经济增长：从中级宏观到研究生研究

自学教材与研究手册

Self-study growth project

2026 年 5 月 25 日

目录

第一部分　增长问题、事实与核算 **1**

第一章　为什么研究经济增长 **2**

1.1 本章导读 . . . 2
1.2 学习目标 . . . 2
1.3 一个百分点为什么很大 . . . 3
1.4 现代增长为什么是一个历史问题 . . . 4
1.5 增长不是简单的 GDP 变大 . . . 4
1.6 增长、周期、发展与结构转型 . . . 4
1.7 模型为什么必要 . . . 5
1.8 数据为什么也必要 . . . 5
1.9 Kaldor facts：高级增长课的第一组约束 . . . 6
1.10 本书的学习路线 . . . 6
1.11 怎样读这本书 . . . 7
1.12 全书符号约定 . . . 9
1.13 本章 Review . . . 10
1.14 核心文献 . . . 11

第二章　增长事实：跨国差异与历史长期增长 **12**

2.1 本章导读 . . . 12
2.2 学习目标 . . . 12
2.3 对数图如何读 . . . 12
2.4 现代增长出现得很晚 . . . 13
2.5 四个经济体的长期路径 . . . 14
2.6 水平、增长率与追赶速度 . . . 16
2.7 追赶不是自动的 . . . 16
2.8 增长事实对模型提出什么要求 . . . 16
2.9 中国经验的位置 . . . 17
2.10 本章 Review . . . 17
2.11 核心文献 . . . 18

第三章 增长核算与生产函数 19
3.1 本章导读 . . . 19
3.2 学习目标 . . . 19
3.3 投资率：资本积累的入口 . . . 19
3.4 从总量生产函数开始 . . . 20
3.5 增长核算公式 . . . 20
3.6 人均形式：资本深化与生产率 . . . 21
3.7 一个数值例子 . . . 21
3.8 加入人力资本 . . . 22
3.9 用 PWT 看每工人产出、资本和 TFP . . . 22
3.10 一个实际增长核算表 . . . 23
3.11 水平核算 . . . 25
3.12 中国增长的核算直觉 . . . 26
3.13 增长核算的边界 . . . 26
3.14 本章 Review . . . 27
3.15 核心文献 . . . 27

第四章 收敛、俱乐部与发展陷阱 28
4.1 本章导读 . . . 28
4.2 学习目标 . . . 28
4.3 为什么会期待收敛 . . . 29
4.4 一张跨国收敛图 . . . 29
4.5 绝对收敛 . . . 31
4.6 条件收敛 . . . 31
4.7 收敛速度：不是马上追上 . . . 32
4.8 俱乐部收敛 . . . 33
4.9 发展陷阱 . . . 34
4.10 从 beta 收敛到 sigma 收敛 . . . 35
4.11 中国与发展延伸 . . . 36
4.12 本章 Review . . . 36
4.13 核心文献 . . . 37

第二部分 数学与动态工具桥梁 38

第五章 增长模型中的数学语言 39
5.1 本章导读 . . . 39
5.2 学习目标 . . . 39

5.3 变量、参数与时间下标 . . . 40
5.4 对数与增长率 . . . 41
5.5 生产函数、齐次性与人均形式 . . . 41
5.6 边际产出、凹性与 Inada 条件 . . . 42
5.7 极限、稳态与近似 . . . 43
5.8 向量、矩阵与雅可比：为二维动态做准备 . . . 44
5.9 静态最优化：一阶条件与二阶条件 . . . 45
5.10 约束优化与拉格朗日方法 . . . 45
5.11 一个完整数值例子 . . . 46
5.12 包络定理与比较静态 . . . 47
5.13 符号翻译：从数学到经济学 . . . 48
5.14 中国与发展延伸 . . . 48
5.15 本章 Review . . . 49
5.16 核心文献 . . . 49

第六章 差分方程、微分方程与相图 50
6.1 本章导读 . . . 50
6.2 学习目标 . . . 50
6.3 为什么增长模型必须是动态的 . . . 51
6.4 离散时间：一阶差分方程 . . . 51
6.5 线性差分方程：最清楚的起点 . . . 51
6.6 非线性差分方程与局部稳定性 . . . 53
6.7 连续时间：微分方程 . . . 54
6.8 连续时间的线性化 . . . 54
6.9 相图的基本读法 . . . 55
6.10 Solow 型相图：资本积累与稳态 . . . 56
6.11 转移动态：从低资本到高资本 . . . 58
6.12 数据例子：收入差距也可以看成动态变量 . . . 58
6.13 从一维到二维：为什么 Ramsey 模型需要相图 . . . 59
6.14 二维线性化、特征值与鞍路径 . . . 60
6.15 离散与连续：什么时候用哪一种 . . . 62
6.16 中国与发展延伸：动态系统如何帮助解释转型 . . . 62
6.17 常见误区 . . . 63
6.18 英文术语表 . . . 63
6.19 本章 Review . . . 64
6.20 核心文献 . . . 65

第七章 动态优化：Hamiltonian 与 Bellman **66**
7.1 本章导读 . . . 66
7.2 学习目标 . . . 66
7.3 动态优化问题长什么样 . . . 67
7.4 一个两期例子：Euler 方程的最朴素来源 . . . 67
7.5 连续时间 Hamiltonian：把未来价值放进今天 . . . 68
7.6 从 Hamiltonian 推导 Euler 方程 . . . 69
7.7 数值例子：Euler 方程如何读 . . . 70
7.8 横截条件：为什么不能留下无用财富 . . . 71
7.9 TVC 与 no-Ponzi：Euler 方程为什么不够 . . . 71
7.10 离散时间 Bellman 方程 . . . 72
7.11 从 Bellman 方程推出 Euler 方程 . . . 73
7.12 Bellman 的数值直觉：值函数迭代 . . . 74
7.13 Hamiltonian 与 Bellman 的关系 . . . 74
7.14 中国与发展延伸：动态优化如何改变解释 . . . 75
7.15 常见误区 . . . 75
7.16 英文术语表 . . . 75
7.17 本章 Review . . . 76
7.18 核心文献 . . . 77

第八章 一般均衡与福利定理 **78**
8.1 本章导读 . . . 78
8.2 学习目标 . . . 78
8.3 为什么增长理论需要一般均衡 . . . 79
8.4 纯交换经济：最小的一般均衡环境 . . . 79
8.5 一个两人两物品例子 . . . 80
8.6 Walras' law . . . 81
8.7 Pareto 效率 . . . 82
8.8 福利第一定理 . . . 82
8.9 福利第二定理 . . . 83
8.10 Edgeworth box 直觉：支撑价格是什么 . . . 83
8.11 加入生产：企业、要素价格和零利润 . . . 84
8.12 计划者问题与竞争均衡 . . . 84
8.13 递归竞争均衡 . . . 86
8.14 扭曲、wedges 与福利定理失效 . . . 87
8.15 中国与发展延伸：资源配置作为一般均衡问题 . . . 87
8.16 常见误区 . . . 88

8.17 英文术语表 . . . 89
8.18 本章 Review . . . 90
8.19 核心文献 . . . 90

第三部分 Solow 与外生增长 91

第九章 Solow 模型：资本积累与稳态 92
9.1 本章导读 . . . 92
9.2 学习目标 . . . 92
9.3 核心问题 . . . 93
9.4 从直觉开始：资本为什么会带来追赶，也会遇到天花板 . . . 93
9.5 模型设定 . . . 94
9.5.1 生产 . . . 94
9.5.2 人口、储蓄和资本积累 . . . 94
9.6 推导人均资本动态 . . . 95
9.7 稳态：资本积累停在哪里 . . . 95
9.8 Cobb-Douglas 情形的闭式解 . . . 96
9.9 数值例子：储蓄率改变的是水平，不是永久增长率 . . . 97
9.10 黄金律资本：储蓄不是越高越好 . . . 97
9.11 稳定性与收敛速度 . . . 98
9.12 全局稳定性：为什么不是只在稳态附近成立 . . . 99
9.13 数据例子：投资率、追赶和增长放缓 . . . 100
9.14 中国与发展延伸：高投资的两面 . . . 100
9.15 常见误区 . . . 101
9.16 英文术语表 . . . 102
9.17 本章 Review . . . 102
9.18 核心文献 . . . 103

第十章 技术进步与平衡增长路径 104
10.1 本章导读 . . . 104
10.2 学习目标 . . . 104
10.3 核心问题 . . . 105
10.4 Kaldor facts：模型要尊重的长期事实 . . . 105
10.5 加入劳动增进型技术进步 . . . 105
10.6 有效劳动稳态 . . . 107
10.7 平衡增长路径上的增长率 . . . 107
10.8 资本产出比和要素份额为什么稳定 . . . 108

10.9 为什么强调 Harrod-neutral 技术进步 . . . 109
10.10 数据例子：人均收入的长期上升与追赶 . . . 110
10.11 数据例子：资本产出比与劳动份额 . . . 111
10.12 中国与发展延伸：从资本深化到技术进步 . . . 112
10.13 常见误区 . . . 113
10.14 英文术语表 . . . 113
10.15 本章 Review . . . 114
10.16 核心文献 . . . 114

第十一章 人力资本与 MRW 模型 115
11.1 本章导读 . . . 115
11.2 学习目标 . . . 115
11.3 核心问题 . . . 116
11.4 为什么标准 Solow 模型可能不够 . . . 116
11.5 模型设定 . . . 116
11.6 双资本动态方程 . . . 117
11.7 稳态推导 . . . 118
11.8 系数含义：为什么人力资本会放大积累效应 . . . 119
11.9 条件收敛：为什么要控制稳态差异 . . . 119
11.10 MRW 经验回归：应该期待哪些系数 . . . 120
11.11 数据例子：人力资本指数的变化 . . . 121
11.12 MRW 回归如何读，不能如何读 . . . 122
11.13 中国与发展延伸：教育扩张、技能结构和资本效率 . . . 122
11.14 常见误区 . . . 122
11.15 英文术语表 . . . 123
11.16 本章 Review . . . 124
11.17 核心文献 . . . 124

第十二章 Solow–MRW 框架的解释力与局限 125
12.1 本章导读 . . . 125
12.2 学习目标 . . . 125
12.3 核心问题 . . . 126
12.4 什么叫解释力：从现象到近因，再到机制 . . . 126
12.5 增长核算的基准公式 . . . 127
12.6 核算口径：这些数字从哪里来 . . . 128
12.7 层次分解：为什么资本积累不能解释永久增长 . . . 129
12.8 数据例子一：每工人产出与 TFP 的分叉 . . . 129

12.9 数据例子二：增长贡献的时期差异 . . . 131
12.10 Solow 残差为什么不是一个简单答案 . . . 132
12.11 跨国收入差异：一个简单数值分解 . . . 132
12.12 外生增长框架的四个边界 . . . 133
12.13 中国与发展延伸：从资本深化到生产率问题 . . . 133
12.14 常见误区 . . . 134
12.15 英文术语表 . . . 134
12.16 本章 Review . . . 135
12.17 核心文献 . . . 136

第四部分 Ramsey、OLG 与动态一般均衡 137

第十三章 Ramsey–Cass–Koopmans 模型 138
13.1 本章导读 . . . 138
13.2 学习目标 . . . 138
13.3 核心问题 . . . 139
13.4 从 Solow 到 Ramsey：一个变量变成两个变量 . . . 139
13.5 最简单版本：没有人口增长和技术进步 . . . 140
13.6 Hamiltonian 推导：Euler 方程从哪里来 . . . 140
13.7 横截条件：为什么不能只看一阶条件 . . . 141
13.8 引入人口增长和技术进步 . . . 141
13.9 分散竞争均衡：家庭、企业和市场清算 . . . 142
13.10 稳态：Ramsey 资本水平由什么决定 . . . 143
13.11 黄金律资本与 Ramsey 稳态资本 . . . 144
13.12 相图：两条零增长曲线 . . . 144
13.13 为什么叫鞍路径稳定 . . . 145
13.14 线性化：为什么只有一条稳定路径 . . . 145
13.15 一个校准例子：偏好如何改变稳态 . . . 146
13.16 数据例子：资本产出比与隐含资本回报 . . . 147
13.17 中国与发展延伸：高储蓄是谜题还是选择 . . . 148
13.18 常见误区 . . . 148
13.19 英文术语表 . . . 149
13.20 本章 Review . . . 149
13.21 核心文献 . . . 150

第十四章 社会计划者、竞争均衡与福利 151
14.1 本章导读 . . . 151

14.2 学习目标 . . . 151
14.3 核心问题 . . . 152
14.4 先固定一个简单环境 . . . 152
14.5 社会计划者问题 . . . 152
14.6 分散竞争均衡 . . . 153
14.7 计划者解与竞争均衡等价 . . . 154
14.8 一阶条件对照表 . . . 155
14.9 动态楔子：福利定理怎样失效 . . . 155
14.10 一个动态扭曲的数值例子 . . . 158
14.11 福利比较：为什么不能只看产出 . . . 158
14.12 政策楔子一：资本税 . . . 159
14.13 一个政策校准表 . . . 159
14.14 转移路径例子：稳态更高也可能福利更低 . . . 160
14.15 政策楔子二：外部性和公共资本 . . . 160
14.16 中国与发展延伸：高投资、资本效率与福利 . . . 161
14.17 常见误区 . . . 161
14.18 英文术语表 . . . 162
14.19 本章 Review . . . 162
14.20 核心文献 . . . 163

第十五章 世代交叠模型 OLG 164

15.1 本章导读 . . . 164
15.2 学习目标 . . . 164
15.3 核心问题 . . . 165
15.4 模型环境：两期生命 . . . 165
15.5 年轻人的问题 . . . 166
15.6 资本市场清算与资本动态 . . . 167
15.7 稳态资本 . . . 167
15.8 相图：离散时间资本映射 . . . 168
15.9 动态无效率 . . . 168
15.10 动态无效率的 Pareto 改善构造 . . . 169
15.11 PAYG 养老金 . . . 170
15.12 参数例子：耐心、人口增长与资本积累 . . . 171
15.13 数据例子：老年抚养比 . . . 171
15.14 中国与发展延伸：老龄化、储蓄和养老金 . . . 172
15.15 常见误区 . . . 172
15.16 英文术语表 . . . 173

15.17 本章 Review . . . 173
15.18 核心文献 . . . 174

第十六章 异质性、约束与动态宏观扩展 175
16.1 本章导读 . . . 175
16.2 学习目标 . . . 176
16.3 核心问题 . . . 176
16.4 为什么代表性家庭不够 . . . 176
16.5 两期借贷约束：从 Euler 等式到 Euler 不等式 . . . 177
16.6 一个数字例子：同样收入，不同约束 . . . 178
16.7 约束楔子：把市场不完全写成可测对象 . . . 179
16.8 从两期模型到无限期不完全市场 . . . 179
16.9 自然借贷限与制度性借贷限 . . . 180
16.10 预防性储蓄：风险会让人多储蓄吗 . . . 181
16.11 Aiyagari 型均衡：价格、政策函数和分布 . . . 181
16.12 分布转移算子：稳态分布到底是什么意思 . . . 182
16.13 数值求解步骤：Aiyagari 模型怎样被算出来 . . . 183
16.14 一个简化数值表：分布如何改变总储蓄 . . . 183
16.15 图形直觉：借贷约束造成的折点 . . . 184
16.16 融资约束与职业选择：财富分布影响增长 . . . 184
16.17 金融深化数据：总量信贷不等于约束消失 . . . 185
16.18 中国与发展延伸 . . . 186
16.19 和前几章的关系 . . . 187
16.20 常见误区 . . . 187
16.21 英文术语表 . . . 187
16.22 本章 Review . . . 188
16.23 核心文献 . . . 189

