(t))$ ，则

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t f(x(t)) + O(\Delta t^2).$$

证明. Taylor 展开给出

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t x'(t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 x''(\xi)$$

其中 $\xi \in [t, t + \Delta t]$ 。代入 $x'(t) = f(x(t))$, 得到

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t f(x(t)) + O(\Delta t^2).$$

□

例 40.4 (线性 ODE 的 Euler 步). 对

$$\dot{x} = -\alpha x$$

显式 Euler 为

$$x_{n+1} = (1 - \alpha \Delta t) x_n.$$

若 $|1 - \alpha \Delta t| < 1$, 离散路径衰减; 若步长太大, 离散路径会振荡甚至发散。这说明稳定性不只是理论问题, 也是步长选择问题。

40.4 有限差分：把导数变成矩阵

在网格上, 一阶导数有三种常用近似:

$$D^+ v_i = \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta x}, \quad D^- v_i = \frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta x},$$

$$D^0 v_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\Delta x}.$$

二阶导数常用

$$D^2 v_i = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{(\Delta x)^2}.$$

命题 40.2 (一阶差分的一致性). 若 v 二阶连续可微, 则

$$D^+ v_i = v'(x_i) + O(\Delta x), \quad D^- v_i = v'(x_i) + O(\Delta x).$$

若 v 三阶连续可微, 则

$$D^0 v_i = v'(x_i) + O((\Delta x)^2).$$

证明. 对 $v(x_i + \Delta x)$ 作 Taylor 展开:

$$v(x_i + \Delta x) = v(x_i) + \Delta x v'(x_i) + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 v''(\xi).$$

移项除以 Δx , 得前向差分结论。后向差分类似。中心差分把 $x_i + \Delta x$ 和 $x_i - \Delta x$ 的 Taylor 展开相减, 二阶项抵消, 主误差变为二阶。 □

例 40.5 (三种差分的经济含义). 若 $v(a)$ 是资产价值函数, 前向差分比较 a_i 和更高资产点, 后向差分比较 a_i 和更低资产点, 中心差分同时使用两侧。HJB 中若资产漂移向右, 信息来自左侧, 后向差分更自然; 若漂移向左, 前向差分更自然。

40.5 迎风格式与 HJB

确定性漂移项

$$s(x)v_x(x)$$

在数值上要尊重状态流动方向。若 $s_i > 0$, 状态从左向右流动, 使用后向差分; 若 $s_i < 0$, 状态从右向左流动, 使用前向差分。这就是迎风格式。

命题 40.3 (迎风格式的单调性). 考虑纯漂移算子 $s_i v_x(x_i)$ 。若

$$s_i^+ = \max\{s_i, 0\}, \quad s_i^- = \min\{s_i, 0\},$$

并取离散项

$$s_i^+ D^- v_i + s_i^- D^+ v_i,$$

则该项对上游网格点的系数非负, 对当前点的系数方向与生成元矩阵的行和结构一致。

证明. 展开得

$$s_i^+ D^- v_i + s_i^- D^+ v_i = \frac{s_i^+}{\Delta x} v_i - \frac{s_i^+}{\Delta x} v_{i-1} + \frac{s_i^-}{\Delta x} v_{i+1} - \frac{s_i^-}{\Delta x} v_i.$$

因为 $s_i^+ \geq 0$ 、 $s_i^- \leq 0$, 把它移入 HJB 或生成元矩阵时, 流向相邻点的强度可以写成非负跳转强度。非对角元非负、行和为零的结构正是连续时间 Markov 生成元需要的结构。□

例 40.6 (HJB 中的迎风选择). 消费储蓄 HJB 为

$$\rho v_i = \max_c \{u(c) + v_a(a_i)[wz + ra_i - c]\}.$$

若某次迭代下 $s_i = wz + ra_i - c_i > 0$, 使用

$$v_a(a_i) \approx \frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta a}.$$

若 $s_i < 0$, 使用

$$v_a(a_i) \approx \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta a}.$$

这避免把未来状态方向的信息错误地拿来决定当前流动。

40.6 生成元矩阵与 KF 方程

连续时间分布方程

$$\partial_t m = -\partial_x(sm)$$

离散后常写为

$$\dot{m} = G^\top m,$$

其中 G 是离散生成元矩阵。为了保持概率解释, G 应满足: 非对角元非负, 每一行和为零。

定理 40.1 (生成元矩阵的质量守恒). 若矩阵 G 的每一行和为零, 则方程

$$\dot{m} = G^\top m$$

保持总质量 $\mathbf{1}^\top m$ 不变。

证明. 直接计算

$$\frac{d}{dt} \mathbf{1}^\top m = \mathbf{1}^\top \dot{m} = \mathbf{1}^\top G^\top m = (G\mathbf{1})^\top m.$$

行和为零等价于 $G\mathbf{1} = 0$, 所以

$$\frac{d}{dt} \mathbf{1}^\top m = 0.$$

□

定理 40.2 (离散平稳分布条件). 若 G 是连续时间 *Markov* 链的生成元, 则平稳分布 m 满足

$$G^\top m = 0, \quad \mathbf{1}^\top m = 1, \quad m_i \geq 0.$$

证明. 平稳表示 $\dot{m} = 0$. 代入 KF 离散形式 $\dot{m} = G^\top m$, 得到

$$G^\top m = 0.$$

因为 m 是概率分布, 还必须满足归一化和非负性条件。□

例 40.7 (三点生成元). 三个资产点上, 若从 1 到 2 的强度为 α , 从 2 到 1 的强度为 β , 从 2 到 3 的强度为 γ , 从 3 到 2 的强度为 δ , 则

$$G = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \beta & -(\beta + \gamma) & \gamma \\ 0 & \delta & -\delta \end{pmatrix}.$$

每一行和为零, 非对角元非负。求 $G^\top m = 0$ 并加上 $m_1 + m_2 + m_3 = 1$, 即可得到平稳质量。

40.7 Bellman 迭代与残差界

离散时间动态规划常写为

$$V = TV.$$

若 T 是折扣因子为 β 的压缩映射, 值函数迭代为

$$V^{n+1} = TV^n.$$

计算时我们无法等到完全收敛, 因此需要残差界。

定理 40.3 (Bellman 残差界). 若 T 在 *sup norm* 下是模数 $\beta \in (0, 1)$ 的压缩映射, 且 $V^* = TV^*$, 则任意候选 V 满足

$$\|V - V^*\|_\infty \leq \frac{\|TV - V\|_\infty}{1 - \beta}.$$

证明. 由三角不等式和压缩性,

$$\|V - V^*\|_\infty = \|V - TV^*\|_\infty \leq \|V - TV\|_\infty + \|TV - TV^*\|_\infty.$$

第二项满足

$$\|TV - TV^*\|_\infty \leq \beta \|V - V^*\|_\infty.$$

移项得到

$$(1 - \beta)\|V - V^*\|_\infty \leq \|TV - V\|_\infty.$$

□

例 40.8 (停止准则). 若 $\beta = 0.96$, 并且某次迭代的 Bellman 残差为

$$\|TV^n - V^n\|_\infty = 10^{-5},$$

则值函数误差上界为

$$\frac{10^{-5}}{1 - 0.96} = 2.5 \times 10^{-4}.$$

这比只看 $\|V^{n+1} - V^n\|$ 更直接地连接到方程本身。

40.8 固定点、二分法与 Newton 步

一般均衡和资产定价经常归结为价格固定点:

$$H(p) = 0.$$

例如资产市场清算残差

$$H(r) = A^s(r) - K^d(r)$$

为零时，利率 r 清算市场。若只有一维价格，二分法稳健；若有多维价格，常用 Newton、拟 Newton 或阻尼迭代。

定理 40.4 (二分法的括号保持). 若连续函数 H 满足 $H(a)H(b) \leq 0$ ，取中点 $c = (a+b)/2$ 。若用 $[a, c]$ 或 $[c, b]$ 中仍有异号端点的区间作为新区间，则新区间仍包含至少一个根。