第五部分 内生增长 190

第十七章 AK 模型与资本广义化 191
17.1 本章导读 . . . 191
17.2 学习目标 . . . 191
17.3 核心问题 . . . 192
17.4 从 Solow 到 AK：递减报酬在哪里消失 . . . 192
17.5 一个数值表：储蓄率为什么改变增长率 . . . 193
17.6 Ramsey 版本的 AK 模型 . . . 194

17.7 广义资本：AK 的经济含义 . . . 196
17.8 资本外部性：私人递减，社会不递减 . . . 196
17.9 社会回报与私人回报 . . . 197
17.10 AK 的边界：线性回报是刀锋条件 . . . 197
17.11 非凸性、基础设施与门槛效应 . . . 198
17.12 政策含义的边界 . . . 199
17.13 数据例子：投资率与 AK 的启发 . . . 200
17.14 中国与发展延伸：高投资之后的问题 . . . 201
17.15 常见误区 . . . 202
17.16 英文术语表 . . . 202
17.17 本章 Review . . . 203
17.18 核心文献 . . . 204

第十八章 外部性、人力资本与学习 205
18.1 本章导读 . . . 205
18.2 学习目标 . . . 205
18.3 核心问题 . . . 206
18.4 从 AK 到外部性：一个桥梁模型 . . . 206
18.5 Arrow 的 learning-by-doing . . . 207
18.5.1 一个数值例子 . . . 208
18.6 私人回报、社会回报与政策楔子 . . . 208
18.7 Lucas 人力资本模型 . . . 209
18.7.1 教育时间的数值例子 . . . 209
18.7.2 时间选择的一阶条件 . . . 210
18.8 人力资本外部性：为什么市场可能投资不足 . . . 211
18.9 数据例子：高等教育扩张 . . . 212
18.10 中国与发展延伸 . . . 212
18.11 常见误区 . . . 213
18.12 英文术语表 . . . 213
18.13 本章 Review . . . 214
18.14 核心文献 . . . 214

第十九章 Romer 模型：品种扩张与知识生产 216
19.1 本章导读 . . . 216
19.2 学习目标 . . . 217
19.3 核心问题 . . . 217
19.4 知识为什么不是普通资本 . . . 217

19.5 最终品部门：品种为什么提高产出 . . . 218
19.5.1 一个品种扩张的数值例子 . . . 218
19.6 中间品企业：为什么需要垄断竞争 . . . 219
19.7 知识生产部门 . . . 220
19.8 研发无套利条件 . . . 221
19.9 完整均衡闭合：工资、利率与研发劳动份额 . . . 221
19.10 平衡增长与资源配置 . . . 223
19.11 非竞争性、递增回报与市场结构 . . . 223
19.12 数据：研发强度和研究人员规模 . . . 224
19.13 中国与发展延伸 . . . 225
19.14 常见误区 . . . 226
19.15 英文术语表 . . . 227
19.16 本章 Review . . . 228
19.17 核心文献 . . . 228

第二十章 半内生增长与规模效应争论 229
20.1 本章导读 . . . 229
20.2 学习目标 . . . 229
20.3 核心问题 . . . 230
20.4 Romer 模型的强规模效应 . . . 230
20.5 想法为什么会越来越难找 . . . 231
20.6 半内生增长模型 . . . 232
20.7 研发份额影响什么：水平效应与增长效应 . . . 233
20.8 数据：研发扩张、人口放缓与增长率 . . . 233
20.8.1 数据读法：从研发规模到研究生产率 . . . 235
20.9 一个转型动态例子 . . . 236
20.10 中国与发展延伸 . . . 237
20.11 常见误区 . . . 238
20.12 英文术语表 . . . 238
20.13 本章 Review . . . 239
20.14 核心文献 . . . 240

第六部分 创新、创造性破坏与技术进步 241

第二十一章 Schumpeterian 增长与质量阶梯 242
21.1 本章导读 . . . 242
21.2 学习目标 . . . 242

21.3 核心问题 . . . 243
21.4 从品种扩张到质量阶梯 . . . 243
21.5 质量阶梯增长率 . . . 244
21.6 一个数值例子：频率和步长都重要 . . . 244
21.7 垄断利润与创造性破坏 . . . 245
21.8 研发套利条件 . . . 245
21.9 创造性破坏的经济解释 . . . 247
21.10 私人创新与社会最优 . . . 247
21.11 数据例子：专利数量不是创新质量 . . . 248
21.12 中国与发展延伸：从模仿追赶到创造性破坏 . . . 249
21.13 常见误区 . . . 249
21.14 英文术语表 . . . 250
21.15 本章 Review . . . 251
21.16 核心文献 . . . 251

第二十二章 竞争、专利与创新政策 252

22.1 本章导读 . . . 252
22.2 学习目标 . . . 252
22.3 核心问题 . . . 253
22.4 竞争影响创新的两种效应 . . . 253
22.5 step-by-step innovation 的二状态直觉 . . . 253
22.6 一个倒 U 型创新模型 . . . 254
22.7 数值例子：为什么中等竞争最强 . . . 256
22.8 专利保护：动态激励与静态扭曲 . . . 256
22.9 专利竞赛与重复研发 . . . 257
22.10 数据例子：高技术出口不是创新本身，但能提示产业升级 . . . 257
22.11 中国与发展延伸：竞争政策和产业政策如何同时成立 . . . 259
22.12 常见误区 . . . 259
22.13 英文术语表 . . . 260
22.14 本章 Review . . . 261
22.15 核心文献 . . . 261

第二十三章 技术扩散、采用与跨国追赶 262

23.1 本章导读 . . . 262
23.2 学习目标 . . . 262
23.3 核心问题 . . . 263
23.4 三个概念：创新、扩散与采用 . . . 263

23.5 距离前沿 . . . 263
23.6 Nelson-Phelps 型吸收能力模型 . . . 264
23.7 采用成本：为什么技术存在但没有被用起来 . . . 265
23.8 机制总表：从机会到真实生产率 . . . 265
23.9 数值例子：距离前沿不等于追赶速度 . . . 267
23.10 数据一：相对美国人均 GDP 的距离 . . . 267
23.11 数据二：互联网作为技术采用代理 . . . 268
23.12 中国与发展延伸：引进、吸收、国产替代与前沿追赶 . . . 269
23.13 常见误区 . . . 270
23.14 英文术语表 . . . 270
23.15 本章 Review . . . 271
23.16 核心文献 . . . 271

第二十四章 通用技术、AI 与长期增长 273
24.1 本章导读 . . . 273
24.2 学习目标 . . . 274
24.3 核心问题 . . . 274
24.4 什么是通用技术 . . . 274
24.5 一个 GPT 互补资本模型 . . . 275
24.6 数值例子：为什么先进技术可能先拖慢统计生产率 . . . 276
24.7 AI 是 GPT，还是普通自动化 . . . 277
24.8 任务模型：自动化为什么不只是提高 A . . . 277
24.9 新任务如何抵消替代效应 . . . 278
24.10 数值例子：自动化、新任务和劳动份额 . . . 279
24.11 数据一：AI 私人投资的集中度 . . . 280
24.12 数据二：ICT 服务出口与数字能力 . . . 280
24.13 中国与发展延伸：AI 增长不是只比大模型 . . . 281
24.14 常见误区 . . . 282
24.15 英文术语表 . . . 282
24.16 本章 Review . . . 283
24.17 核心文献 . . . 284

第六部分 Review：创新、扩散与通用技术 285
一张机制地图 . . . 285
学习逻辑是否连贯 . . . 286
中国与发展经济学的统一读法 . . . 286
本部分 Review . . . 286

第七部分　中国增长、发展与结构转型 **288**

第二十五章　中国增长事实与增长核算 **289**

25.1 学习目标 . . . 289
25.2 核心问题 . . . 290
25.3 中国增长事实的三层读法 . . . 290
25.4 资本深化：高投资为什么重要，为什么又不够 . . . 292
25.5 结构转型：劳动从哪里来到哪里去 . . . 293
25.6 人力资本：教育扩张为什么改变资本回报 . . . 294
25.7 增长核算：把中国增长拆成近因 . . . 294
25.8 一个数值例子：高投资如何与资本回报压力并存 . . . 295
25.9 TFP residual：信号、黑箱与研究入口 . . . 296
25.10 中国增长的阶段性解释 . . . 297
25.11 中国与发展延伸：这一章对一般发展经济学的意义 . . . 297
25.12 常见误区 . . . 298
25.13 英文术语表 . . . 298
25.14 本章 Review . . . 299
25.15 核心文献 . . . 300

第二十六章　结构转型、工业化与城市化 **301**

26.1 学习目标 . . . 301
26.2 核心问题 . . . 302
26.3 中国结构转型事实 . . . 302
26.4 相对劳动生产率：为什么就业份额比增加值份额更有信息 . . . 303
26.5 结构转型核算 . . . 304
26.6 一个数值例子：再配置收益有多大 . . . 305
26.7 Lewis 二元经济模型 . . . 305
26.8 中国经验中的 Lewis 转折 . . . 307
26.9 城市化：城市为什么能提高生产率 . . . 307
26.10 工业化与服务业化 . . . 308
26.11 中国与发展延伸：结构转型的政策含义 . . . 309
26.12 常见误区 . . . 309
26.13 英文术语表 . . . 309
26.14 本章 Review . . . 310
26.15 核心文献 . . . 311

第二十七章 资源错配、企业动态与生产率 **312**
27.1 学习目标 . . . 312
27.2 核心问题 . . . 313
27.3 从边际产出均等开始 . . . 313
27.4 楔子：扭曲如何进入企业一阶条件 . . . 314
27.5 TFPQ 与 TFPR . . . 315
27.6 一个可计算的错配例子 . . . 316
27.7 数据入口：没有企业微观数据时怎样读错配 . . . 317
27.8 企业动态：进入、退出与选择 . . . 318
27.9 中国经验：错配从哪里来 . . . 319
27.10 错配、产业政策与竞争 . . . 320
27.11 与增长核算的连接 . . . 320
27.12 中国与发展延伸：怎样读企业生产率事实 . . . 321
27.13 常见误区 . . . 321
27.14 英文术语表 . . . 321
27.15 本章 Review . . . 322
27.16 核心文献 . . . 323

第二十八章 制度、市场化与地方政府 **324**
28.1 学习目标 . . . 324
28.2 核心问题 . . . 325
28.3 产权、剩余索取权与投资 . . . 325
28.4 制度不只是产权：市场化与楔子 . . . 326
28.5 中国经验中的制度变化 . . . 327
28.6 地方政府：增长推动者与扭曲来源 . . . 328
28.7 数据事实：制度指标该怎么读 . . . 329
28.8 制度、创新与中等收入转型 . . . 331
28.9 中国与发展延伸 . . . 331
28.10 常见误区 . . . 332
28.11 英文术语表 . . . 332
28.12 本章 Review . . . 333
28.13 核心文献 . . . 334

第七部分 Review：中国增长、结构转型、错配与制度 **335**

第八部分　研究前沿与论文训练 **339**

第二十九章　增长实证：数据、识别与因果 **340**

29.1 学习目标 . . . 340
29.2 核心问题 . . . 341
29.3 先从数据读起 . . . 341
29.4 为什么相关不等于因果 . . . 341
29.5 三类增长数据结构 . . . 343
29.6 面板固定效应：控制不变差异 . . . 344
29.7 工具变量：寻找外生变化 . . . 344
29.8 双重差分与事件研究 . . . 345
29.9 增长研究中的识别设计地图 . . . 345
29.10 标准误、聚类与增长数据的相关性 . . . 345
29.11 把第七部分转成实证问题 . . . 346
29.12 一份增长实证的审稿式检查表 . . . 346
29.13 常见误区 . . . 347
29.14 英文术语表 . . . 348
29.15 本章 Review . . . 348
29.16 核心文献 . . . 349

第三十章　论文复制：从表格到研究理解 **350**

30.1 学习目标 . . . 350
30.2 核心问题 . . . 351
30.3 复制的三层含义 . . . 351
30.4 选择复制对象 . . . 352
30.5 从论文到复制计划 . . . 353
30.6 Replication package 的常见结构 . . . 353
30.7 从目标数字到容许误差 . . . 354
30.8 一个复制失败的诊断例子 . . . 354
30.9 复制误差的一个分解 . . . 357
30.10 代码阅读：从主运行文件开始 . . . 358
30.11 把复制和识别连起来 . . . 358
30.12 增长论文复制的三个典型训练项目 . . . 359
30.13 Replication note 应该怎么写 . . . 360
30.14 复制中的数据伦理和可复现性 . . . 360
30.15 中国与发展研究中的复制问题 . . . 361
30.16 常见误区 . . . 362

30.17 英文术语表 . . . 362
30.18 本章 Review . . . 363
30.19 核心文献 . . . 363

第三十一章 文献综述与研究选题 364
31.1 学习目标 . . . 364
31.2 核心问题 . . . 365
31.3 研究型文献综述不是论文清单 . . . 365
31.4 五维文献矩阵 . . . 366
31.5 一个例子：AI、自动化与长期增长 . . . 367
31.6 从兴趣到研究问题 . . . 367
31.7 什么是真实的 research gap . . . 369
31.8 选题的可行性约束 . . . 370
31.9 怎样读单篇论文 . . . 370
31.10 怎样写综述段落 . . . 371
31.11 文献地图中的争议 . . . 372
31.12 中国增长研究的选题入口 . . . 372
31.13 从文献综述到 mini proposal . . . 372
31.14 常见误区 . . . 373
31.15 英文术语表 . . . 374
31.16 本章 Review . . . 375
31.17 核心文献 . . . 375

第三十二章 Mini Paper：从问题到研究设计 376
32.1 学习目标 . . . 376
32.2 核心问题 . . . 377
32.3 Mini paper 与普通课程论文的区别 . . . 377
32.4 论文蓝图的基本结构 . . . 377
32.5 一个贯穿示例：城市化与服务业生产率 . . . 378
32.6 机制模型：从规模经济到生产率 . . . 379
32.7 从模型到变量表 . . . 380
32.8 一张教学用 miniature 数据表 . . . 380
32.9 基准估计式 . . . 381
32.10 识别设计的三个层级 . . . 382
32.11 预期表格与图形 . . . 382
32.12 Pre-analysis plan 的简化版本 . . . 382
32.13 引言应该怎样写 . . . 384

32.14 贡献应该怎样写 . . . 384
32.15 风险清单 . . . 385
32.16 模拟答辩：审稿人会问什么 . . . 385
32.17 从 mini paper 到真正论文 . . . 386
32.18 常见误区 . . . 386
32.19 英文术语表 . . . 386
32.20 本章 Review . . . 387
32.21 通向 PhD+ 专题：为什么还要读第 33–35 章 . . . 388
32.22 核心文献 . . . 388

第九部分 PhD+ 高级专题扩展 389

第三十三章 技术方向、不平等与任务模型 390
33.1 学习目标 . . . 390
33.2 核心问题 . . . 391
33.3 为什么中性技术进步不够 . . . 391
33.4 一个高技能–低技能模型 . . . 392
33.5 一张数据事实表：教育扩张与技能溢价 . . . 393
33.6 Directed technical change：技术为什么偏向某些要素 . . . 393
33.7 资本–技能互补 . . . 394
33.8 任务模型：从“技能”走向“工作内容” . . . 395
33.9 教学数值例子：自动化、新任务与劳动任务份额 . . . 396
33.10 经济解释：增长率、工资差距和劳动份额 . . . 396
33.11 中国与发展延伸 . . . 397
33.12 政策含义 . . . 397
33.13 常见误区 . . . 398
33.14 英文术语表 . . . 398
33.15 本章 Review . . . 399
33.16 核心文献 . . . 399

第三十四章 开放经济增长、贸易与全球技术扩散 400
34.1 学习目标 . . . 400
34.2 核心问题 . . . 401
34.3 静态贸易收益：为什么开放能提高实际收入 . . . 401
34.4 数值例子：品种扩张的幅度 . . . 402
34.5 开放经济中的技术追赶 . . . 402
34.6 贸易、市场规模与内生创新 . . . 403

34.7 Eaton–Kortum 直觉：技术差异与贸易成本 . . . 403
34.8 数据事实：贸易开放度的差异 . . . 404
34.9 经验识别：贸易真的导致增长吗 . . . 405
34.10 贸易与企业再配置 . . . 407
34.11 开放的风险：不是所有贸易都产生学习 . . . 407
34.12 中国与发展延伸 . . . 408
34.13 常见误区 . . . 408
34.14 英文术语表 . . . 409
34.15 本章 Review . . . 410
34.16 核心文献 . . . 410

第三十五章 金融发展、信贷约束与长期增长 411
35.1 学习目标 . . . 411
35.2 核心问题 . . . 412
35.3 金融系统的五个增长功能 . . . 412
35.4 抵押约束模型：净资产为什么重要 . . . 412
35.5 数值例子：同样生产率，不同净资产 . . . 414
35.6 从个体约束到总量错配 . . . 414
35.7 外部融资依赖与行业增长 . . . 415
35.8 金融发展不等于信贷越多越好 . . . 415
35.9 数据事实：私人部门信贷与增长含义 . . . 416
35.10 金融抑制与高储蓄高投资 . . . 416
35.11 金融加速器与增长风险 . . . 417
35.12 中国与发展延伸 . . . 417
35.13 政策含义 . . . 418
35.14 PhD+ 专题的共同结构 . . . 418
35.15 常见误区 . . . 419
35.16 英文术语表 . . . 419
35.17 本章 Review . . . 420
35.18 核心文献 . . . 420

第十部分 高级附录 421

附录 A 随机增长与递归数值方法 422
A.1 学习目标 . . . 422
A.2 从确定性增长到随机增长 . . . 423
A.3 一个最小随机增长模型 . . . 424

A.4 Euler 方程：随机回报下的跨期权衡 . . . 424
A.5 存在性与收敛：为什么值函数迭代可以用 . . . 425
A.6 值函数迭代：从模型到算法 . . . 426
A.7 一个可直接放进教材的数值例子 . . . 427
A.8 生产率离散化：Tauchen 方法的直觉 . . . 428
A.9 策略函数的经济解释 . . . 429
A.10 欧拉方程误差 . . . 429
A.11 模拟：从策略函数到增长事实 . . . 430
A.12 校准、估计与识别 . . . 431
A.13 与中国和发展经济的连接 . . . 431
A.14 常见错误 . . . 432
A.15 英文术语表 . . . 432
A.16 本附录 Review . . . 433
A.17 核心文献 . . . 434

附录 B 连续时间增长、Hamiltonian 与 HJB 工具箱 435
B.1 学习目标 . . . 435
B.2 连续时间问题的标准形 . . . 436
B.3 现值 Hamiltonian . . . 436
B.4 当前值 Hamiltonian . . . 437
B.5 Euler 方程的完整推导 . . . 438
B.6 横截条件：无泡沫、无浪费与最优性 . . . 439
B.7 相图与鞍路径 . . . 439
B.8 线性化：为什么是 saddle path . . . 440
B.9 数值例子：稳态和收敛速度 . . . 441
B.10 从 Hamiltonian 到 HJB . . . 442
B.11 多状态变量：知识、污染与债务 . . . 443
B.12 连续时间、离散时间与数值实现 . . . 444
B.13 中国与发展延伸 . . . 444
B.14 常见错误 . . . 445
B.15 英文术语表 . . . 445
B.16 本附录 Review . . . 446
B.17 核心文献 . . . 446

附录 C 异质性主体、不完全市场与分布动态 448
C.1 学习目标 . . . 448
C.2 从代表性家庭到分布状态 . . . 449

C.3 家庭递归问题 . . . 449
C.4 借贷下限：自然限制与制度限制 . . . 450
C.5 Euler 不等式与约束乘子 . . . 451
C.6 预防性储蓄与边际效用风险 . . . 452
C.7 企业与价格 . . . 452
C.8 分布转移算子 . . . 452
C.9 递归稳态竞争均衡 . . . 453
C.10 均衡利率：资产供给曲线与资本需求曲线 . . . 453
C.11 一个数值例子：风险、约束和资本供给 . . . 454
C.12 过度储蓄与配置低效可以并存 . . . 454
C.13 职业选择和创业门槛 . . . 455
C.14 算法：Aiyagari 模型如何求解 . . . 455
C.15 误差诊断 . . . 456
C.16 加入总量冲击：从 Aiyagari 到 Krusell–Smith . . . 457
C.17 中国与发展延伸 . . . 457
C.18 政策含义 . . . 458
C.19 常见错误 . . . 458
C.20 英文术语表 . . . 458
C.21 本附录 Review . . . 459
C.22 核心文献 . . . 460

附录 D 连续时间随机过程、Ito 引理与随机 HJB 461
D.1 学习目标 . . . 461
D.2 为什么增长模型需要连续时间随机过程 . . . 462
D.3 Brownian motion：连续小冲击的极限 . . . 462
D.4 Ito 引理：随机链式法则 . . . 464
D.4.1 例子：对数生产率 . . . 464
D.5 生成元：连续时间动态规划的发动机 . . . 465
D.6 随机 HJB：带扩散风险的最优增长 . . . 466
D.7 随机 Euler 方程与风险调整 . . . 466
D.8 Poisson 过程：创新、危机与离散跳跃 . . . 467
D.8.1 创新强度选择 . . . 468
D.9 Kolmogorov forward equation：分布如何流动 . . . 469
D.10 连续时间异质性主体模型的骨架 . . . 470
D.11 HJB–KFE 系统的经济读法 . . . 471
D.12 一个简化的稳态密度例子 . . . 472
D.13 边界条件：借贷约束不是脚注 . . . 473

D.14 随机增长、长期风险与福利 . . . 473
D.15 中国与发展延伸：不确定性、储蓄与创新 . . . 474
D.15.1 收入风险与高储蓄 . . . 474
D.15.2 金融摩擦与企业创新 . . . 474
D.15.3 宏观波动与长期增长质量 . . . 474
D.16 数值实现的最小路线图 . . . 475
D.17 常见错误 . . . 476
D.18 英文术语表 . . . 476
D.19 本附录 Review . . . 477
D.20 核心文献 . . . 478

附录 E 增长数据、图表与核算方法手册 479
E.1 学习目标 . . . 479
E.2 数据不是装饰，而是模型的约束 . . . 480
E.3 三个核心数据源 . . . 480
E.4 GDP 口径：同一个词，很多含义 . . . 481
E.5 本书常用 WDI 变量字典 . . . 482
E.6 PWT 变量：增长核算的主力 . . . 483
E.7 Maddison：超长期历史的入口 . . . 484
E.8 增长率：为什么本书偏好对数增长 . . . 485
E.9 指数化图表：把不同国家放到同一起点 . . . 485
E.10 收敛图：事实入口，不是因果证明 . . . 486
E.11 增长核算公式 . . . 486
E.12 本项目现有数据资产索引 . . . 487
E.13 图表注释模板 . . . 489
E.14 中国数据：更要检查口径 . . . 489
E.15 从数据到图表：一条可复现流水线 . . . 490
E.16 如何处理缺失值 . . . 490
E.17 数据版本与下载日期 . . . 491
E.18 增长数据的解释边界 . . . 491
E.19 附录 E 的最小复现规范 . . . 492
E.20 英文术语表 . . . 492
E.21 本附录 Review . . . 493
E.22 核心文献与数据入口 . . . 493

附录 F 增长模型数值实现与误差诊断 495
F.1 学习目标 . . . 495

F.2 从经济模型到数值问题 . . . 496
F.3 网格：状态空间不是随便切 . . . 496
F.4 值函数迭代：最稳健的基准算法 . . . 497
F.5 Policy iteration 与 Howard improvement . . . 498
F.6 Endogenous grid method：从 Euler 方程反推网格 . . . 498
F.7 Shooting method：求转移路径和鞍路径 . . . 500
F.8 Collocation 与 projection：用基函数逼近未知函数 . . . 500
F.9 Finite difference：连续时间 HJB 的工作马 . . . 501
F.10 KFE 离散化与分布求解 . . . 502
F.11 外层均衡：价格不是参数 . . . 502
F.12 误差诊断：程序跑完不等于模型解好 . . . 503
F.13 Euler error 的消费等价解释 . . . 504
F.14 模拟设计：ADEMP 在增长模型中的版本 . . . 505
F.15 数值稳定性：浮点数也会改变结论 . . . 505
F.16 可复现结构：一篇论文的数值附录应写什么 . . . 506
F.17 常见错误 . . . 506
F.18 英文术语表 . . . 507
F.19 本附录 Review . . . 508
F.20 核心文献 . . . 508

第一部分

增长问题、事实与核算

第一章　为什么研究经济增长

1.1　本章导读

经济增长研究的是一个看似简单、其实极深的问题：为什么有些经济体在几十年甚至几百年的时间里持续变得富裕，而另一些经济体长期停留在低收入或中等收入状态？

如果你已经学过中级宏观经济学，可能熟悉消费、储蓄、投资、资本、劳动、技术冲击、总需求和商业周期。但增长理论的时间尺度不同。商业周期问的是：为什么产出在几年内偏离趋势？增长理论问的是：这个趋势本身为什么会向上移动？短期波动会影响失业、通胀和政策选择；长期增长则决定一代人和下一代人的生活边界。

本书的入口是中级宏观，但出口不是本科复习。我们的目标是逐步走到研究生和博士增长课程的核心：动态系统、一般均衡、最优储蓄、内生技术进步、创新、结构转型、资源错配、增长实证和中国发展经验。为了让这条路可读，本书不会一开始就把你扔进 Hamiltonian 或 Bellman 方程，而是先从事实、例子和模型直觉出发，再把数学推导一点点接上。

本章回答三个问题。第一，为什么增长率差一点点，长期结果会差很多？第二，为什么增长问题不能只看 GDP，而要看人均收入、生产率、结构转型和福利？第三，为什么一门增长课最后会通向技术进步、制度、创新和中国发展这些看似更复杂的问题？

1.2　学习目标

学完本章，你应该能够做到：

1. 解释经济增长为什么是福利差异的核心来源。
2. 区分增长、发展、商业周期和结构转型。
3. 用复利逻辑说明长期增长率的重要性。
4. 理解为什么增长理论需要同时使用模型、数据和历史经验。
5. 明白本书的学习顺序：主线 32 章先完成从增长事实到研究训练的路径，第 33–35 章进入 PhD+ 专题，附录 A–F 补上高级工具、数据和数值方法。

1.3 一个百分点为什么很大

增长经济学最反直觉的地方，是小差异在长期会变成大差异。假设两个经济体初始人均收入都是 10,000 元。经济体 A 每年增长 2%，经济体 B 每年增长 4%。一年以后差距很小：

$$10000(1.02) = 10200, \tag{1.1}$$

$$10000(1.04) = 10400. \tag{1.2}$$

只差 200 元，看起来不值得写一本书。

但 40 年以后：

$$10000(1.02)^{40} \approx 22080, \tag{1.3}$$

$$10000(1.04)^{40} \approx 48010. \tag{1.4}$$

经济体 B 的人均收入已经是 A 的 2 倍多。80 年以后：

$$10000(1.02)^{80} \approx 48750, \tag{1.5}$$

$$10000(1.04)^{80} \approx 230500. \tag{1.6}$$

这时 B 已经接近 A 的 5 倍。

这不是数学游戏。它说明长期增长率不是宏观表格里的一个小数点，而是教育、医疗、住房、基础设施、技术能力、财政空间和社会保障能力的长期来源。增长理论之所以重要，是因为它解释的不是某个季度的好坏，而是社会可行集合如何扩张。

表 1.1: 不同年均增长率下的人均收入路径：初始收入为 10,000

年均增长率	10 年后	20 年后	40 年后	80 年后
1%	11,046	12,202	14,889	22,167
2%	12,190	14,859	22,080	48,754
4%	14,802	21,911	48,010	230,500
7%	19,672	38,697	149,745	2,242,340

表 1.1 也告诉我们，为什么增长经济学总是关心几十年尺度。7% 的增长率一年看起来只是“高 7%”，但如果维持 40 年，收入会接近原来的 15 倍。改革开放以来中国增长经验的震撼性，正来自这种长期复利。它不是某一年高增长，而是连续多年较高增长率叠加形成的历史变化。

1.4 现代增长为什么是一个历史问题

如果增长只是“多投资一点、多生产一点”，它就不会成为现代经济学里这么核心的问题。真正需要解释的是：为什么人类社会在很长历史里人均收入几乎停滞，而工业革命之后一些经济体突然进入持续增长状态？在现代增长出现以前，技术进步常常被人口增长吸收；一个社会即使农业技术变好，长期结果也可能表现为人口更多，而不是每个人显著更富。这种直觉后来会在 Malthusian 模型和统一增长理论中系统出现。

因此，增长经济学不是只研究“增长率怎么提高”。它还研究从停滞到增长的制度、技术和结构条件：为什么英国、美国和西欧较早进入现代增长？为什么东亚经济体在 20 世纪后半期实现追赶？为什么许多经济体没有自动复制这种路径？这些问题让增长理论天然连接历史、政治经济学、发展经济学和技术变迁。

这也解释了本书的学习顺序。前几章先把事实讲清楚，是因为模型不能在真空里产生。Solow 模型会解释资本积累和技术进步如何塑造稳态；Ramsey 模型会解释储蓄如何由跨期选择决定；Romer 和 Schumpeterian 模型会解释知识、研发和创造性破坏；中国增长章节则会把这些机制放进一个真实的大型转型经济中检验。换句话说，本书不是从低级模型走到高级模型，而是从一个历史事实群出发，逐步建立能够解释这些事实的工具。

1.5 增长不是简单的 GDP 变大

总 GDP 增长并不自动等于生活水平提高。一个国家总产出变大，可能是因为人口变多，也可能是因为每个人平均生产更多。增长理论通常更关心人均变量：

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t}, \tag{1.7}$$

其中 Y_t 是总产出，L_t 是人口或劳动投入，y_t 是人均产出或人均收入的近似指标。

但即使人均收入提高，也还没有穷尽“发展”的含义。发展还包括寿命、教育、健康、城市化、产业结构、制度能力、环境质量和机会分配。增长理论不等于发展经济学，但它是发展经济学的核心支架之一。没有持续增长，许多福利改善缺乏资源基础；但只有增长，也不能保证福利自动均等地扩散。