证明. 连续函数在区间端点异号时，由介值定理，区间内存在根。中点把原区间分成两段。若 $H(a)H(c) \leq 0$ ，则根在 $[a, c]$ ；否则 $H(c)H(b) \leq 0$ ，根在 $[c, b]$ 。因此每一步都保持包含根的括号。□

例 40.9 (清算利率的二分法). 若

$$H(0.01) = A^s(0.01) - K^d(0.01) > 0,$$

而

$$H(0.05) < 0,$$

则均衡利率位于 $[0.01, 0.05]$ 。取中点 0.03，计算 $H(0.03)$ ，保留仍有符号变化的一半区间。重复直到区间长度低于容忍度。

例 40.10 (Newton 步). 若要求解

$$H(p) = 0,$$

且 H 可微，Newton 迭代为

$$p_{n+1} = p_n - \frac{H(p_n)}{H'(p_n)}.$$

多维时变为

$$p_{n+1} = p_n - [DH(p_n)]^{-1}H(p_n).$$

若 Newton 步太大导致残差上升，可使用阻尼步

$$p_{n+1} = p_n - \omega [DH(p_n)]^{-1}H(p_n), \quad \omega \in (0, 1].$$

40.9 模拟、Monte Carlo 与抽样误差

有些模型很难直接求分布，或者需要用模拟计算矩。设 $X_1, \dots, X_N$ 是独立同分布样本，均值为 μ ，方差为 σ^2 。样本均值

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n$$

的误差随 N 下降。

定理 40.5 (Monte Carlo 均值误差). 若 X_n 独立同分布且 $\text{Var}(X_n) = \sigma^2 < \infty$, 则

$$\mathbb{E}[(\bar{X}_N - \mu)^2] = \frac{\sigma^2}{N}.$$

证明. 因为 $\mathbb{E}[\bar{X}_N] = \mu$, 均方误差等于方差:

$$\mathbb{E}[(\bar{X}_N - \mu)^2] = \text{Var}(\bar{X}_N).$$

独立性给出

$$\text{Var}(\bar{X}_N) = \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N \text{Var}(X_n) = \frac{\sigma^2}{N}.$$

□

例 40.11 (样本量翻四倍). 若样本量从 N 增加到 $4N$, 均方误差从 σ^2/N 变成 $\sigma^2/(4N)$, 标准误差只减半。因此 Monte Carlo 的精度提升通常很慢。

40.10 HJB-KF 一体化 workflow

连续时间异质性主体模型的典型计算流程如下:

价格猜测 $\rightarrow$ HJB $\rightarrow$ 政策 $\rightarrow$ KF $\rightarrow$ 聚合 $\rightarrow$ 清算残差.

每个箭头都应有诊断指标。HJB 要看方程残差和边界条件, KF 要看质量守恒和非负性, 聚合要看积分权重, 清算要看价格残差。

例 40.12 (HJB-KF 求解清单). 一个最小可复现清单包括:

1. 设定参数和网格;
2. 给定 r, w 解 HJB;
3. 由政策构造生成元 G ;
4. 解 $G^\top m = 0, \mathbf{1}^\top m = 1$;
5. 计算 $A = \sum_i a_i m_i$;
6. 检查 $A - K^d(r)$;
7. 更新价格并重复。

这张清单比一段“求解模型”的文字更接近真正的研究流程。

例 40.13 (五个必须打印的数字). 每次计算结束至少应打印: HJB 最大残差、KF 质量误差 $|\mathbf{1}^\top m - 1|$ 、分布最小值 $\min_i m_i$ 、市场清算残差、迭代次数。若其中任何一个异常, 图像再漂亮也不能直接相信。

40.11 资产定价的计算接口

资产定价问题常见形式为

$$p_t = \mathbb{E}_t[M_{t+1}X_{t+1}]$$

或连续时间 PDE

$$\partial_t p + \mathcal{A}p - rp + \text{cash flow} = 0.$$

计算时，离散状态下是矩阵乘法；连续状态下是差分 PDE；模拟下是样本均值。

例 40.14 (有限状态 SDF 定价). 若有状态 $s = 1, \dots, S$ ，转移概率为 π_s ，SDF 为 M_s ，支付为 X_s ，则

$$p = \sum_{s=1}^S \pi_s M_s X_s.$$

这就是一个加权内积。若价格不等于该内积，残差

$$R = p - \sum_s \pi_s M_s X_s$$

就是定价误差。

例 40.15 (PDE 定价残差). 若期权价格 $C(t, S)$ 应满足 Black-Scholes PDE，把 C 放到时间和价格网格上后，可在每个内点计算

$$R_{n,i} = C_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_i^2 C_{SS} + r S_i C_S - r C.$$

残差接近零、终端 payoff 正确、边界条件合理，才说明离散价格函数通过了基本检查。

40.12 可复现计算的习惯

可复现不是代码风格问题，而是研究可信度问题。一个计算实验至少应记录：参数表、网格范围、步长、停止准则、随机种子、版本、残差表和输出文件。若改变网格或步长，主要经济结论应保持稳定。

定义 40.3 (网格收敛检查). 网格收敛检查是指在更细网格或更小步长上重复计算，并比较主要对象，如价格、政策、矩和清算残差。若结果随网格明显改变，当前近似还不可靠。

例 40.16 (网格加密表). 可以记录

I	Δa	r^*	$\max R_i $
100	0.20	0.0312	10^{-4}
200	0.10	0.0308	3×10^{-5}
400	0.05	0.0307	8×10^{-6}

若均衡利率和残差趋于稳定，计算可信度就更高。

40.13 本章小结

本章把全书的数学结构收束为计算 workflow。有限维最优化变成一阶条件和约束残差；动态规划变成 Bellman 算子和残差界；ODE 和 PDE 变成时间步长与差分矩阵；HJB-KF 系统变成政策、生成元、平稳分布和市场清算；资产定价变成 SDF 内积、PDE 残差或模拟均值。好的计算不是只给答案，而是同时给出答案、误差、残差和复现路径。

到这里，三卷主线已经形成闭环：从证明语言和均衡存在性，到风险、函数空间和递归经济，再到连续时间金融、分布动态和计算求解。后续的工作不应再急着扩写新章，而应回到来源核验、例题密度、题解清晰度、符号统一和全书二轮审查。