这就是本书处理中国经验时要保持的态度。中国增长不是单纯的 GDP 故事，也不是单纯的制度叙事。它同时包含资本深化、劳动力转移、教育扩张、技术引进、出口和全球价值链、地方政府激励、基础设施、城市化、产业升级、资源错配和环境约束。一个合格的增长框架必须能把这些机制放在同一张地图上。

1.6 增长、周期、发展与结构转型

为了避免概念混乱，先区分四个相关但不同的对象。

经济增长关注长期趋势。典型问题是：为什么人均产出长期上升？为什么国家之间收入差距巨大？为什么有些经济体能追赶前沿，有些不能？

商业周期关注短期波动。典型问题是：为什么经济会衰退？为什么失业上升？货币政策和财政政策如何稳定需求？周期理论里的冲击可能很重要，但它不是本书主线。

经济发展关注更宽的福利和结构变化。典型问题是：贫困如何减少？教育和健康如何改善？制度、市场、国家能力如何形成？增长是发展的重要部分，但发展不只等于增长。

结构转型关注部门和空间重组。典型问题是：劳动力为什么从农业转向工业和服务业？城市化如何提高生产率？产业升级如何发生？中国经验里，结构转型不是增长的背景，而是增长本身的重要机制。

这四个对象会在本书中不断交叉。比如，Solow 模型主要是增长模型；Ramsey 模型把增长和跨期最优选择连接起来；结构转型章节把增长和发展连接起来；增长实证章节则帮助我们区分相关性和因果机制。

1.7 模型为什么必要

真实世界太复杂。如果直接把资本、教育、贸易、制度、企业、政府、城市、技术、文化和历史全部放进一个叙述，结果很容易变成“什么都重要”。这句话可能是真的，但无法帮助我们判断机制、比较大小和推导含义。

模型的作用不是替代现实，而是把某个机制从现实中抽出来，让我们看清它的逻辑。Solow 模型问：如果储蓄转化为资本，而资本边际产出递减，会发生什么？Ramsey 模型问：如果家庭可以在今天消费和明天资本之间选择，最优储蓄路径是什么？Romer 模型问：如果知识具有非竞争性，研发部门如何支持长期增长？Schumpeterian 模型问：如果新技术会替代旧技术，创新激励和市场结构如何影响增长？

模型越高级，越需要清楚它舍弃了什么。一个只有代表性企业的模型，不能直接解释企业异质性；一个外生技术进步模型，不能解释技术进步从哪里来；一个封闭经济模型，不能解释全球价值链。研究生训练的重要部分，就是既能推导模型，也能知道模型的边界。

1.8 数据为什么也必要

如果只有模型，没有数据，我们不知道模型解释的是不是重要事实。增长理论面对的事实包括：

- 现代经济增长在人类历史中出现得很晚。
- 不同国家人均收入水平差异巨大。

- 一些经济体出现过高速追赶，另一些经济体长期停滞。
- 高收入经济体通常仍有稳定的人均增长。
- 资本产出比、劳动收入份额和长期增长率在某些时期表现出相对稳定性，这常被称为 Kaldor facts。
- 后发经济体的增长往往伴随结构转型、技术采用和制度变化。

这些事实会不断约束我们的模型。比如，如果一个模型预测资本产出比长期爆炸式上升，但数据中资本产出比相对稳定，那么模型就缺少某个平衡机制。如果一个模型预测人口越多增长越快，但 20 世纪后期数据并不支持简单规模效应，那么模型就需要修正。这正是从 Romer 模型走向 Jones 半内生增长模型的重要动机。

1.9 Kaldor facts：高级增长课的第一组约束

研究生增长课通常不会只问“增长从哪里来”，还会问“一个模型能不能同时解释多组长期事实”。[Kaldor, 1961] 总结的若干事实之所以重要，是因为它们像一组基准测试：如果模型连这些粗事实都解释不了，就很难成为理解长期增长的核心框架。

最常用的 Kaldor facts 包括：第一，发达经济体的人均产出和劳动生产率长期以相对稳定的正速度增长；第二，资本劳动比也长期上升；第三，资本产出比在长时期内没有系统性爆炸；第四，资本回报率大致稳定；第五，劳动和资本收入份额相对稳定；第六，不同经济体之间增长率和收入水平差异很大。它们并不是每一年、每一个国家都严格成立的自然定律，而是模型必须认真面对的经验规律。

这些事实会直接塑造后面的理论。Solow 模型用外生技术进步解释平衡增长路径上资本产出比和收入份额的相对稳定；Ramsey 模型把储蓄率内生化，但仍要保留平衡增长路径；内生增长模型必须解释长期技术进步从哪里来，同时不能让规模效应和资本产出比变得荒唐；创新模型还要说明为什么市场力量既能激励创新，也可能造成垄断扭曲。读到后面时，你会发现很多数学条件其实都是为了让模型不违背这些增长事实。

1.10 本书的学习路线

本书的正式结构可以理解为三层。第一层是主线 32 章，它从增长事实、核算和动态工具开始，逐步进入 Solow、Ramsey、OLG、内生增长、创新、中国增长和研究训练。第二层是第 33–35 章，它们是 PhD+ 高级专题扩展，把主线模型推向技术方向、不平等、开放经济增长和金融摩擦。第三层是附录 A–F，它们不是可有可无的补充，而是高级工具箱：随机递归、连续时间、异质性主体、随机 HJB、增长数据和数值实现。

第一部分是**增长问题、事实与核算**。先理解为什么研究增长，再看跨国收入差异、长期历史事实、增长核算和收敛问题。这一部分回答“我们要解释什么”。

第二部分是**数学与动态工具桥梁**。增长理论离不开动态系统、最优化、相图和一般均衡。这里的目标不是为了数学而数学，而是让后面的 Ramsey、OLG 和内生增长模型可读。

第三部分是 **Solow 与外生增长**。从资本积累、稳态、技术进步、平衡增长路径、人力资本和条件收敛出发，建立现代增长理论的基准模型。

第四部分是 **Ramsey、OLG 与动态一般均衡**。储蓄率不再外生，而由家庭和社会计划者的跨期选择决定。这里开始进入研究生增长课的核心技术。

第五部分是**内生增长**。这一部分把长期增长率从外生技术进步中解放出来，讨论广义资本、外部性、人力资本、知识生产、品种扩张和规模效应争论。

第六部分是**创新、创造性破坏与技术进步**。重点转向研发、专利、质量阶梯、技术扩散、通用技术和 AI 对长期增长的影响。

第七部分是**中国增长、发展与结构转型**。这里把前面的理论语言用于理解中国：资本深化、劳动转移、城市化、资源错配、企业动态、制度变化和地方政府激励。

第八部分是**研究前沿与论文训练**。这里不是停在“学过模型”，而是进入实证识别、论文复制、文献综述和 mini paper 设计，让学习逐步接近真正研究。

第九部分是 **PhD+ 高级专题扩展**。它处理三个更接近前沿课程和研究论文的主题：技术方向、不平等与任务模型；开放经济增长、贸易与全球技术扩散；金融发展、信贷约束与长期增长。这些章节的作用，是把前面建立的增长语言带到更复杂的研究场景中。

第十部分是**高级附录**。附录 A–F 分别整理随机增长与递归方法、连续时间 Hamiltonian 与 HJB、异质性主体与不完全市场、随机过程与随机 HJB、增长数据手册、数值实现与误差诊断。读者不必在第一遍学习时完全掌握所有附录，但如果目标是进入 PhD 课程或研究论文，这些附录就是从“会读模型”走向“能推导、能计算、能复现”的桥。

1.11 怎样读这本书

这本书不要求每个读者用同一种速度读完。更合理的做法，是根据目标选择路径。第一遍学习时，最重要的是形成主线：事实 → 核算 → Solow → Ramsey/OLG → 内生增长 → 创新扩散 → 中国增长 → 研究训练。附录和 PhD+ 章节可以在需要时进入，而不是一开始就全部吃下。

学习目标	建议读法	可以暂时跳过的内容

大二到高年级自学	精读第 1–24 章，重点掌握增长事实、核算、Solow、Ramsey、OLG、内生增长和创新扩散；第 25–28 章作为中国经验整合。	第 33–35 章和附录 A–D/F 可以先浏览导读，只在正文看不懂工具时回查。
研究生增长课准备	精读第 1–28 章，并把第 7、13、16 章分别和附录 A/B/C/F 对读；第 33–35 章作为 PhD+ 专题。	附录 D 的随机连续时间工具可以放到读 HJB、HANK、金融摩擦或随机增长论文前再精读。
论文训练与研究入门	精读第 25–35 章和第 29–32 章；同时查附录 E 的数据口径和附录 F 的数值实现规范。	前面理论章不必每次重读，但遇到模型机制时要回到对应章节，例如错配回第 27 章，技术扩散回第 23/34 章。
只想理解中国增长	先读第 1–4、9–12、23、25–28、34–35 章，再根据需要回读 Ramsey、OLG 和内生增长。	第 7、13–16 章可以先读直觉和 Review，数学推导可在第二遍补。

有几组章节最好连读。第 2–3 章要连读，因为事实和增长核算不能分开；第 9–12 章要连读，因为 Solow、技术进步、人力资本和模型评价共同构成外生增长基准；第 13–16 章要连读，因为 Ramsey、福利定理、OLG 和异质性约束共同构成动态一般均衡主线；第 19–24 章要连读，因为 Romer、Jones、Schumpeterian、竞争政策、技术扩散和 AI 是同一条“技术进步如何发生并转化为增长”的链条；第 25–28 章要连读，因为中国增长事实、结构转型、资源错配和制度激励是一个整体。

附录	什么时候读	第一遍策略
附录 A	读到 Bellman 方程、随机生产率、值函数迭代和递归均衡时。	第一次可读导读、Bellman 方程和误差诊断；证明与算法细节可第二遍。
附录 B	读 Ramsey、Hamiltonian、HJB、相图和鞍路径时。	若第 13–14 章推导吃力，应优先读；否则可作为工具手册回查。
附录 C	读第 16 章、金融摩擦、财富分布、Aiyagari 或 HANK 类模型时。	先掌握递归均衡和分布不动点；Krusell–Smith 等扩展可后读。

附录 D	读连续时间随机控制、Ito 引理、Poisson 创新、随机 HJB 或 HJB–KFE 论文时。	第一遍可以跳过；准备读现代 PhD 宏观和金融摩擦论文时再精读。
附录 E	使用本书任何数据图表、增长核算表、中国事实表或 WDI/PWT 变量时。	不建议跳过。做数据、复现或引用图表前至少读变量口径和最小复现规范。
附录 F	想把 Ramsey、Aiyagari、HJB–KFE 或开放经济/创新模型真正算出来时。	第一遍可读误差诊断和可复现结构；具体算法在需要写代码时再细读。

每章末尾的 Review 不是额外作业，而是自我验收。读者可以用它判断是否该继续向后读：如果 Review 中的核心问题说不清，最好先回到本章模型和数据例子；如果能解释主要机制但推导不稳，可以继续读下一章，同时把相关附录作为工具回查。这样读，本书就不是一条只能从头到尾硬走的路，而是一张可以反复回到关键节点的地图。

1.12 全书符号约定

为了让后面三十多章和附录能读成一个系统，本书尽量使用统一符号。不同章节有时会为了局部模型简化记号，但默认含义如下。

符号或术语	默认含义与使用提醒
Y_t、y_t	Y_t 表示总产出，y_t 通常表示人均或每工人产出。若使用有效劳动单位变量，正文会明确写成 $\tilde{y}$ 或说明除以 A_tL_t。
K_t、k_t	K_t 表示总资本存量，k_t 通常表示人均资本或每工人资本。Solow、Ramsey 和增长核算章中，k 是最常见的状态变量。
L_t	劳动、就业或人口。具体数据章节会区分总人口、就业人数和劳动年龄人口；不能把这些口径随意混用。
A_t	技术水平、广义效率或全要素生产率。增长核算中的 A_t 常是 residual，不等于纯技术发明；创新模型中的 A_t 更接近知识或技术前沿。
H_t、h_t	H_t 常表示总人力资本，h_t 常表示人均人力资本或 PWT 人力资本指数。MRW 章中 H 是可积累要素，数据章中 h 更多是劳动质量调整。

TFP 与 residual	TFP 是给定投入下的产出效率指标。Solow residual 是扣除资本、劳动和人力资本贡献后的剩余项，可能包含技术、配置效率、制度、规模经济、产能利用和测量误差。
TFPQ 与 TFPR	TFPQ 表示企业物理生产率，更接近真实技术效率；TFPR 表示收入生产率，受价格、需求和扭曲影响。第 27 章会系统使用这一区分。
wedge、楔子	楔子表示私人边际条件和社会边际条件、或不同主体边际回报之间的差异。常见符号包括 τ、Δ、税率、补贴率和融资约束项。
开放度	若无特别说明，开放度通常指贸易占 GDP 比重或贸易成本的反向指标。第 34 章会强调，开放度是结果变量、政策变量和地理约束的混合代理，不能直接当作因果冲击。
A 在附录中的例外	在附录 D/F 的连续时间数值方法中，粗体或矩阵语境下的 A 可能表示 Markov 生成元矩阵，而不是生产率。读到 HJB–KFE 系统时，要根据上下文区分 A_t 和矩阵 A。

这张表不是要替代每章的定义。相反，它给你一个全书级坐标系：看到小写变量，先问它是否已经被除以人口、劳动或有效劳动；看到 TFP，先问它是理论生产率、PWT 指数，还是自己算出的 residual；看到楔子，先问它到底让哪两个边际条件分开。很多增长理论错误，不是公式推错，而是符号口径在章节之间悄悄换了。

1.13 本章 Review

读完本章，你可以用下面几条判断是否真正理解。

第一，你应该能不用公式解释为什么长期增长率差 1 个百分点会在几十年后造成巨大收入差距。

第二，你应该能说明为什么人均 GDP 比总 GDP 更适合衡量平均生活水平，但也能说明人均 GDP 为什么不是福利的全部。

第三，你应该能区分增长、周期、发展和结构转型，并能举出中国经验中每一类问题的例子。

第四，你应该理解模型和数据的分工：模型帮助看清机制，数据帮助约束模型，历史经验帮助判断机制在现实中的适用边界。

第五，你应该知道本书不是一本只讲 Solow 的教材。Solow 是入口，后面会走向动态一般均衡、内生技术进步、创新、中国结构转型、研究训练、PhD+ 专题和高级方法附录。

1.14 核心文献

本章最重要的背景阅读是 [Lucas, 1988] 对发展和增长问题重要性的经典表达，以及 [Jones and Vollrath, 2013]、[Barro and Sala-i Martin, 2004] 和 [Acemoglu, 2009] 中关于增长事实和增长理论问题意识的导论部分。后面进入具体模型时，我们会再系统阅读 Solow、Ramsey、Romer、Aghion-Howitt 和中国增长文献。

第二章　增长事实：跨国差异与历史长期增长

2.1　本章导读

增长理论必须从事实开始。没有事实，模型只是符号；没有模型，事实又容易变成零散故事。本章的任务，是把长期增长中最重要的经验现象摆到桌面上：跨国收入差异巨大，现代增长在历史上出现得很晚，追赶并不自动发生，增长率差异会通过复利形成巨大的生活水平差异。

本章暂时不做完整增长核算。增长核算会在下一章单独展开。本章只关心事实本身：我们怎样读长期收入数据，怎样理解对数图，怎样比较中国、美国、韩国和印度，怎样从跨国事实中提出后续模型必须解释的问题。