40.14 Exercises

习题 40.1. 说明为什么计算不是证明的替代品，而是证明条件的离散检查。

习题 40.2. 给定区间 $[0, 10]$ 和 $I = 51$ ，计算均匀网格步长。

习题 40.3. 定义离散方程的残差，并说明最大残差的作用。

习题 40.4. 写出显式 Euler 方法对 $\dot{x} = f(x)$ 的更新式。

习题 40.5. 对 $\dot{x} = -2x$ ，写出显式 Euler 更新式，并给出稳定所需的步长条件。

习题 40.6. 证明显式 Euler 的一步误差是 $O(\Delta t^2)$ 。

习题 40.7. 写出前向差分、后向差分和中心差分。

习题 40.8. 说明为什么中心差分通常比前向差分有更高阶的一致性。

习题 40.9. 写出二阶导数的三点差分公式。

习题 40.10. 若资产漂移 $s_i > 0$ ，HJB 中应使用前向还是后向差分？为什么？

习题 40.11. 若 $s_i < 0$ ，写出 $v_a(a_i)$ 的迎风差分近似。

习题 40.12. 说明迎风格式为什么有助于保持 Markov 生成元的非负跳转强度。

习题 40.13. 连续时间生成元矩阵 G 应满足哪两个基本矩阵性质？

习题 40.14. 证明若 $G\mathbf{1} = 0$ ，则 $\dot{m} = G^\top m$ 保持总质量。

习题 40.15. 写出离散平稳分布的线性方程组。

习题 40.16. 给定

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

求平稳分布。

习题 40.17. 写出 Bellman 值函数迭代公式。

习题 40.18. 若 Bellman 算子折扣因子为 β ，写出残差界。

习题 40.19. 若 $\beta = 0.95$ 、Bellman 残差为 2×10^{-5} ，计算值函数误差上界。

习题 40.20. 解释为什么只看相邻两次迭代差距可能不如看 Bellman 残差直接。

习题 40.21. 写出市场清算残差 $H(r)$ 的一个例子。

习题 40.22. 说明二分法为什么需要初始括号。

习题 40.23. 若 $H(0.02) > 0$ 、 $H(0.06) < 0$ ，二分法第一步中点是多少？

习题 40.24. 写出一维 Newton 方法。

习题 40.25. 说明阻尼 Newton 步中的 ω 有什么作用。

习题 40.26. 写出 Monte Carlo 样本均值，并给出其均方误差。

习题 40.27. 若样本方差为 4、样本量为 10000，样本均值的标准误差是多少？

习题 40.28. 列出 HJB-KF 计算流程的主要步骤。

习题 40.29. 给定最优消费 $c^*(a, z)$ ，写出资产漂移和生成元构造的关系。

习题 40.30. 说明 KF 求解后为什么要检查 $\mathbf{1}^\top m = 1$ 和 $m_i \geq 0$ 。

习题 40.31. 写出有限状态 SDF 定价公式。

习题 40.32. 定义资产定价误差或定价残差。

习题 40.33. 说明 PDE 定价中需要检查哪些边界或终端条件。

习题 40.34. 什么是网格收敛检查？

习题 40.35. 列出一个宏观金融计算实验应记录的复现信息。

40.15 Solutions

本章题解的主线是：每一个证明中的等式、边界条件或固定点，在计算中都应对应一个离散方程、矩阵性质、残差或诊断表。

解答 40.1. 证明说明连续模型中对象应满足什么条件，例如最优性、市场清算、概率守恒和边界可行性。计算只能在有限网格或有限样本上近似这些条件。因此计算不是替代证明，而是检查离散近似是否足够接近证明给出的条件。

解答 40.2. 均匀网格步长为

$$\Delta x = \frac{10 - 0}{51 - 1} = \frac{10}{50} = 0.2.$$

解答 40.3. 若离散方程为 $F_I(u) = 0$ ，候选解为 $\hat{u}$ ，残差为

$$R(\hat{u}) = F_I(\hat{u}).$$

最大残差 $\|R(\hat{u})\|_\infty$ 衡量最差网格点上方程偏离零的程度，是判断候选解是否真正满足离散方程的重要指标。

解答 40.4. 显式 Euler 方法为

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t f(x_n).$$

它用当前点斜率 $f(x_n)$ 推进下一期状态。

解答 40.5. 对 $\dot{x} = -2x$ ，显式 Euler 为

$$x_{n+1} = x_n - 2\Delta t x_n = (1 - 2\Delta t)x_n.$$

衰减稳定要求

$$|1 - 2\Delta t| < 1,$$

即

$$0 < \Delta t < 1.$$

解答 40.6. Taylor 展开：

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t x'(t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 x''(\xi).$$

由 $x'(t) = f(x(t))$ ，得到

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t f(x(t)) + O(\Delta t^2).$$

显式 Euler 使用前两项，所以一步截断误差为 $O(\Delta t^2)$ 。

解答 40.7. 前向差分：

$$D^+v_i = \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta x}.$$

后向差分：

$$D^-v_i = \frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta x}.$$

中心差分：

$$D^0v_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\Delta x}.$$

解答 40.8. 中心差分同时使用 $x_i + \Delta x$ 和 $x_i - \Delta x$ 。Taylor 展开相减时，二阶项抵消，因此主误差通常为 $O((\Delta x)^2)$ 。前向或后向差分只用一侧点，主误差一般为 $O(\Delta x)$ 。

解答 40.9. 二阶导数三点差分为

$$v''(x_i) \approx \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{(\Delta x)^2}.$$

解答 40.10. 若 $s_i > 0$ ，状态从左向右流动，网格点 i 的上游在左侧，因此应使用后向差分

$$v_a(a_i) \approx \frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta a}.$$

解答 40.11. 若 $s_i < 0$ ，状态从右向左流动，上游在右侧，因此

$$v_a(a_i) \approx \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta a}.$$

解答 40.12. 迎风格式按漂移方向选择上游点，使概率或状态质量从上游流向下流。把离散漂移写成矩阵时，相邻点之间的流动强度可以保持非负，当前点的对角元吸收流出强度，从而形成非对角元非负、行和为零的生成元结构。

解答 40.13. 生成元矩阵 G 的基本性质是：非对角元非负；每一行和为零，即

$$G\mathbf{1} = 0.$$

前者保证跳转强度不是负数，后者保证概率质量守恒。

解答 40.14. 由 $\dot{m} = G^\top m$,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{1}^\top m = \mathbf{1}^\top G^\top m = (G\mathbf{1})^\top m.$$

若 $G\mathbf{1} = 0$ ，则

$$\frac{d}{dt}\mathbf{1}^\top m = 0.$$

所以总质量保持不变。

解答 40.15. 离散平稳分布满足

$$G^\top m = 0, \quad \mathbf{1}^\top m = 1, \quad m_i \geq 0.$$

第一式是不随时间变化，第二式是归一化，第三式是概率非负。

解答 40.16. 设 $m = (m_1, m_2)^\top$ 。由 $G^\top m = 0$,

$$-m_1 + 2m_2 = 0,$$

所以 $m_1 = 2m_2$ 。再由 $m_1 + m_2 = 1$, 得

$$3m_2 = 1, \quad m_2 = \frac{1}{3}, \quad m_1 = \frac{2}{3}.$$

解答 40.17. 值函数迭代为

$$V^{n+1} = TV^n.$$

从初始猜测 V^0 出发, 重复应用 Bellman 算子。

解答 40.18. 若 T 是模数 β 的压缩映射, 则

$$\|V - V^*\|_\infty \leq \frac{\|TV - V\|_\infty}{1 - \beta}.$$

右侧是可计算的 Bellman 残差上界。

解答 40.19. 误差上界为

$$\frac{2 \times 10^{-5}}{1 - 0.95} = \frac{2 \times 10^{-5}}{0.05} = 4 \times 10^{-4}.$$

解答 40.20. 相邻两次迭代差距衡量算法是否变化很小, 但不一定直接衡量候选函数是否满足 Bellman 方程。Bellman 残差 $\|TV - V\|$ 直接把候选函数代回方程, 因此更直接对应固定点条件。

解答 40.21. 一个常见市场清算残差是

$$H(r) = A^s(r) - K^d(r),$$

其中 $A^s(r)$ 是家庭资产供给, $K^d(r)$ 是企业资本需求。均衡要求 $H(r) = 0$ 。

解答 40.22. 二分法依赖介值定理。若连续函数在区间两端异号, 则区间内至少有一个根。初始括号保证每次缩小区间时仍然没有丢掉根。

解答 40.23. 第一步中点为

$$\frac{0.02 + 0.06}{2} = 0.04.$$

解答 40.24. 一维 Newton 方法为

$$p_{n+1} = p_n - \frac{H(p_n)}{H'(p_n)}.$$

它用当前点的一阶线性近似估计根的位置。

解答 40.25. 阻尼参数 $\omega \in (0, 1]$ 控制 Newton 步长：

$$p_{n+1} = p_n - \omega \frac{H(p_n)}{H'(p_n)}.$$

当完整 Newton 步过大、导致残差上升或跳出可行区间时，较小的 ω 可以提高稳健性。

解答 40.26. 样本均值为

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n.$$

若样本独立同分布、方差为 σ^2 ，则

$$\mathbb{E}[(\bar{X}_N - \mu)^2] = \frac{\sigma^2}{N}.$$

解答 40.27. 样本均值方差为

$$\frac{4}{10000} = 0.0004.$$

标准误差为

$$\sqrt{0.0004} = 0.02.$$

解答 40.28. 流程为：猜测价格；解 HJB 得到最优政策；由政策构造生成元 G ；解 $G^\top m = 0$ 得平稳分布；计算聚合量；检查市场清算残差；更新价格并重复。