2.2　学习目标

学完本章，你应该能够：

1. 读懂人均实际 GDP 的长期对数图。
2. 区分收入水平、增长率、追赶速度和发展阶段。
3. 用真实数据解释中国、韩国、美国和印度增长路径的差异。
4. 理解为什么“穷国会自动追赶富国”不是一个事实，而是需要条件的命题。
5. 为后续收敛、Solow 模型和技术扩散章节建立经验背景。

2.3　对数图如何读

增长数据常用对数刻度。原因很简单：我们关心的是比例变化，而不是绝对差额。如果一个经济体人均收入从 1,000 增长到 2,000，另一个从 40,000 增长到 80,000，绝对增量不同，但都翻了一番。对数刻度会把这两种变化显示为相同的垂直距离。

设人均收入为 y_t，年均增长率为 g：

$$y_t = y_0(1+g)^t. \tag{2.1}$$

取对数：

$$\log y_t = \log y_0 + t\log(1+g). \tag{2.2}$$

当 g 较小时，$\log(1+g) \approx g$。所以对数收入图中的斜率，可以近似理解为增长率。

这会改变我们看图的方式。普通坐标图上，美国曲线会因为水平高而显得压倒其他国家；对数图上，我们能同时看见美国的高水平、中国和韩国的高速追赶、印度的较慢上升。

2.4 现代增长出现得很晚

增长事实的第一层不是“哪个国家现在更富”，而是“现代增长本身出现得很晚”。表 2.1 使用 Maddison Project Database 的长期人均 GDP 数据 [Bolt and van Zanden, 2023]，把中国、印度、英国和美国放在同一张历史表里。这里的单位是 2011 年国际元，适合比较长期购买力意义上的生活水平。

表 2.1: 长期历史中的人均 GDP：现代增长与大分流

年份	中国	印度	英国	美国
1000	1,225	–	1,151	–
1500	1,207	–	1,697	–
1820	882	–	3,306	2,674
1870	945	850	5,829	4,803
1913	985	1,073	8,212	10,108
1950	799	987	11,061	15,240
1980	1,930	1,495	20,612	29,611
2022	19,238	7,766	38,407	58,487

注：单位为 2011 年国际元。数据来源：Maddison Project Database 2023，经 Our World in Data 整理。

这张表有两个关键含义。第一，从 1000 年到 1820 年，中国和印度这类大型农业经济体的人均收入没有持续上升趋势。长期历史并不是“缓慢但稳定地变富”，而更接近低水平附近的波动。第二，1820 年以后英国和美国的人均收入快速拉开，尤其到 1870 年和 1913 年，工业化经济体已经与亚洲大型经济体形成数量级差距。这就是增长史中的“大分流”：同样是几百年尺度，人均收入从相近水平走向巨大差异。

图 2.1 用对数刻度把这个事实画出来。对数图上，19 世纪以后英美曲线斜率明显变大，说明持续正增长开始压过传统停滞逻辑。中国在 1980 年以后斜率陡升，表明追赶增长可以非常快；但它是在一个已经存在巨大国际收入差距的世界中发生的。

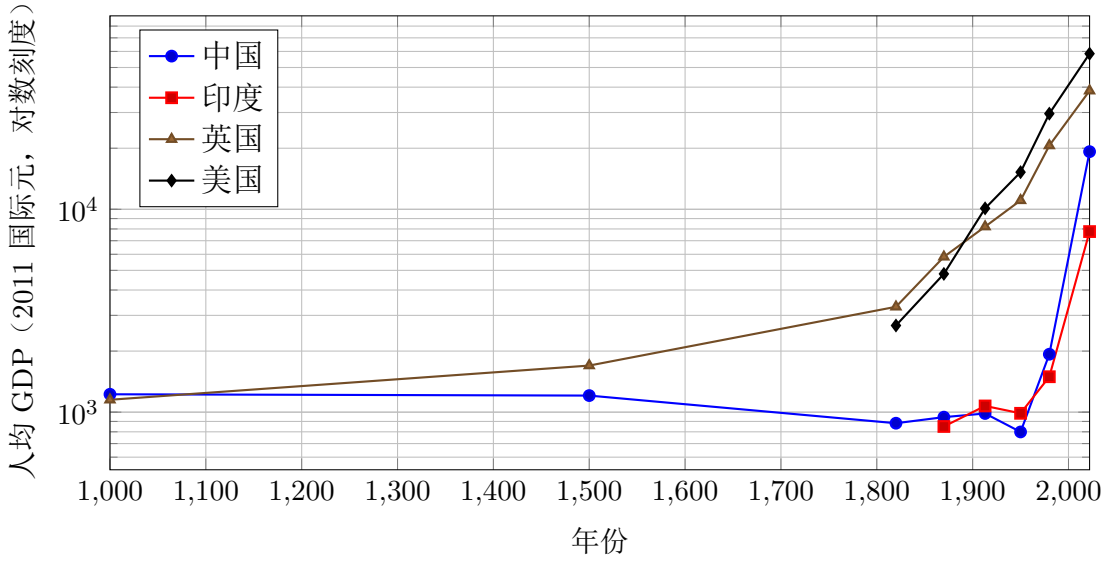

图 2.1: 长期人均 GDP 与现代增长的出现。数据来源：Maddison Project Database 2023，经 Our World in Data 整理。

这对理论提出了强要求。一个只解释资本积累的模型，可以解释后发经济体为什么在某些阶段追赶较快，但很难解释为什么现代增长在历史上并不总是存在。一个只讲制度的叙述，可以解释长期差异的一部分，却需要说明制度如何具体影响投资、技术、市场扩张和生产率。一个只讲技术的模型，也必须解释技术为什么在某些制度和市场环境下被持续创造、扩散和采用。

2.5　四个经济体的长期路径

图 2.2 使用 World Bank World Development Indicators 的人均实际 GDP 数据，比较中国、美国、韩国和印度在 1980–2024 年的路径。指标为 ‘NY.GDP.PCAP.KD‘，单位是 2015 年不变价美元。

这张图至少包含四层信息。

第一，美国的水平始终很高。1980 年，美国人均实际 GDP 约为 30,930 美元；到 2024 年约为 66,356 美元。美国并不是没有增长，而是在高收入水平上继续增长。高收入国家的增长通常较慢，但因为基数很高，绝对收入增量仍然可观。

第二，中国的追赶速度非常快。1980 年，中国人均实际 GDP 约为 437 美元；到 2024 年约为 13,122 美元。用对数增长率计算，1980–2024 年中国人均实际 GDP 年均增长约 7.73%。这不是某几年增长快，而是四十多年复利积累的结果。

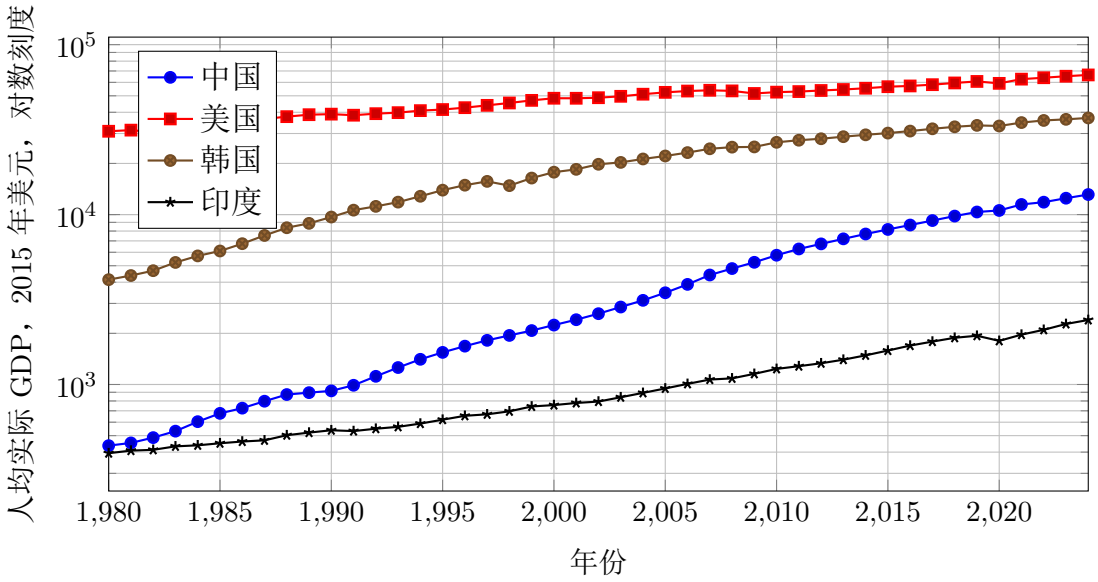

图 2.2: 人均实际 GDP：跨国收入水平与追赶路径。数据来源：World Bank WDI，指标 NY.GDP.PCAP.KD。

第三，韩国是追赶增长的经典案例。韩国 1980 年人均实际 GDP 已经显著高于中国，但此后仍保持较长时期高速增长。1980–2024 年韩国人均实际 GDP 年均增长约 4.98%。韩国说明，追赶不是只靠低起点自动发生，而需要资本积累、人力资本、技术采用、出口市场、产业升级和制度能力共同作用。

第四，印度也在增长，但路径不同。印度 1980–2024 年人均实际 GDP 年均增长约 4.10%，明显高于美国，但低于中国和韩国的高速追赶阶段。这个差异为后面讨论结构转型、基础设施、人力资本、政府能力和产业政策留下空间。

表 2.2: 人均实际 GDP 与长期增长率

经济体	1980	2000	2010	2024	1980–2024 年均增长率
中国	437	2,237	5,765	13,122	7.73%
美国	30,930	48,380	52,556	66,356	1.73%
韩国	4,140	17,763	26,623	37,048	4.98%
印度	394	757	1,235	2,397	4.10%

注：人均 GDP 为 constant 2015 US dollars。年均增长率按对数差除以年数计算。数据来源：World Bank WDI。

2.6 水平、增长率与追赶速度

读增长事实时，最容易混淆的是三个概念：收入水平、增长率和追赶速度。收入水平回答“现在有多富”，增长率回答“每年变富多快”，追赶速度回答“相对于前沿经济体的距离是否在缩小”。一个经济体可以增长很快，但因为起点很低，短期内绝对收入仍然不高；也可以收入水平很高，但增长率并不快。

用表 2.2 看，中国 1980–2024 年人均实际 GDP 增长率远高于美国，但 2024 年中国人均实际 GDP 仍明显低于美国。这不是矛盾，而是复利和初始条件共同作用的结果。假设中国人均收入从美国的低比例起步，即使多年高速增长，也需要很长时间才能完全接近前沿。后面讨论收敛时，我们会把这个直觉写成

$$\Delta \log y_{i,t} = \beta_0 + \beta_1 \log y_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t}, \tag{2.3}$$

其中 $\beta_1 < 0$ 表示低初始收入经济体增长更快。但这只是无条件收敛的检验形式，并不保证一定成立。

更合理的命题通常是条件收敛：在储蓄率、人口增长、人力资本、制度质量、开放程度、产业结构和技术吸收能力相近时，较低收入经济体才更可能增长更快。这个区别很重要。它把“穷国会自动追赶”改写成“在某些状态变量和政策环境给定时，低资本存量带来较高边际收益”。第 4 章会专门讲收敛；这里先记住：增长事实不是简单的赛跑排名，而是水平、斜率和条件共同决定的动态过程。

2.7 追赶不是自动的

如果穷国资本少，而资本边际产出递减，那么穷国似乎应该比富国增长更快。这是 Solow 模型会给出的一个基本直觉。但真实世界并不支持无条件追赶。很多低收入经济体长期没有快速缩小与前沿国家的差距。

原因在于，低资本只是追赶的一个条件，不是全部条件。要把低资本转化为高速增长，经济体还需要储蓄和投资能力、基础设施、人力资本、稳定预期、有效市场、技术吸收能力、国际连接和基本制度环境。如果这些条件缺失，资本少并不会自动带来高回报；即使潜在回报高，也可能因为融资约束、产权不稳、市场分割或政策扭曲而无法实现。

中国和韩国的经验说明，追赶是可以发生的；许多停滞经济体的经验说明，追赶不是自动发生的。这种张力会在第 4 章收敛和俱乐部、第 11 章 MRW 模型、第 15 章技术扩散以及第 25–28 章中国增长中反复出现。

2.8 增长事实对模型提出什么要求

好的增长模型至少要面对四个事实要求。

第一，它要解释收入水平差异。为什么美国长期处于高收入水平，而中国、韩国和印度从较低水平开始追赶？

第二，它要解释增长率差异。为什么中国和韩国在某些阶段能保持高速增长，而美国在高收入阶段增长较慢？

第三，它要解释追赶减速。随着中国和韩国收入水平上升，增长率为什么会自然下降？这是资本边际产出递减、技术前沿接近、人口结构变化，还是制度和创新机制变化？

第四，它要解释为什么不是所有低收入国家都追赶。这里需要超出最简单 Solow 模型，进入人力资本、制度、技术采用、结构转型和资源配置。

2.9 中国经验的位置

中国增长经验在本书中不是一个附录，而是贯穿全书的检验场。中国让我们同时看到低收入追赶、资本深化、结构转型、市场化改革、全球化、地方政府激励、资源错配和创新转型。

从图 2.2 看，中国 1980 年与印度处在相近低收入水平，但之后走出了非常不同的路径。这要求我们解释为什么相似低起点可以产生不同长期结果。从韩国比较看，中国不是第一个高速追赶经济体，但中国人口规模、地区差异和制度环境更复杂。从美国比较看，中国仍在追赶前沿，但越接近前沿，增长机制越需要从投入扩张转向生产率和创新。

这就是为什么本书不会把中国章节放在最后作为案例点缀。前面每个理论工具，都要为理解中国增长准备语言；后面中国章节，则会反过来检验这些工具是否足够。

2.10 本章 Review

读完本章后，你应该能做到以下判断。

第一，看见一张长期人均 GDP 对数图时，你能区分水平高低和斜率大小。水平高说明已经富裕，斜率大说明增长快。

第二，你能解释为什么中国 1980–2024 年的增长经验需要用复利理解，而不能只看某一年 GDP 增速。

第三，你能说明为什么“穷国会自动追赶富国”不是事实，而是一个需要条件的理论命题。

第四，你能从中国、韩国、美国和印度的比较中提出后续模型必须解释的问题：收入差距、追赶、减速和停滞。

2.11　核心文献

本章对应的核心阅读包括四类：

- Lucas 对发展差异为什么重要给出了经典表达。
- Jones and Vollrath 提供增长事实的清晰导论。
- Barro and Sala-i-Martin 系统整理收敛和跨国增长事实。
- Hall and Jones 是解释跨国收入水平差异的经典文章。

第三章　增长核算与生产函数

3.1　本章导读

上一章展示了增长事实：不同经济体之间收入水平和增长路径差异巨大。本章进一步问：当一个经济体增长时，增长到底来自哪里？

增长核算不是完整的因果理论。它不能直接告诉我们为什么中国储蓄率高，为什么韩国技术吸收快，为什么美国处于前沿。但它能把产出增长分解为几个清楚的部分：资本更多，劳动更多，人力资本更高，或者同样投入能生产更多产出。这个分解是后面所有增长模型的共同语言。

3.2　学习目标

学完本章，你应该能够：

1. 从 Cobb-Douglas 生产函数推导增长核算公式。
2. 区分资本深化、劳动投入、人力资本和全要素生产率。
3. 解释 Solow residual 的含义和边界。
4. 理解为什么投资率是重要事实，但不能直接等同于资本存量或增长原因。
5. 用增长核算语言初步理解中国增长。

3.3　投资率：资本积累的入口

增长理论很自然地从投资开始。投资形成资本，资本提高劳动者生产能力。图 3.1 比较四个经济体的总资本形成占 GDP 比重。这个指标不是储蓄率的完美等价物，也不是资本存量，但它能直观显示一个经济体把多大比例的当期产出用于形成未来生产能力。

中国的投资率长期处于高位。1980 年约为 28.5%，2000 年约为 32.6%，2010 年达到约 43.5%，2024 年仍约为 39.9%。这与中国高速增长阶段的资本深化、基础设施建设、工业扩张和城市化密切相关。

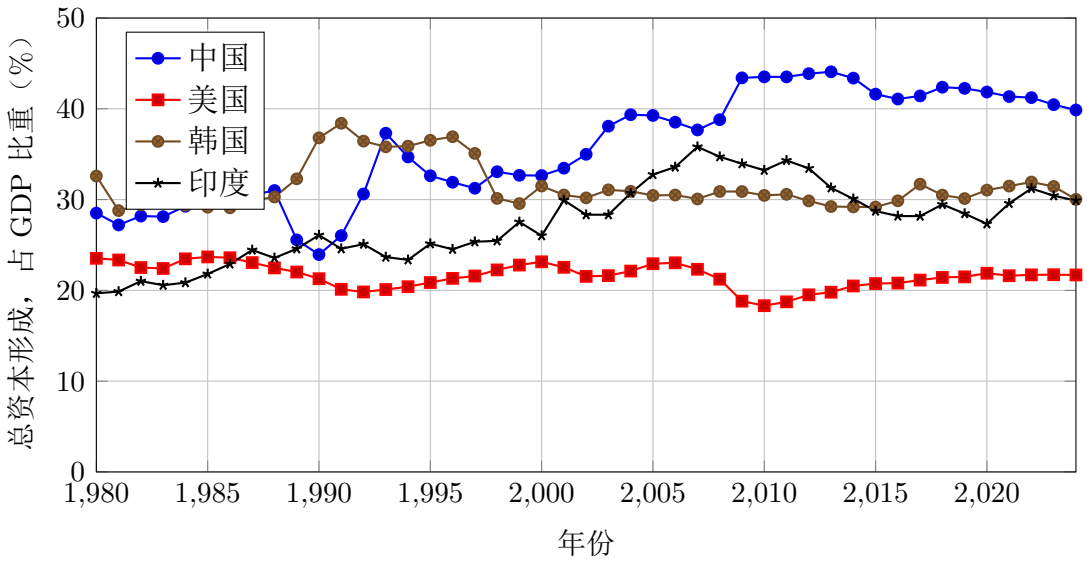

图 3.1: 投资率：总资本形成占 GDP 比重。数据来源：World Bank WDI，指标 NE.GDI.FTOT.ZS。

但投资率不能被简单读成“投资率越高，增长越高”。第一，投资形成的是资本存量，增长核算真正需要的是资本存量或资本服务，而不是投资流量。第二，投资质量很重要。同样是 1 元投资，投向高回报基础设施和先进设备，与投向低利用率项目，长期效果不同。第三，如果资本边际产出递减，单靠资本积累不能永久维持人均增长率。

3.4　从总量生产函数开始

为了把增长事实组织起来，我们从总量生产函数开始：

$$Y_t = F(K_t, L_t, A_t). \tag{3.1}$$

其中 Y_t 是总产出，K_t 是资本，L_t 是劳动，A_t 表示生产效率或全要素生产率。最常用的形式是 Cobb-Douglas：

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{3.2}$$

这个式子在增长核算里首先是一套会计语言。它说：产出变化可以来自三个方向。资本更多，劳动更多，或者同样资本和劳动能生产更多产出。

3.5　增长核算公式

对 (3.2) 取对数：

$$\log Y_t = \log A_t + \alpha \log K_t + (1-\alpha) \log L_t. \tag{3.3}$$

对时间求差分，用 $g_X \equiv \Delta \log X$ 表示变量 X 的近似增长率，得到：

$$g_Y = g_A + \alpha g_K + (1-\alpha) g_L. \tag{3.4}$$

移项即可得到全要素生产率增长：

$$g_A = g_Y - \alpha g_K - (1-\alpha) g_L. \tag{3.5}$$

这就是最基础的增长核算公式。它的含义很直接：如果产出增长超过了资本和劳动按份额加权后的增长，剩余部分就被记为 A 的增长。这个剩余部分常被称为 Solow residual。

说明 3.1 (为什么叫 residual？). 这里的 g_A 不是直接观测到的技术进步，而是从产出增长中扣除可观测投入贡献后剩下的部分。因此它叫 *residual*。它可能包含真正的技术进步，也可能包含管理改善、资源重新配置、规模经济、产能利用率变化、测量误差和制度变化。把 *residual* 直接等同于“发明了新技术”是不准确的。

3.6 人均形式：资本深化与生产率

增长理论通常关心人均产出。令

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t}, \qquad k_t = \frac{K_t}{L_t}. \tag{3.6}$$

将 (3.2) 除以 L_t：

$$y_t = \frac{A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}}{L_t} \tag{3.7}$$

$$= A_t \left(\frac{K_t}{L_t} \right)^{\alpha} \tag{3.8}$$

$$= A_t k_t^{\alpha}. \tag{3.9}$$

取对数并差分：

$$g_y = g_A + \alpha g_k. \tag{3.10}$$

这个式子非常重要。它说，人均产出增长可以分成两部分：每个劳动者拥有更多资本，即资本深化；同样的人均资本能生产更多产出，即全要素生产率增长。

3.7 一个数值例子

假设一个经济体某十年内：

- 总产出年均增长 $g_Y = 8\%$；

- 资本存量年均增长 $g_K = 10\%$；
- 劳动投入年均增长 $g_L = 1\%$；
- 资本收入份额 $\alpha = 1/3$。

根据 (3.4)：

$$g_A = g_Y - \alpha g_K - (1-\alpha) g_L \tag{3.11}$$

$$= 8\% - \frac{1}{3} \times 10\% - \frac{2}{3} \times 1\% \tag{3.12}$$

$$= 4.00\%. \tag{3.13}$$

这个结果说明，8% 的产出增长中，约 3.33 个百分点来自资本增长，0.67 个百分点来自劳动增长，剩下 4 个百分点来自 residual。注意，这不是说“技术进步贡献精确等于 4 个百分点”，而是说，在给定生产函数、资本份额和投入测量方式下，产出增长有 4 个百分点不能由资本和劳动数量增长解释。

3.8　加入人力资本

只用 K 和 L 容易低估劳动质量变化。教育、健康、经验和技能都会影响劳动者生产率。现代增长实证常把劳动扩展为人力资本调整后的劳动：

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} (h_t L_t)^{1-\alpha}, \tag{3.14}$$

其中 h_t 表示每个劳动者的人力资本。

除以 L_t：

$$y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}. \tag{3.15}$$

增长核算变为

$$g_y = g_A + \alpha g_k + (1-\alpha) g_h. \tag{3.16}$$

这一步对中国和韩国尤其重要。高速增长阶段不只是机器变多，也伴随教育普及、工程技术能力积累、管理能力学习、产业工人技能提高。若不加入人力资本，很多劳动质量改善会被错误地放进 TFP residual。

3.9　用 PWT 看每工人产出、资本和 TFP

现在把公式和真实数据接上。Penn World Table 提供了跨国可比的实际 GDP、资本存量、就业人数、人力资本指数和 TFP 指标 [Feenstra et al., 2015]。图 3.2 把中国、美国、韩国和印度的每工人实际产出统一设为 1980 年等于 100，观察 1980–2019 年的

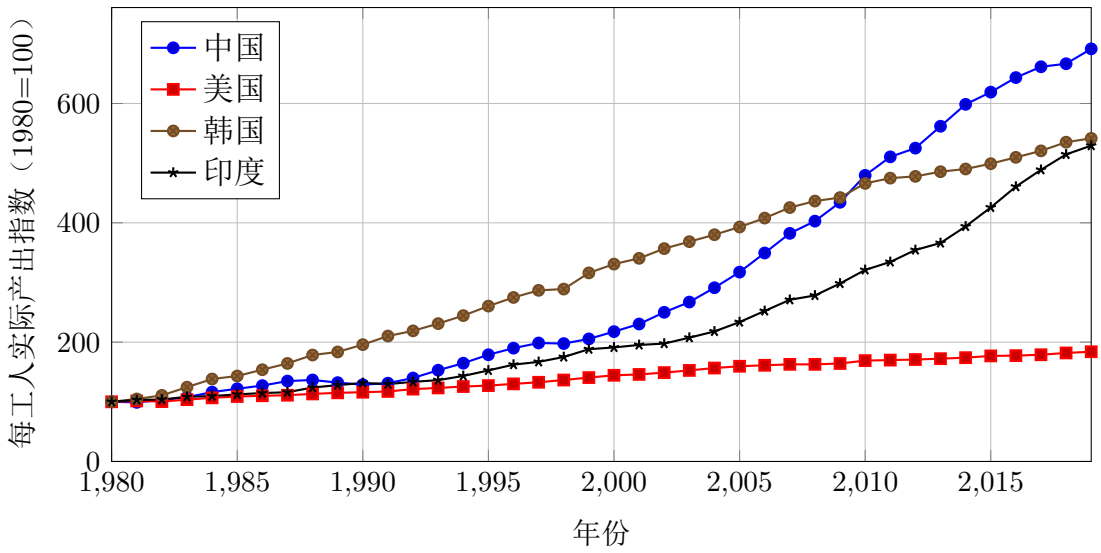

图 3.2: 每工人实际产出指数。数据来源：Penn World Table 10.0，经 DB.NOMICS API 获取。

相对变化。这里使用 PWT 10.0，变量包括实际 GDP `rgdpna`、资本存量 `rnna`、就业 `emp`、人力资本 `hc` 和 TFP `rtfpna`。

这张图比上一章的人均 GDP 更接近生产率概念，因为分母是就业人数而不是总人口。中国的每工人产出在 2000 年以后明显加速，韩国在 1980–2000 年已经经历过一轮快速上升，美国的路径更平稳，印度则在 2000 年后加速。它说明增长核算不能只看人口或总 GDP，而要看每个劳动者平均能够使用多少资本、具有多少人力资本，以及在给定投入下能生产多少产出。

图 3.3 进一步画出 PWT 的 TFP 指数。TFP 不应被机械读成“纯技术”，但它能给我们一个粗略信号：哪些时期同样投入能够转化为更多产出。中国的 PWT TFP 指数在 2000–2010 年明显上升，但 2010 年后表现较弱；韩国的 TFP 在 1980–2000 年和 2000–2010 年都上升较快；印度在 2000 年后也有较明显 TFP 改善。这个事实会影响我们对中国增长减速的解释：如果资本深化仍然很强，但 TFP 增长减弱，那么问题就不只是“投资够不够”，而是投资效率、资源配置、创新和结构转型能否继续改善。

3.10　一个实际增长核算表

表 3.1 用同一组 PWT 数据做一个简化增长核算。我们采用

$$g_y = \alpha g_k + (1-\alpha) g_h + g_A, \qquad \alpha = \frac{1}{3}, \tag{3.17}$$

其中 y 是每工人实际产出，k 是每工人资本，h 是人力资本指数。表中的“资本深化”“人力资本”和“Residual”都是百分点贡献。最后一列给出 PWT 自身 TFP 指数的年均增长率，用来提醒你：不同 TFP 口径并不完全相同。

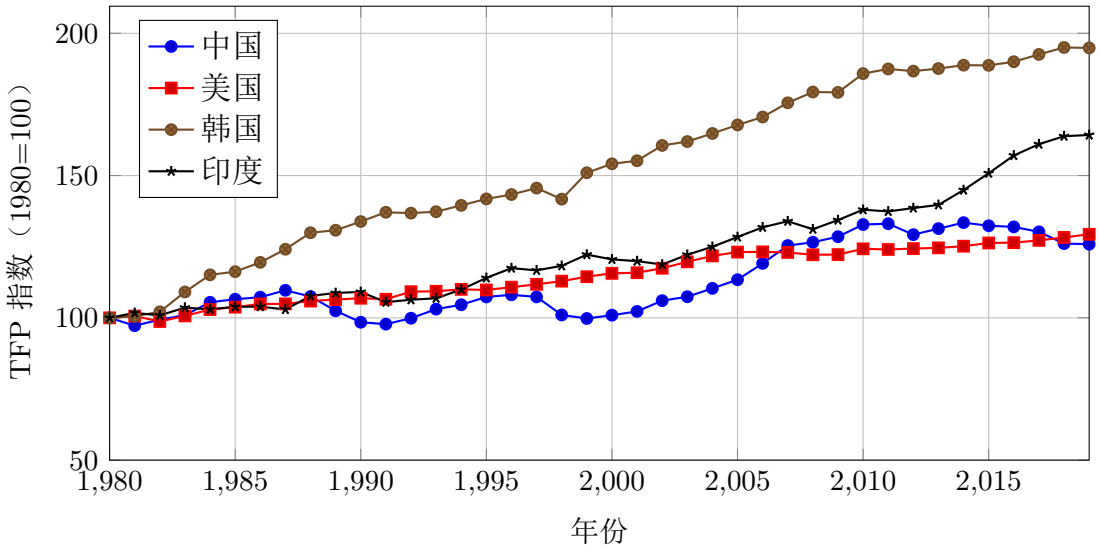

图 3.3: TFP 指数。数据来源：Penn World Table 10.0，经 DB.NOMICS API 获取。

表 3.1: 简化增长核算：每工人产出增长的来源

经济体	时期	g_y	资本深化	人力资本	Residual	PWT TFP
中国	1980–2000	3.89	2.15	0.95	0.78	0.05
中国	2000–2010	7.90	3.47	0.36	4.08	2.74
中国	2010–2019	4.07	3.24	0.74	0.09	-0.59
美国	1980–2019	1.56	0.38	0.19	0.99	0.66
韩国	1980–2000	5.98	2.39	0.96	2.63	2.16
韩国	2000–2010	3.43	1.19	0.55	1.68	1.87
韩国	2010–2019	1.67	0.67	0.61	0.39	0.53
印度	1980–2019	4.27	1.35	0.90	2.03	1.27

注：单位为年均百分点；$\alpha = 1/3$。数据来源：Penn World Table 10.0，经 DB.NOMICS API 获取。

这张表比“投资率高所以增长快”的说法更有信息量。中国 2000–2010 年的每工人产出增长非常高，资本深化贡献很大，但 residual 也很高；这与加入 WTO 后出口扩张、产业升级、资源再配置、城市化和技术吸收加速相一致。2010–2019 年，中国每工人产出仍保持增长，资本深化贡献仍强，但 residual 明显减弱；这正是后面讨论资源错配、投资效率、创新转型和人口结构时要解释的事实。

韩国的表格展示了典型追赶经济体的减速。1980–2000 年，韩国同时有强资本深化、人力资本积累和 TFP 改善；2000 年后，随着收入水平接近前沿，增长率自然下降。美国的长期增长则更像前沿经济体：资本深化贡献较小，TFP 和广义效率改善更重要。印度的长期表现介于两者之间，2000 年后加速较明显，但收入水平仍低，说明追赶空间和结构约束并存。