解答 40.29. 给定 $c^*(a, z)$ ，资产漂移为

$$s^*(a, z) = wz + ra - c^*(a, z).$$

漂移的正负决定迎风差分方向，也决定生成元矩阵中质量从一个资产网格点流向相邻点的强度。

解答 40.30. $\mathbf{1}^\top m = 1$ 检查总概率质量是否守恒， $m_i \geq 0$ 检查分布是否仍有概率解释。若质量不是一或出现负概率，后续聚合资产、消费和清算残差都不可信。

解答 40.31. 有限状态 SDF 定价为

$$p = \sum_s \pi_s M_s X_s,$$

其中 π_s 是状态概率， M_s 是 SDF， X_s 是该状态支付。

解答 40.32. 若模型价格为 p , SDF 定价内积为 $\sum_s \pi_s M_s X_s$, 定价残差可写为

$$R = p - \sum_s \pi_s M_s X_s.$$

无误差的离散定价方程要求 $R = 0$ 。

解答 40.33. PDE 定价需要检查终端 payoff 是否正确、低价格和高价格边界是否合理、时间边界是否一致, 以及内点 PDE 残差是否足够小。边界错了, 内点数值可能也会被污染。

解答 40.34. 网格收敛检查是在更细网格或更小步长上重复求解, 比较主要结果是否稳定。若价格、政策函数、矩或清算残差随网格显著变化, 说明当前离散化还不可靠。

解答 40.35. 应记录参数表、网格范围、网格点数、时间步长、停止准则、残差、随机种子、软件版本、关键输出和生成图表的脚本。这样别人或未来的自己才能复现同一计算结果。

40.16 Computation Lab

本章计算实验的目标是建立一套可复用的数值诊断模板, 而不是追求复杂模型。

1. **网格和差分模板。** 构造区间 $[\underline{x}, \bar{x}]$ 上的均匀网格, 生成 D^+ 、 D^- 、 D^0 和 D^2 的矩阵形式。检查矩阵维度和边界行。

2. **Euler 稳定性实验。** 对

$$\dot{x} = -\alpha x$$

使用显式 Euler, 比较不同 Δt 下路径是否单调衰减、振荡或发散。

3. **生成元矩阵检查。** 构造一个三点或五点生成元 G , 检查非对角元是否非负、每一行和是否为零。然后求解

$$G^\top m = 0, \quad \mathbf{1}^\top m = 1.$$

4. **Bellman 残差表。** 对一个有限状态动态规划做值函数迭代, 每轮记录

$$\|TV^n - V^n\|_\infty$$

和误差上界

$$\frac{\|TV^n - V^n\|_\infty}{1 - \beta}.$$

5. **一维市场清算。** 给定两个函数 $A^s(r)$ 和 $K^d(r)$, 用二分法求解

$$H(r) = A^s(r) - K^d(r) = 0.$$

每一步打印区间端点、中点和残差符号。

6. **HJB-KF 诊断表**。在简化消费储蓄模型中，记录 HJB 最大残差、KF 质量误差、最小概率、聚合资产和市场清算残差。改变网格点数，检查主要结果是否稳定。

附录总览

本附录体系不是正文之后的第四卷，而是正文 Ch00–Ch39 的技术补充层和未来扩展接口。正文保持学习主线：选择、均衡、风险、动态、资产定价、连续时间和计算。附录承担三项任务：补足正文中不宜展开的证明细节，集中整理跨章工具和符号依赖，为后续 source audit、pedagogical review 和高级专题扩展留下稳定入口。

附录第一版采用“技术证明型 + 长期扩展型”的折中结构。Appendix A–E 提供可以直接阅读的数学技术补充；Appendix F–G 提供高阶随机过程、金融基本定理、viscosity solution 和 Mean Field Games 的研究接口，但不展开为完整专著；Appendix H 负责来源核验、阅读路线、符号表和定理依赖图的总控。

所有附录中的外部参考只作为待核验方向，不视为已验证引用。真正引用、书目信息和历史归属应在后续 source audit 完成后再进入正式参考文献系统。

附录 A 逻辑、证明方法与集合论补充

A.1 用途与正文依赖

本附录服务 Ch00–Ch04 和 Ch11–Ch14。正文中已经使用了集合、命题、量词、映射、对应、偏序、紧性和不动点等语言；这里把这些语言的底层规则集中起来。目标不是建立数理逻辑课程，而是让读者在阅读经济证明时知道每一步证明到底在使用什么形式。

本附录特别对应四类正文任务：证明最优解存在，证明需求或政策对应非空，证明均衡存在，证明一个递归对象是固定点。它们看起来属于不同经济问题，但逻辑结构高度相似：先给出对象存在的候选空间，再给出映射或对应，再用紧性、连续性、闭图或不动点工具获得结论。

A.2 命题、量词与经济断言

经济理论中的一句话常常含有多个量词。例如“每个价格下都存在一个最优选择”可以写成

$$\forall p \in P, \quad \exists x \in B(p) \quad u(x) \geq u(y) \text{ for all } y \in B(p).$$

量词顺序很重要。若改成“存在一个选择对所有价格都最优”，形式为

$$\exists x, \quad \forall p \in P, \quad x \in B(p) \text{ and } x \in \arg \max_{y \in B(p)} u(y),$$

这通常是完全不同、也通常错误的命题。

例 A.1 (量词顺序). “对任意消费者，都存在一个预算最优消费束”是合理命题；“存在一个消费束，对任意消费者都是预算最优”通常不合理。第一个命题是逐个体存在，第二个命题是统一存在。很多均衡存在证明的困难，正来自需要找到一个统一价格或统一分配，而不是逐状态分别选择。

否定含量词的命题时，量词互换：

$$\neg(\forall x \in X, P(x)) \iff \exists x \in X, \neg P(x),$$

$$\neg(\exists x \in X, P(x)) \iff \forall x \in X, \neg P(x).$$

反证法通常就是把目标命题取否定，然后推出与已知条件矛盾的结论。

A.3 直接证明、反证法与逆否命题

直接证明的结构是：从假设 A 出发，经过已知定理或代数推导得到结论 B 。反证法的结构是：假设 A 成立但 B 不成立，推出矛盾。逆否命题使用逻辑等价：

$$A \Rightarrow B \iff \neg B \Rightarrow \neg A.$$

命题 A.1 (逆否命题等价). 对任意命题 A, B ，命题 $A \Rightarrow B$ 与 $\neg B \Rightarrow \neg A$ 逻辑等价。

证明. 若 $A \Rightarrow B$ 成立，并且 B 不成立，则 A 不可能成立；否则由 $A \Rightarrow B$ 会得到 B ，矛盾。因此 $\neg B \Rightarrow \neg A$ 。反过来，若 $\neg B \Rightarrow \neg A$ 成立，并且 A 成立但 B 不成立，则由 $\neg B$ 得到 $\neg A$ ，与 A 矛盾。所以 B 必须成立。□

经济学中经常用逆否命题证明“若价格支持失败，则不是最优”或“若不存在套利，则存在正状态价格”这类命题。读者应当识别：证明中的“假设结论不成立”不是任意技巧，而是在使用一个等价命题。

A.4 集合运算与闭包直觉

集合运算包括并、交、差和补：

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad X \setminus A.$$

在经济模型中，交集经常表示多个约束同时满足；并集经常表示多种机制中至少一种可行；补集经常表示违反某个条件的对象集合。

命题 A.2 (De Morgan 法则). 在全集 X 中，

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B),$$

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

证明. 对任意 $x \in X$ ， $x \notin A \cup B$ 当且仅当 $x \notin A$ 且 $x \notin B$ 。这给出第一式。第二式同理： $x \notin A \cap B$ 当且仅当 $x \notin A$ 或 $x \notin B$ 。□