从学习角度看，表 3.1 的价值不在于给出最后答案，而在于训练一种读法：先把增长拆成投入和 residual，再追问 residual 背后的机制。只有这样，后面讨论技术进步、制度、市场化、企业动态和中国结构转型时，才不会变成松散故事。

3.11 水平核算

增长核算解释“增长率来自哪里”，水平核算解释“收入水平差异来自哪里”。从

$$y = Ak^{\alpha}h^{1-\alpha} \tag{3.18}$$

出发，可以写成另一种常见形式。注意 $k = K/L$，而资本产出比为 K/Y。因为 $k/y = K/Y$，所以 $k = (K/Y)y$。代入：

$$y = A[(K/Y)y]^{\alpha}h^{1-\alpha} \tag{3.19}$$

$$= A(K/Y)^{\alpha}y^{\alpha}h^{1-\alpha}. \tag{3.20}$$

两边除以 y^{α}：

$$y = A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{K}{Y}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}h. \tag{3.21}$$

这个式子比 $y = Ak^{\alpha}h^{1-\alpha}$ 更适合比较长期收入水平，因为它把资本积累写成资本产出比，而不是人均资本。许多跨国发展核算发现，贫富国家收入差距中很大一部分来自 TFP 或广义效率差异，而不只是可观测资本和受教育年限差异 [Hall and Jones, 1999, Acemoglu, 2009]。

这里还有一个关键点：在 (3.21) 中，A 的指数是 $1/(1-\alpha)$。如果 $\alpha = 1/3$，那么 A 的指数是 $3/2$。这意味着生产率差异会通过资本积累被放大。生产率高的经济体不仅同样资本能生产更多，还会因为资本回报高而积累更多资本。

3.12 中国增长的核算直觉

用本章语言看中国增长，可以避免两个极端。一个极端是把中国增长完全解释为高投资，仿佛资本堆积自动带来收入跃升。另一个极端是只谈制度或技术，忽略中国真实发生过的大规模资本深化和基础设施建设。

更平衡的说法是：中国高速增长首先包含非常强的资本深化。图 3.1 中，中国投资率长期高于美国，也在 2000 年后明显上升。高速铁路、港口、电力、通信、城市住房、制造业设备和工业园区都不是抽象背景，而是生产函数里资本和公共基础设施的重要组成部分。

但资本深化并不独自解释全部增长。表 3.1 显示，中国 2000–2010 年的 residual 很高，而 2010–2019 年明显下降。这个变化提示我们，中国增长不能只用“资本越多越好”来讲。改革开放后的农村家庭联产承包、乡镇企业发展、劳动力从农业转向制造业和服务业、加入全球贸易体系、外资和技术引进、城市化带来的集聚经济、企业竞争和管理改善，都会提高资源配置效率和广义生产率。许多机制并不直接表现为 K 或 L 的数量变化，却会改变同样投入能产生多少产出。

这也给后续章节埋下一个核心问题：当资本深化的边际回报下降、劳动力转移空间缩小、人口结构变化开始显现时，一个经济体如何从投入驱动转向生产率和创新驱动？Solow 模型会告诉我们为什么单靠资本不能永久维持高增长；内生增长和创新模型会讨论知识生产如何持续提高 A；中国增长章节会进一步讨论资源错配、地方政府激励、产业政策和企业动态如何影响 residual。增长核算本身不回答这些因果问题，但它把问题定位得更清楚。

3.13 增长核算的边界

增长核算很有用，但不能过度解释。

第一，增长核算不是因果识别。公式可以说资本增长贡献了多少百分点，但不能直接说明资本增长为什么发生。

第二，TFP residual 不是纯技术。它包含技术，也包含资源配置、制度、规模经济、市场竞争、产能利用、测量误差和行业结构变化。

第三，生产函数参数不是自然常数。资本份额 α 常被设为 1/3，这是一个有用近似，但不同国家、时期和测量口径下可能不同。

第四，总量生产函数本身是一个强假设。现实经济由许多行业、企业和地区组成。把它们压缩为一个 $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$，会隐藏结构转型、资源错配、企业异质性和地区差异。

3.14 本章 Review

读完本章后，可以用下面几条来判断理解是否到位。

第一，你应该能从 $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ 推出 $g_Y = g_A + \alpha g_K + (1-\alpha)g_L$，并能解释每一项的经济含义。

第二，你应该能说明为什么投资率是重要增长事实，但不能直接等同于资本存量或增长原因。

第三，你应该能解释 TFP residual 的边界：它很重要，但不是一个可以直接等同于“技术”的黑箱词。

第四，你应该能说明为什么加入人力资本会改变我们对增长来源的判断。

第五，你应该能把中国增长拆成资本深化、劳动转移、人力资本和广义生产率变化几个层面，而不是只用单一故事解释。

3.15 核心文献

本章对应的核心阅读是 Solow residual 和增长核算传统，以及现代增长教材中关于发展核算的章节，尤其是 [Barro and Sala-i Martin, 2004]、[Acemoglu, 2009] 和 [Jones and Vollrath, 2013]。关于跨国收入差异和生产率差异，[Hall and Jones, 1999] 是必须理解的经典文章。关于中国增长的总览，可读 [Zhu, 2012]。

第四章　收敛、俱乐部与发展陷阱

4.1　本章导读

前几章已经看到两个同时成立的事实：一方面，低收入经济体有时能高速追赶，例如中国和韩国；另一方面，世界收入差距并没有自动消失，许多经济体长期停留在低收入或中等收入状态。本章要处理的就是这组张力：如果资本边际产出递减，穷国为什么没有普遍追上富国？如果追赶不是自动的，那么什么条件使追赶成为可能？

收敛问题是从增长事实通向 Solow 模型的最后一座桥。它迫使我们区分四个概念：绝对收敛、条件收敛、俱乐部收敛和发展陷阱。绝对收敛说低收入经济体平均会增长更快；条件收敛说经济体会向自己的稳态收敛，只有稳态相同或相近时才会彼此靠近；俱乐部收敛说世界可能分成若干组，每组内部收敛，但组与组之间长期分离；发展陷阱则说某些初始条件或制度结构会让经济体停在低水平均衡附近。

本章的重点不是背概念，而是建立判断能力。看到一张跨国增长图时，你要能问：这是绝对收敛还是条件收敛？斜率说明什么？离群点说明什么？如果中国、韩国、巴西、墨西哥、尼日利亚和印度起点不同、增长率不同，我们该把差异归因于低资本存量，还是归因于人力资本、制度、技术采用、产业结构和全球市场连接？

4.2　学习目标

学完本章，你应该能够：

1. 区分绝对收敛、条件收敛、俱乐部收敛和发展陷阱。
2. 用 Solow 模型的直觉解释为什么低资本经济体可能增长更快。
3. 理解收敛回归中的系数、斜率和解释力。
4. 用真实跨国数据判断“追赶倾向”和“追赶自动发生”的区别。
5. 把收敛框架用于理解中国、东亚、拉美和低收入经济体的不同增长路径。

4.3 为什么会期待收敛

收敛直觉来自资本边际产出递减。设每工人产出为

$$y = Ak^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{4.1}$$

其中 k 是每工人资本。资本的边际产出为

$$\frac{\partial y}{\partial k} = \alpha A k^{\alpha-1}. \tag{4.2}$$

因为 $\alpha - 1 < 0$，所以 k 越低，资本边际产出越高。直觉上，缺机器、缺基础设施、缺厂房的经济体，新增一单位资本的产出回报可能更高；已经高度资本密集的经济体，再增加一单位资本，边际收益较低。

这给出一个看似强烈的预测：穷国应该比富国增长更快。若穷国储蓄并投资，资本快速积累；若富国资本已经很多，资本深化速度自然放慢。于是收入差距应当逐渐缩小。这就是最朴素的收敛命题。

但这只是第一步。资本边际产出高，并不等于资本一定会流入，也不等于投资一定有效。一个低收入经济体可能同时缺乏金融市场、基础设施、教育、产权保护、行政能力和技术吸收能力。资本的物理稀缺会提高潜在回报，但制度、市场和人力资本约束可能让潜在回报无法变成真实投资和真实产出。因此，收敛命题必须从“低起点”走向“给定条件下的低起点”。

4.4 一张跨国收敛图

图 4.1 使用 World Bank WDI 的人均实际 GDP 数据。横轴是 1980 年人均实际 GDP 的对数，纵轴是 1980–2024 年人均实际 GDP 的年均增长率。样本包括 154 个在两个年份都有数据的经济体。图中灰点是全部样本，黑点标出中国、韩国、印度和美国。

这张图的第一层信息是：拟合线向下倾斜。简单线性回归为

$$g_i = 3.629 - 0.277 \log y_{i,1980} + u_i, \tag{4.3}$$

样本量为 154，R^2 约为 0.066。负斜率表示低初始收入经济体平均增长更快，这与收敛直觉方向一致。

但第二层信息更重要：点云非常分散，解释力很弱。相似的初始收入水平可以对应很不同的增长率。中国和印度在 1980 年起点都很低，但此后增长速度明显不同；巴西和墨西哥 1980 年并不贫穷，但 1980–2024 年增长较慢；韩国 1980 年已经高于中国和印度，却仍然实现高速追赶；美国起点高、增长慢，但仍保持正增长。这说明“低收入”不是充分条件。

表 4.1 把图中的几个典型路径列出来。中国和韩国说明追赶可以非常快；巴西和墨西哥说明中等收入起点并不保证继续接近前沿；尼日利亚说明资源和人口规模本身也

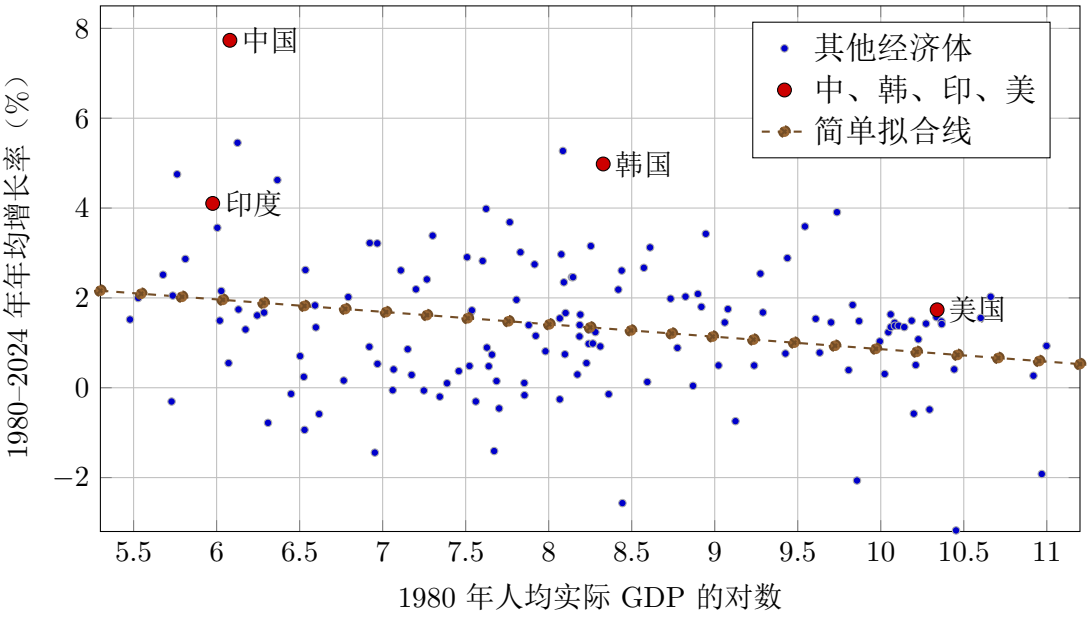

图 4.1: 绝对收敛的一个粗略检验。数据来源：World Bank WDI，指标 NY.GDP.PCAP.KD。

表 4.1: 若干经济体的起点、终点与长期增长

经济体	1980 年人均 GDP	2024 年人均 GDP	1980–2024 年均增长率
中国	437	13,122	7.73%
韩国	4,140	37,048	4.98%
印度	394	2,397	4.10%
美国	30,930	66,356	1.74%
博茨瓦纳	2,003	6,937	2.82%
巴西	6,473	9,567	0.89%
墨西哥	8,290	10,316	0.50%
尼日利亚	2,177	2,325	0.15%
埃塞俄比亚	292	883	2.52%

注：人均 GDP 为 2015 年不变价美元。数据来源：World Bank WDI。

不足以保证人均收入快速提高；埃塞俄比亚说明低收入经济体可以增长，但低起点下即便有正增长，收入水平的绝对差距仍可能长期存在。

4.5 绝对收敛

定义 4.1 (绝对收敛). 如果初始收入较低的经济体系统性地比初始收入较高的经济体增长更快，并且这种关系不依赖其他控制变量，那么称为绝对收敛。

经验上，绝对收敛常用如下回归表示：

$$\frac{1}{T}\left(\log y_{i,t+T} - \log y_{i,t}\right) = \beta_0 + \beta_1 \log y_{i,t} + \varepsilon_i. \tag{4.4}$$

如果 $\beta_1 < 0$，则初始收入越低，后续增长越快，数据支持绝对收敛。

图 4.1 的拟合线给出一个弱的绝对收敛信号，但不能把它读成“世界正在自动变平”。原因有三点。第一，R^2 很低，说明初始收入只能解释很小一部分增长差异。第二，样本中存在大量离群点，许多低收入经济体增长并不快。第三，绝对收敛回归没有控制储蓄、人力资本、人口增长、制度、开放、冲突、资源依赖和产业结构，因此斜率混合了多种机制。

这就是为什么增长经济学很少停在绝对收敛。绝对收敛是有用的第一张图，但不是解释。它像是在说：低起点提供了追赶空间；但是否能利用这个空间，要看经济体能否形成资本、人力资本、技术采用和制度支持。

4.6 条件收敛

定义 4.2 (条件收敛). 如果经济体在给定储蓄率、人口增长、人力资本、制度和技术环境等状态变量后，会向各自的稳态收敛，那么称为条件收敛。只有当稳态相同或相近时，收入水平才会彼此接近。

Solow 模型的核心预测其实更接近条件收敛，而不是绝对收敛。设每工人资本动态为

$$\dot{k} = sAk^{\alpha} - (n+\delta)k, \tag{4.5}$$

其中 s 是储蓄率，n 是劳动增长率，δ 是折旧率。稳态满足

$$sA(k^*)^{\alpha} = (n+\delta)k^*, \tag{4.6}$$

因此

$$k^* = \left(\frac{sA}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{4.7}$$

这条公式说明，经济体不是都向同一个资本水平收敛，而是向由 s、A、n 和 δ 决定的自己的稳态收敛。两个国家初始收入都低，但如果一个储蓄率高、人力资本改善

快、技术吸收能力强，另一个政治不稳定、投资效率低、人口压力大，它们不会走向同一个长期水平。

条件收敛回归通常写成

$$g_i = \beta_0 + \beta_1 \log y_{i,0} + \gamma' X_i + \varepsilon_i, \tag{4.8}$$

其中 X_i 包括储蓄或投资率、人口增长、人力资本、制度、地区虚拟变量等控制变量。若加入这些变量后 $\beta_1 < 0$，含义是：在稳态决定因素相近时，低初始收入经济体增长更快。[Mankiw et al., 1992] 的贡献正在于把人力资本加入 Solow 框架，并用跨国数据解释条件收敛。