闭包和边界在最优选择中很常见。若最优点可能位于约束边界，闭集假设就不能随意删除。紧集上的连续函数取得最大值，依赖的是“有界防止跑远”和“闭合保证极限点仍可行”两个直觉。

A.5 关系、函数与对应

函数 $f: X \rightarrow Y$ 给每个 $x \in X$ 唯一指定一个 $f(x) \in Y$ 。对应 $\Gamma: X \rightrightarrows Y$ 给每个 x 指定一个集合 $\Gamma(x) \subseteq Y$ 。正文中需求、最优政策、均衡反应经常是对应而不是函数，因为最优解可能不唯一。

对应的图定义为

$$\text{Gr}(\Gamma) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in \Gamma(x)\}.$$

闭图性质常用来保证极限选择仍然可行。若 $x_n \rightarrow x$ 、 $y_n \rightarrow y$ 、且 $y_n \in \Gamma(x_n)$ ，闭图意味着 $y \in \Gamma(x)$ 。

例 A.2 (预算对应). 预算对应

$$B(p, w) = \{x \in \mathbb{R}_+^L : p \cdot x \leq w\}$$

通常不是单点。需求对应

$$X(p, w) = \arg \max_{x \in B(p, w)} u(x)$$

也可能有多个元素。若偏好严格凸，需求可能变成函数；否则保留对应语言更稳健。

A.6 选择公理的温和用法

当我们说“对每个 s ，从非空集合 $\Gamma(s)$ 中选一个 $g(s) \in \Gamma(s)$ ”时，实际上在使用选择思想。有限状态中这很简单；无限状态中还要关心选择是否可测或连续。正文 Ch22 只使用经济学中需要的可测选择入口，最一般的选择定理不放入主线。

A.7 附录 A 的待核验阅读路线

待核验来源类型包括：经济数学中的证明方法章节、集合论和拓扑入门、对应与最大值定理教材章节。后续 source audit 应检查这些来源如何表述图、半连续性、可测选择和经济例子，并登记到 `registries/SOURCE_REGISTRY.md` 后再正式引用。

附录 B 线性代数进阶、谱理论与矩阵分析

B.1 用途与正文依赖

本附录服务 Ch02、Ch14、Ch23–Ch28、Ch31、Ch37–Ch39。正文已经介绍向量、矩阵、二次型、特征值、Markov 转移矩阵和离散生成元；这里补充几个跨章反复出现的线性代数技术：谱半径、正矩阵直觉、投影、矩阵范数和离散算子的稳定性。

在经济金融中，矩阵不是单纯的计算工具。转移矩阵描述风险和分布，Jacobian 描述局部稳定性，Hessian 描述二阶条件，生成元矩阵描述连续时间 Markov 流动，投影矩阵描述近似和估计。附录 B 的目标是把这些对象放在同一张地图里。

B.2 谱半径与动态稳定性

方阵 A 的谱半径定义为

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ is an eigenvalue of } A\}.$$

在线性差分系统

$$x_{t+1} = Ax_t$$

中，若 A 可对角化，则

$$x_t = A^t x_0 = P \Lambda^t P^{-1} x_0.$$

因此 $\rho(A) < 1$ 意味着每个特征方向都衰减。

命题 B.1 (可对角化系统的衰减). 若 $A = P \Lambda P^{-1}$ ，且所有特征值满足 $|\lambda_i| < 1$ ，则 $A^t x \rightarrow 0$ 对任意 x 成立。

证明. 由 $A^t = P \Lambda^t P^{-1}$ 。对角矩阵 Λ^t 的第 i 个对角元为 λ_i^t ，当 $|\lambda_i| < 1$ 时趋于零。因此 $\Lambda^t \rightarrow 0$ ，从而 $A^t x \rightarrow 0$ 。□

例 B.1 (局部动态). 若非线性系统在稳态附近线性化为

$$\Delta x_{t+1} = J\Delta x_t,$$

则 J 的特征值给出局部稳定性。宏观动态中的“鞍路径稳定”可以理解为一部分特征方向稳定、一部分不稳定，需要初始或跳跃变量选在稳定流形上。

B.3 非负矩阵与 Perron-Frobenius 直觉

非负矩阵 $A \geq 0$ 表示所有元素非负。Markov 转移矩阵、投入产出矩阵和某些增长算子都属于这一类。非负结构带来强经济含义：概率不能为负，产出需求不能为负，分布质量不能为负。

若 P 是行随机矩阵，则

$$P\mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

平稳分布 π 满足

$$P^\top \pi = \pi, \quad \mathbf{1}^\top \pi = 1.$$

这说明 1 是 P 的特征值，而平稳分布是 $P^\top$ 对应特征向量的归一化版本。

例 B.2 (两状态 Markov 链). 若

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix},$$

则平稳分布满足

$$\pi_1\alpha = \pi_2\beta, \quad \pi_1 + \pi_2 = 1.$$

解得

$$\pi_1 = \frac{\beta}{\alpha + \beta}, \quad \pi_2 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

B.4 矩阵范数与误差界

矩阵范数衡量线性算子的放大能力。给定向量范数 $\|\cdot\|$ ，诱导矩阵范数为

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

它满足

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|, \quad \|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

在数值算法中, 若一个迭代误差满足

$$e_{n+1} = Ae_n,$$

则

$$\|e_n\| \leq \|A\|^n \|e_0\|.$$

若某个范数下 $\|A\| < 1$, 误差收敛。

B.5 投影与最小二乘近似

在 Hilbert 空间或有限维欧氏空间中, 把对象投影到低维子空间, 是近似动态模型和投影法的基础。若 M 是由列向量组成的矩阵, 最小化

$$\min_b \|y - Mb\|^2$$

的一阶条件为

$$M^\top Mb = M^\top y.$$

若 $M^\top M$ 可逆, 则

$$b = (M^\top M)^{-1} M^\top y.$$

命题 B.2 (正规方程). 最小二乘问题 $\min_b \|y - Mb\|^2$ 的内点解满足 $M^\top(y - Mb) = 0$ 。

证明. 目标函数为

$$Q(b) = (y - Mb)^\top (y - Mb).$$

对 b 求导得到

$$\nabla Q(b) = -2M^\top(y - Mb).$$

令导数为零, 即得 $M^\top(y - Mb) = 0$ 。 □

B.6 生成元矩阵的线性代数

连续时间 Markov 链的生成元 G 满足非对角元非负、行和为零。平稳分布满足

$$G^\top m = 0, \quad \mathbf{1}^\top m = 1.$$

由于 $G^\top$ 奇异, 实际计算中通常把其中一个方程替换为归一化方程。线性代数上, 这是在零空间中选取概率归一化的代表。

例 B.3 (替换一行). 若要解 $G^\top m = 0$, 可以把矩阵 $G^\top$ 的最后一行替换为 $\mathbf{1}^\top$, 把右端最后一个元素替换为 1。这得到一个非奇异线性系统的候选版本。求得 m 后仍需检查 $G^\top m$ 残差和 $m_i \geq 0$ 。

B.7 附录 B 的待核验阅读路线

待核验来源类型包括：线性代数教材中的谱理论、矩阵分析教材中的非负矩阵、数值线性代数中的范数和条件数、动态经济学教材中的 Markov 矩阵与投影法。后续引用前应核验每个定理的假设版本，避免把有限维结论错误推广到无限维环境。

附录 C 一般拓扑、紧性与局部凸空间

C.1 用途与正文依赖

本附录服务 Ch03–Ch04、Ch11–Ch12、Ch19–Ch22 和 Ch34。正文中主要使用度量空间和有限维直觉；但许多经济问题天然进入无限维空间，例如无限商品、随机支付、概率测度和价格泛函。附录 C 给出从度量拓扑到一般拓扑、从范数拓扑到弱拓扑、从凸集到局部凸空间的入口。

这里不展开完整拓扑学。我们只保留对经济证明有用的语言：开集、闭集、紧性、连续映射、乘积拓扑、弱拓扑、局部凸性和分离思想。

C.2 拓扑空间的最小语言

集合 X 上的拓扑 $\mathcal{T}$ 是一族子集，满足：空集和 X 属于 $\mathcal{T}$ ，任意并仍属于 $\mathcal{T}$ ，有限交仍属于 $\mathcal{T}$ 。 $\mathcal{T}$ 中的集合称为开集。

在度量空间中，开集由开球生成；在一般拓扑空间中，我们不一定有距离，但仍然可以谈连续性：映射 $f: X \rightarrow Y$ 连续，当且仅当对任意 Y 中开集 O ，原像 $f^{-1}(O)$ 是 X 中开集。

例 C.1 (为什么不用距离也有用). 概率测度的弱收敛可以由测试函数刻画，而不一定从某个初等距离出发。资产定价中的价格泛函也常常自然生活在线性泛函空间中。一般拓扑语言让我们可以说“价格序列收敛”“分布序列收敛”，而不必一开始就指定欧氏距离。

C.3 紧性作为存在性机器

紧性最重要的经济用途是保证极限对象仍在可行集合中，并让连续函数取得极值。在一般拓扑中，紧性定义为：任意开覆盖都有有限子覆盖。度量空间中，紧性常常可以通过序列紧性理解；有限维欧氏空间中，Heine-Borel 定理把紧性等同于闭且有界。

命题 C.1 (连续像保持紧性). 若 K 紧，且 $f: K \rightarrow Y$ 连续，则 $f(K)$ 紧。

证明. 设 $\{O_\alpha\}$ 是 $f(K)$ 的开覆盖。则 $\{f^{-1}(O_\alpha)\}$ 是 K 的开覆盖。由紧性, 存在有限子覆盖 $f^{-1}(O_{\alpha_1}), \dots, f^{-1}(O_{\alpha_n})$ 。于是 $O_{\alpha_1}, \dots, O_{\alpha_n}$ 覆盖 $f(K)$ 。□

最大值定理的核心正是: 若可行集合紧, 目标连续, 则目标值集合紧, 从而最大值存在。参数化版本再加入可行对应随参数变化的连续性。

C.4 乘积拓扑与无限商品

有限维商品空间中, 商品束是向量。无限商品经济中, 商品束可能是序列或函数。若 X_i 是每个商品或状态的选择空间, 乘积空间为

$$\prod_{i \in I} X_i.$$

乘积拓扑让坐标投影

$$\pi_i(x) = x_i$$

连续, 并且是满足这一性质的自然拓扑。

正文中不展开无限商品一般均衡存在性, 因为它需要更重的拓扑和对偶工具。但读者应知道: 无限维问题的难点不只是“变量多”, 而是紧性、连续性、价格支持和可行集闭性都可能换一种拓扑才成立。

C.5 局部凸空间与分离

局部凸空间是带有足够多凸邻域的拓扑向量空间。它的核心价值是支持分离定理: 在适当条件下, 凸集可以被连续线性泛函分离。经济上, 连续线性泛函就是价格或影子价格。

定义 C.1 (局部凸直觉). 拓扑向量空间 X 若零点附近有一族凸邻域作为局部基, 则称为局部凸。局部凸性保证拓扑与线性结构足够协调, 使连续线性泛函能够区分点和凸集。

例 C.2 (价格作为分离泛函). 福利定理和无套利定理都可以看成分离思想的应用。一个不可行改善方向或套利机会集合若与可接受集合分离, 分离超平面给出价格、状态价格或随机贴现因子。有限维时这是超平面; 无限维时就是连续线性泛函。

C.6 弱拓扑的经济意义

给定线性空间 X 和一族线性泛函 X^* , 弱拓扑是使这些泛函连续的最弱拓扑。序列 x_n 弱收敛到 x , 意味着

$$\ell(x_n) \rightarrow \ell(x)$$

对所有相关线性泛函 ℓ 成立。

弱拓扑通常比范数拓扑更粗，因此更容易产生紧性。经济上，这允许我们在较弱意义下取得极限对象，例如分布收敛、价格泛函收敛或随机支付的积分收敛。

C.7 附录 C 的待核验阅读路线

待核验来源类型包括：一般拓扑入门、无限维分析教材、局部凸空间和分离定理资料、无限商品经济中的价格支持材料。后续 source audit 应特别核验每个紧性结论依赖何种拓扑，避免在正文修订中把范数紧性、弱紧性和序列紧性混用。

附录 D 测度论技术：Radon–Nikodym、Fubini 与条件期望

D.1 用途与正文依赖

本附录服务 Ch15–Ch18、Ch21、Ch23、Ch28、Ch32–Ch34 和 Ch37。正文已经建立概率空间、Lebesgue 积分、条件期望、分布、弱收敛和鞅定价的入口；这里补充几个正文中常用但不宜反复展开的测度论技术：绝对连续、Radon–Nikodym 导数、乘积测度、Fubini/Tonelli、条件期望的投影直觉和测度变换。

D.2 绝对连续与密度

设 μ, ν 是同一可测空间上的测度。若

$$\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$$

对所有可测集 A 成立，则称 μ 关于 ν 绝对连续，记作 $\mu \ll \nu$ 。直觉是： ν 认为不可能的事件， μ 也认为不可能。

若存在非负可测函数 f ，使得

$$\mu(A) = \int_A f d\nu$$

对所有 A 成立，则 f 是 μ 相对于 ν 的密度，记作

$$f = \frac{d\mu}{d\nu}.$$

例 D.1 (风险中性概率密度). 若风险中性测度 $\mathbb{Q}$ 与真实测度 $\mathbb{P}$ 等价，则存在密度过程或终端密度

$$Z = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}.$$

定价中常见表达

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[ZX]$$

就是 Radon–Nikodym 思想的应用。

D.3 Radon–Nikodym 定理的用法

Radon–Nikodym 定理的完整证明较技术化，正文只需要知道它提供了“测度之比”的严格版本。

定理 D.1 (Radon–Nikodym 定理，使用版). 若 μ 与 ν 是 σ -有限测度，且 $\mu \ll \nu$ ，则存在非负可测函数 f ，使得

$$\mu(A) = \int_A f d\nu$$

对所有可测集 A 成立。函数 f 在 ν -几乎处处意义下唯一。

经济和金融中的关键不是记住证明细节，而是识别何时可以把一个测度写成另一个测度下的密度。这是状态价格、SDF、风险中性概率、似然比和测度变换的共同语言。

D.4 Tonelli 与 Fubini

二重积分的交换不是无条件的。Tonelli 定理处理非负函数，Fubini 定理处理可积函数。若 $f \geq 0$ ，则即使积分可能为无穷，也有

$$\int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu(x) d\nu(y).$$

若 f 可积，即

$$\int |f| d(\mu \otimes \nu) < \infty,$$

则 Fubini 允许交换积分次序。

例 D.2 (聚合消费). 若 $c(a, z) \geq 0$ ，横截面总消费

$$C = \sum_z \int c(a, z) m(a, z) da$$

可以先对资产积分再对状态求和，也可以先按状态分组再聚合。非负性让 Tonelli 适用。若对象可能有正负部分，则需要可积性检查。

D.5 条件期望的投影直觉

条件期望 $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ 是 $\mathcal{G}$ -可测随机变量，并满足

$$\int_G \mathbb{E}[X | \mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_G X d\mathbb{P}$$

对所有 $G \in \mathcal{G}$ 成立。若 $X \in L^2$ ，它也可以看作把 X 投影到 $\mathcal{G}$ -可测平方可积随机变量构成的闭子空间。

命题 D.1 (塔式性质). 若 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ ，且 X 可积，则

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] = \mathbb{E}[X | \mathcal{H}].$$

证明. 左边是 $\mathcal{H}$ -可测。对任意 $H \in \mathcal{H}$ ，因为 $H \in \mathcal{G}$ ，

$$\int_H \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] d\mathbb{P} = \int_H \mathbb{E}[X | \mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_H X d\mathbb{P}.$$

由条件期望的唯一性，结论成立。 □

D.6 测度变换与等价性

在资产定价中，等价测度要求两种测度有相同零概率事件。若 $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ ，则套利不可见的事件集合不会因换测度而改变。风险中性定价不是说真实概率等于风险中性概率，而是说在适当密度加权后，折现价格成为鞅。

D.7 附录 D 的待核验阅读路线

待核验来源类型包括：测度论教材中的 Radon–Nikodym、Fubini、条件期望章节，概率论教材中的正则条件分布，金融数学教材中的等价测度和密度过程。后续 source audit 应确认正文中每个积分交换、条件期望和测度变换是否满足相应可积性或绝对连续假设。

附录 E 泛函分析证明补充：Riesz、弱拓扑与 Banach–Alaoglu 接口

E.1 用途与正文依赖

本附录服务 Ch19–Ch22、Ch28、Ch31、Ch33–Ch34。正文已经介绍赋范空间、Banach 空间、Hilbert 空间、连续线性泛函和有限维投影；这里补充三个研究中经常出现的接口：Riesz 表示思想、弱拓扑和弱星紧性。

泛函分析的经济意义可以概括为一句话：当商品、状态、时间或风险暴露变成无限维对象时，价格不再只是一个向量，而是一个连续线性泛函。福利定理、无套利定价、无限商品均衡和 PDE 弱解都依赖这种语言。

E.2 连续线性泛函与对偶空间

给定赋范空间 X ，连续线性泛函是映射 $\ell : X \rightarrow \mathbb{R}$ ，满足线性和连续性。所有连续线性泛函构成对偶空间 X^* 。其范数为

$$\|\ell\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\ell(x)|.$$

若 ℓ 是价格泛函， $\ell(x)$ 就是支付 x 的价格。连续性意味着小的支付扰动不会导致无限大的价格变化。

例 E.1 (状态价格向量与价格泛函). 有限状态中，支付 $x \in \mathbb{R}^S$ ，价格为

$$p(x) = \sum_{s=1}^S q_s x_s.$$

这里 q 是状态价格向量。无限状态中，价格可能写成

$$p(X) = \mathbb{E}[MX],$$

此时 M 扮演密度或 SDF 的角色， p 是定义在随机支付空间上的线性泛函。

E.3 Hilbert 空间中的 Riesz 表示

Hilbert 空间 H 有内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 。Riesz 表示定理说明: 每个连续线性泛函都可以由某个元素 $y \in H$ 表示为

$$\ell(x) = \langle x, y \rangle.$$

完整证明需要 Hilbert 空间投影定理; 正文只使用其有限维和直观版本。

定理 E.1 (Riesz 表示, Hilbert 空间使用版). 若 H 是 Hilbert 空间, 且 $\ell \in H^*$, 则存在唯一 $y \in H$, 使得

$$\ell(x) = \langle x, y \rangle$$

对所有 $x \in H$ 成立。

例 E.2 (SDF 作为表示元素). 若支付空间是 L^2 , 价格泛函 $p(X)$ 连续线性, 则 Riesz 思想说明存在 $M \in L^2$, 使

$$p(X) = \mathbb{E}[MX].$$

这就是随机贴现因子的泛函分析来源之一。

E.4 弱拓扑与弱收敛

范数收敛要求

$$\|x_n - x\| \rightarrow 0.$$

弱收敛只要求所有连续线性泛函下的数值收敛:

$$\ell(x_n) \rightarrow \ell(x) \quad \text{for all } \ell \in X^*.$$

弱收敛更容易成立, 也更适合处理无限维极限。

例 E.3 (分布收敛的类似结构). 概率测度弱收敛可由测试函数积分收敛刻画:

$$\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu.$$

这与向量弱收敛的形式类似: 不是直接比较对象本身, 而是比较所有测试泛函作用后的数值。

E.5 Banach–Alaoglu 的接口

Banach–Alaoglu 定理说明，对偶空间单位球在弱星拓扑下紧。完整形式超出正文需要，但其经济含义很重要：在合适拓扑下，价格泛函集合可以有紧性，从而极限价格或支持价格有存在性基础。

定理 E.2 (Banach–Alaoglu, 接口版). 赋范空间 X 的对偶单位球

$$\{\ell \in X^* : \|\ell\| \leq 1\}$$

在弱星拓扑下是紧的。

本书初版不证明该定理。后续若扩展无限商品一般均衡、一般无套利定理或弱解理论，Banach–Alaoglu 将成为关键工具。

E.6 附录 E 的待核验阅读路线

待核验来源类型包括：泛函分析教材中的 Riesz 表示、Hahn–Banach、弱拓扑和 Banach–Alaoglu；经济分析教材中的价格泛函和无限商品经济；资产定价教材中的 SDF 表示。后续 source audit 应区分 Hilbert 空间表示和一般 Banach 空间对偶表示，避免把内积表示误用于所有空间。

附录 F 随机过程与半鞅入口

F.1 用途与正文依赖

本附录服务 Ch23、Ch32–Ch36 和 Ch38。正文已经介绍离散时间过滤、鞅、Brownian motion、Itô 积分、SDE、Girsanov 入口和连续时间资产定价。这里说明更一般的随机过程框架如何连接正文，但不展开完整半鞅理论。

正文主线选择 Brownian 驱动的 Itô 过程，是因为它足以覆盖 Black–Scholes、Merton、HJB 和许多宏观金融模型。一般半鞅框架能处理跳跃、随机波动、默认、交易时钟和更一般的信息结构，但技术负担显著更高。

F.2 从鞅到局部鞅

鞅满足

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s, \quad s \leq t.$$

局部鞅放宽为：存在一列停止时 $\tau_n \uparrow \infty$ ，使得停止过程

$$M_{t \wedge \tau_n}$$

是鞅。这个概念允许处理不一定全局可积、但局部上有鞅结构的过程。

例 F.1 (为什么需要局部化). 连续时间金融中，某些随机积分自然是局部鞅，但不一定是严格鞅。若直接把所有局部鞅当成鞅，可能得到错误的定价公式。局部化技术就是在可控区间上先证明，再通过极限处理全局问题。

F.3 半鞅的分解直觉

半鞅可以粗略理解为“局部鞅 + 有限变差过程”。典型形式为

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

其中 M_t 是局部鞅， A_t 是有限变差过程。Itô 过程

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t$$

就是半鞅的一类：漂移积分是有限变差部分，随机积分是局部鞅部分。

F.4 随机积分的一般化

正文中的 Itô 积分

$$\int_0^t H_s dW_s$$

以 Brownian motion 为积分器。半鞅理论允许积分器本身是更一般的半鞅：

$$\int_0^t H_s dX_s.$$

这对一般资产价格过程重要，因为资产价格可能有跳跃或复杂波动结构。

例 F.2 (带跳价格). 若股票价格有突然跳跃，仅用

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

不能描述跳跃风险。半鞅框架允许价格包含跳跃项。此时无套利、复制和风险中性定价需要处理连续风险和跳跃风险两个部分。

F.5 二次变差与协变差

Brownian motion 的二次变差为

$$[W]_t = t.$$

一般半鞅也有二次变差 $[X]_t$ 和协变差 $[X, Y]_t$ 。Itô 公式中的二阶项来自二次变差。对金融应用来说，二次变差连接到实现波动率、对冲误差和连续时间风险溢价。

F.6 为什么初版不展开完整半鞅理论

完整半鞅理论需要可预测过程、随机积分一般构造、Doob–Meyer 分解、局部特征、跳跃度和更一般的无套利条件。它非常重要，但若放入正文，会压垮本书的主线。初版只保留 Brownian/Itô 主干，把一般半鞅作为研究入口。

F.7 附录 F 的待核验阅读路线

待核验来源类型包括：随机过程教材中的局部鞅和半鞅章节，金融数学教材中的一般无套利框架，跳扩散和信用风险材料。后续 source audit 应先核验定义和定理假设，再决定是否把半鞅专题扩展为独立高级模块。

附录 G 高级金融基本定理、viscosity solution 与 Mean Field Games 接口

G.1 用途与正文依赖

本附录服务 Ch31–Ch39。它不是新主线，而是三个未来研究方向的接口：一般金融基本定理，viscosity solution，高维分布动态和 Mean Field Games。正文中已经提供 PDE、HJB、鞅测度、HJB-KF 和计算方法的入口；这里说明继续深入时需要补哪些工具。

G.2 一般金融基本定理接口

正文 Ch34 给出无套利和鞅测度的入门版本。更一般的金融基本定理需要处理无限状态、连续时间、交易策略约束、局部鞅测度和不同无套利概念。核心思想仍是：

无套利条件 $\iff$ 存在合适的等价定价测度或 deflator.

但“合适”二字在高级版本中非常技术化。

例 G.1 (从有限状态到连续时间). 有限状态一期间，无套利可由正状态价格刻画。连续时间半鞅市场中，价格过程的折现形式需要在某个等价测度下成为局部鞅，或者存在严格正 deflator 使得财富过程被折现后满足超鞅性质。

G.3 viscosity solution 接口

HJB 方程经常没有经典 C^2 解。viscosity solution 提供弱解概念，让 HJB 在不可光滑点仍有良好比较原理和唯一性理论。正文 Ch33 和 Ch39 只使用光滑验证和数值残差；高级研究中，viscosity solution 是理论和计算之间的重要桥梁。

直觉上, viscosity solution 不要求函数处处可微, 而是用光滑测试函数从上方或下方接触目标函数, 并在接触点检查 PDE 不等式。这样可以处理价值函数的折点、状态约束和非光滑 payoff。

例 G.2 (期权 payoff 的非光滑性). 欧式看涨期权终端 payoff

$$(S - K)^+$$

在 $S = K$ 不可微。定价 PDE 在终端时刻不可能有经典光滑终端条件。viscosity 或弱解语言解释了为什么 PDE 方法仍然有效。

G.4 Mean Field Games 接口

Mean Field Games 把大量相互影响的个体决策写成 HJB 与 KF 的联立系统:

HJB: individual optimization given distribution,

KF: distribution evolution induced by policy.

这与 Ch37–Ch38 的异质性主体 HJB-KF 系统形式相近, 但 MFG 更强调每个个体对总体分布的策略反应和均衡一致性。

完整 MFG 理论需要 HJB、FP/KF 方程、固定点、单调性条件、存在唯一性和数值算法。初版不展开, 是因为正文已经覆盖宏观金融所需的 HJB-KF 入口, 完整 MFG 会成为独立研究专题。

G.5 高维计算和机器学习求解器接口

高维 HJB 或分布动态可能需要投影法、稀疏网格、粒子法、深度学习近似或强化学习方法。本书初版不把机器学习求解动态模型纳入主线。原因不是它不重要, 而是它需要独立的统计学习、优化和泛化误差理论。Appendix G 只保留接口: 未来扩展必须同时说明算法、误差诊断和经济解释。

G.6 附录 G 的待核验阅读路线

待核验来源类型包括: 高级金融数学中的一般 FTAP, PDE/HJB 中的 viscosity solution 教材或讲义, Mean Field Games 入门与宏观分布动态材料, 高维计算经济学资料。所有具体文献和历史归属必须先进入 source audit, 不能在初稿中直接断言。

附录 H 来源核验、阅读路线、符号表与定理依赖图

H.1 用途与正文依赖

本附录是全书二轮修订的控制台。正文 Ch00–Ch39 已经形成 40 章初稿，登记了 151 个定理条目和两百余个符号条目；但来源核验仍处于 pending 状态。Appendix H 的任务是把后续工作组织成可执行队列：先核验来源，再统一符号，再审查证明和题解，最后进入版本冻结。

H.2 来源核验路线

当前 registries/SOURCE_REGISTRY.md 中的来源均为 pending verification。第一轮 source audit 应按卷推进：

1. 卷一：实分析、优化、凸分析、固定点、一般均衡和博弈来源。
2. 卷二：测度、积分、条件期望、函数空间、动态规划和离散时间资产定价来源。
3. 卷三：ODE、最优控制、PDE、Itô、HJB、无套利、Black–Scholes、Merton、HJB-KF 和计算方法来源。
4. 附录：拓扑、局部凸空间、Radon–Nikodym、Riesz、半鞅、viscosity solution 和 MFG 的高级入口来源。

每个来源核验条目至少记录：准确书名或论文名，作者，版本或年份，相关章节，使用目的，是否已核验，是否可作为正式引用。

H.3 阅读路线

建议读者按目标选择路线。

理论经济学路线 Ch01–Ch14, 然后 Ch19–Ch22, 最后回到 Appendix C–E。

递归宏观路线 Ch15–Ch17, Ch21, Ch24–Ch27, Ch37–Ch39。

资产定价路线 Ch18, Ch23, Ch28, Ch32–Ch36, 再读 Appendix D–G。

连续时间宏观金融路线 Ch29–Ch33, Ch37–Ch39, 再读 Appendix F–G。

计算路线 Ch14, Ch24–Ch27, Ch31, Ch37–Ch39, 并结合 Appendix B 和 H 的诊断清单。

H.4 符号统一任务

符号统一应优先处理跨章重复符号。当前高风险符号包括：

$$A, B, M, P, Q, S, K, L, \lambda, \rho, \pi, \mu, m.$$

二轮修订时，每个符号应检查三件事：第一次出现是否定义，同一章内是否保持一致，跨章冲突是否有局部说明。

例 H.1 (局部说明模板). 若 P 在某章表示转移矩阵，而前文曾用 $P(t, S)$ 表示看跌期权价格，则本章首次使用时应写明：“本章中 P 表示转移矩阵，与期权价格章节中的 $P(t, S)$ 不同。”这种短句能显著降低后半书阅读成本。

H.5 定理依赖图的第一版结构

全书定理可分为八组：

1. 存在性工具：Weierstrass、Berge、Brouwer、Kakutani。
2. 凸性与分离：分离定理、KKT、对偶、福利定理。
3. 概率与积分：收敛定理、条件期望、Bayes、鞅性质。
4. 函数空间：范数、线性算子、投影、Riesz 接口。
5. 动态规划：Bellman 压缩、策略改进、Euler 和 envelope。

6. 资产定价: SDF、状态价格、风险中性测度、FTAP。
7. 连续时间: ODE、最优控制、Itô、HJB、Feynman–Kac。
8. 分布与计算: KF、HJB-KF、生成元矩阵、残差和数值方法。

后续可以把 `registries/THEOREM_REGISTRY.md` 转化为真正的依赖图: 每个定理标注 `prerequisites`、`used in`、`proof status` 和 `audit status`。

H.6 全书二轮审查清单

1. 每章 source audit: 不通过的来源不得进入 bibliography。
2. 每章 pedagogical review: 检查例题是否紧跟知识点, 题解是否足够详细。
3. theorem pass: 核对定理编号、证明状态、是否重复或冲突。
4. notation pass: 核对符号冲突和首次定义。
5. exercise pass: 检查习题和解答是否一一对应。
6. computation pass: 检查计算实验是否有输入、输出和诊断指标。
7. LaTeX pass: 两轮编译, 扫描 fatal、missing character、reference、rerun 和 overfull。

H.7 附录 H 的待核验阅读路线

Appendix H 本身不引入新的理论来源。它依赖项目 registry、章节 review 和后续 source audit。若未来接入 BibLaTeX 或 BibTeX, Appendix H 应成为 source registry 与正式 bibliography 之间的桥梁。

参考文献

参考文献系统将在来源核验完成后接入 BibLaTeX 或 BibTeX。