条件收敛和绝对收敛的实证含义不同。若只做 (4.4)，我们问的是“低收入经济体是否平均增长更快”。若做 (4.8)，我们问的是“在投资率、人口增长和人力资本等稳态决定因素相近时，低收入经济体是否增长更快”。这就是为什么 MRW 类型回归通常会加入投资率、人口增长和 schooling 变量：这些变量不是普通控制变量，而是理论中稳态位置的代理。

本章不完整复现 MRW，因为第 11 章会在人力资本扩展的 Solow 模型中系统处理。但现在可以先理解一个核心判据：如果加入稳态变量后初始收入系数更稳定地为负，说明数据更支持条件收敛而不是无条件追赶；如果初始收入系数消失或符号改变，说明所谓收敛可能只是样本选择、地区俱乐部或遗漏变量造成的表面关系。因此，条件收敛回归的重点不是“多加几个变量让拟合更好”，而是把回归式和稳态公式 (4.7) 对齐。

这个区别对中国经验很关键。中国的快速增长不能仅仅归因于“1980 年很穷”。同样低收入的经济体很多，并没有复制中国路径。中国追赶需要同时解释高投资率、基础设施建设、教育扩张、劳动力从农业转向工业和服务业、市场化改革、对外开放、全球价值链接入和技术吸收。低起点提供空间，条件变量决定空间能否被利用。

4.7　收敛速度：不是马上追上

收敛不是瞬间发生，而是一个动态过程。为了看清收敛速度，先从最简单的 Solow 动态出发：

$$\dot{k} = sAk^{\alpha} - (n+\delta)k. \tag{4.9}$$

令右侧为 $\phi(k)$。稳态满足 $\phi(k^*) = 0$。在 k^* 附近做一阶泰勒展开：

$$\dot{k} = \phi(k) \approx \phi'(k^*)(k - k^*). \tag{4.10}$$

因为

$$\phi'(k) = sA\alpha k^{\alpha-1} - (n+\delta), \tag{4.11}$$

并且稳态条件给出 $sA(k^*)^{\alpha-1} = n+\delta$，所以

$$\phi'(k^*) = \alpha(n+\delta) - (n+\delta) = -(1-\alpha)(n+\delta). \tag{4.12}$$

因此，资本偏离稳态的局部动态近似为

$$\dot{k} \approx -\lambda(k-k^*), \qquad \lambda = (1-\alpha)(n+\delta). \tag{4.13}$$

若模型加入外生技术进步 g，有效劳动单位资本的收敛速度相应变为

$$\lambda = (1-\alpha)(n+g+\delta). \tag{4.14}$$

这就是为什么增长教材常说 Solow 模型的收敛速度由资本边际产出递减程度和有效折旧项共同决定。α 越大，资本边际产出递减越弱，收敛越慢；$n+g+\delta$ 越大，维持原有资本有效水平所需投资越多，偏离稳态的调整也越快。

把这个局部动态写成收入形式，常见近似为

$$\log y_{t+T} - \log y^* = e^{-\lambda T}\left(\log y_t - \log y^*\right), \tag{4.15}$$

其中 $\lambda > 0$ 是收敛速度。λ 越大，经济体越快接近稳态；λ 越小，追赶越慢。这里用对数收入而不是资本，是因为经验研究通常观测和比较的是人均收入；在稳态附近，二者的偏离可以用线性近似相互对应。

式 (4.15) 可以改写为

$$\frac{1}{T}(\log y_{t+T} - \log y_t) = \frac{1-e^{-\lambda T}}{T}\log y^* - \frac{1-e^{-\lambda T}}{T}\log y_t. \tag{4.16}$$

这解释了为什么收敛回归会出现负的初始收入系数。离稳态越远，增长越快；越接近稳态，增长越慢。

但这里有一个容易误读的地方：一个经济体可以快速向低稳态收敛。若 y^* 本身很低，那么增长速度最终会下降，但收入水平仍然不高。因此，收敛速度和稳态水平必须分开看。发展政策不能只关心“向稳态收敛得快不快”，还要关心“稳态由什么决定、能否被提高”。

4.8 俱乐部收敛

绝对收敛假定世界只有一个长期吸引点；条件收敛允许每个经济体有自己的稳态；俱乐部收敛进一步强调，世界可能分成若干组。组内经济体结构相似、互相接近，组与组之间则长期分离。

定义 4.3 (俱乐部收敛). *如果一组经济体在相似初始条件、制度、技术能力或结构特征下彼此收敛，但不同组之间不收敛，那么称为俱乐部收敛。*

俱乐部收敛可以来自多种机制。第一，人力资本存在门槛。教育水平太低时，先进技术难以吸收；一旦越过门槛，技术采用和学习速度提高。第二，产业结构存在路径依赖。一个经济体若长期锁定在低生产率农业或资源部门，制造业和现代服务业难以形成规模。第三，制度质量和市场规模可能互相强化。更好的制度吸引投资，投资扩大市场，市场又支持更复杂的分工。第四，金融市场和城市网络也可能产生累积优势。

这种视角帮助我们理解东亚和拉美的差异。韩国、新加坡、中国台湾和后来的中国大陆，都在不同程度上进入了出口制造、技术学习和产业升级的追赶俱乐部。许多拉美经济体在 20 世纪中期已达到中等收入，却在宏观不稳定、产业升级不足、教育质量、市场竞争和制度问题中增长放慢。俱乐部不是地理标签，而是机制标签：哪些经济体具备持续学习和结构升级的组合条件？

4.9　发展陷阱

发展陷阱比俱乐部收敛更强。它不只是说不同组之间不收敛，而是说某些经济体会被低水平均衡吸住。一个简单表达是：

$$\dot{k} = s(k)f(k) - (n+\delta)k, \tag{4.17}$$

其中储蓄率 $s(k)$ 随收入变化。若低收入时储蓄能力很弱，例如

$$s(k) = \begin{cases} s_L, & k < \bar{k}, \\ s_H, & k \geq \bar{k}, \end{cases} \qquad s_L < s_H, \tag{4.18}$$

仅有 $s_L < s_H$ 还不足以保证陷阱。要出现两个稳定稳态，还需要低储蓄制度下的稳态位于门槛左侧，高储蓄制度下的稳态位于门槛右侧。若 $f(k) = Ak^{\alpha}$，两个候选稳态为

$$k_L^* = \left(\frac{s_L A}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \qquad k_H^* = \left(\frac{s_H A}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{4.19}$$

双稳态贫困陷阱需要

$$k_L^* < \bar{k} < k_H^*. \tag{4.20}$$

条件 (4.20) 的经济含义很清楚。若经济体从 $k < \bar{k}$ 出发，它适用低储蓄率 s_L，资本会向低稳态 k_L^* 调整；即使有增长，也会停在门槛以下。若某种大冲击、政策组合或外部支持把资本推到 $k > \bar{k}$，经济体适用高储蓄率 s_H，资本会向高稳态 k_H^* 调整。低资本经济体因为收入低、储蓄低、投资低，难以跨过门槛；一旦跨过门槛，储蓄和投资能力提高，经济可以走向更高稳态。

这个条件也说明，分段储蓄率不一定产生陷阱。如果 $\bar{k} < k_L^*$，即使低储蓄状态也会把经济体推过门槛；如果 $\bar{k} > k_H^*$，高储蓄稳态也不足以支撑跨越。发展陷阱不是把低收入重新命名为陷阱，而是需要明确的非线性和门槛条件。

类似陷阱还可能来自人力资本、基础设施、金融市场、制度和技术采用。教育水平低导致现代部门小，现代部门小导致技能回报低，技能回报低又削弱教育投资；基础设施差导致企业投资少，企业少又无法形成财政收入和规模经济；制度不稳定降低投资，低投资削弱国家能力，国家能力弱又维持制度不稳定。陷阱理论的共同点，是存在某种互相强化的低水平均衡。

但必须谨慎。不能把所有低增长都叫陷阱。如果一个经济体增长慢，可能是政策失误、外部冲击、战争、资源价格波动、人口结构、测量问题或短期周期。发展陷阱是一个机制命题，必须说明低水平为何自我维持，以及什么冲击或政策能够让经济体越过门槛。

4.10 从 beta 收敛到 sigma 收敛

收敛还有另一个常用指标：σ 收敛。β 收敛关注低初始收入是否对应高后续增长；σ 收敛关注收入分布的离散程度是否下降。若各国对数人均收入的标准差随时间下降，就存在 σ 收敛。

图 4.2 使用 WDI 中有可用数据的经济体，计算每年对数人均实际 GDP 的标准差。样本是描述性的非平衡样本，因此不能过度精确解释；严格比较应使用平衡样本，或者至少检查样本进入和退出是否改变结论。这里的图只给出一个总体印象：1980 年标准差约为 1.53，2024 年约为 1.45，收入离散程度略有下降，但远不是消失。

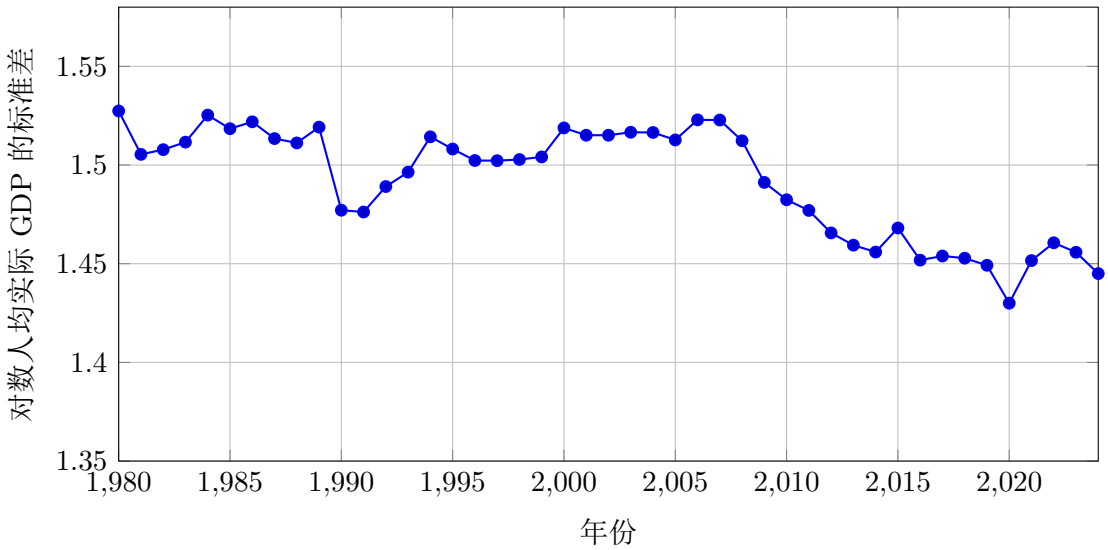

图 4.2: σ 收敛：跨国对数人均 GDP 离散程度。数据来源：World Bank WDI，指标 NY.GDP.PCAP.KD。

β 收敛不必然推出 σ 收敛。即使低收入经济体平均增长较快，如果冲击很大、组间差异持续存在，或者一些低收入经济体停滞，收入分布仍可能很分散。反过来，σ 下

表 4.2: 跨国收入离散程度的几个年份

年份	对数人均 GDP 标准差	样本经济体数
1980	1.5274	159
2000	1.5188	199
2010	1.4824	209
2024	1.4450	191

注：非平衡样本。数据来源：World Bank WDI。

降也不告诉我们机制是什么。两种指标必须一起读：β 收敛看动态方向，σ 收敛看分布结果。

4.11　中国与发展延伸

中国经验特别适合用本章框架理解。第一，中国明显体现了追赶增长：1980 年起点低，随后长期高速增长。第二，中国追赶不是无条件收敛，而是条件变量共同变化的结果：高储蓄和高投资、基础设施、人力资本、市场化改革、农村剩余劳动力转移、对外开放和技术吸收同时发生。第三，中国内部也存在地区收敛和俱乐部问题。东部沿海较早进入出口制造和城市化俱乐部，中西部一些地区后来通过基础设施、产业转移和城市群发展加速追赶，但地区差距并没有自动消失。

中国也提示我们，中等收入阶段的收敛逻辑会变化。低收入阶段可以依靠资本深化、劳动力转移和技术引进实现高增长；随着接近前沿，模仿空间缩小，人口红利减弱，资本边际回报下降，增长越来越依赖 TFP、创新、资源配置和高质量人力资本。此时，继续追赶不再只是“投入更多”，而是“能否提高稳态本身”。

因此，后面中国增长章节不会把中国经验写成单一奇迹故事。它会问更具体的问题：资本深化还剩多少空间？劳动力从农业和低生产率部门转移的空间有多大？城市化是否继续带来集聚收益？资源错配是否压低 TFP？产业政策和竞争政策如何影响创新？这些问题都可以看成本章条件收敛框架的展开。

4.12　本章 Review

读完本章后，你应该能做出以下判断。

第一，看到低收入经济体增长快时，你不会马上说“绝对收敛成立”，而会检查样本、斜率、解释力和离群点。

第二，你应该能解释为什么 Solow 模型更自然地推出条件收敛：经济体向自己的稳态收敛，而稳态取决于储蓄率、人口增长、技术水平和其他结构条件。

第三，你应该能区分 β 收敛和 σ 收敛。前者看低起点是否对应高增长，后者看收入分布是否变得更集中。

第四，你应该能说明俱乐部收敛和发展陷阱的机制差异：俱乐部强调组内收敛和组间分离，陷阱强调低水平均衡的自我维持。

第五，你应该能用中国、韩国、印度、巴西、墨西哥和尼日利亚的比较说明：追赶空间重要，但能否追赶取决于资本、人力资本、技术采用、制度、结构转型和全球连接。

4.13 核心文献

本章的经典入口是 [Baumol, 1986] 对收敛俱乐部的早期讨论，以及 [Barro and Sala-i Martin, 1992] 对跨国和地区收敛回归的系统研究。[Mankiw et al., 1992] 把人力资本加入 Solow 模型，是理解条件收敛的核心论文。[Quah, 1996] 强调收入分布动态和俱乐部视角，有助于避免只看平均回归斜率。[Azariadis, 1996] 和 [Galor, 1996] 则代表了发展陷阱和多重均衡传统。

第二部分

数学与动态工具桥梁

第五章　增长模型中的数学语言

5.1　本章导读

从这一章开始，本书进入第二部分：数学与动态工具桥梁。前四章已经说明增长理论要解释什么事实；接下来四章要准备解释这些事实所需的语言。增长模型的数学并不是为了制造门槛，而是为了把机制说清楚。没有符号，我们很容易把“资本更多”“资本回报更高”“储蓄率更高”“稳态更高”“转移速度更快”混在一起；有了符号，这些说法可以被放进同一个结构中比较。

本章的目标不是重讲一门完整数学课，而是整理增长模型最常用的一组工具：集合和时间下标、对数和增长率、生产函数和齐次性、极限和稳态、凹性和边际产出递减、静态最优化、拉格朗日方法、包络定理和比较静态。后面读 Solow、Ramsey、OLG、内生增长和创新模型时，这些工具会不断出现。

本章写法有两个原则。第一，每个数学对象都先给经济含义，再给形式表达。第二，每个推导都尽量说明“为什么这一步有用”。如果你能把本章的符号翻译成经济语言，后面的高级模型会轻很多。

5.2　学习目标

学完本章，你应该能够：

1. 熟练使用增长模型中的时间下标、状态变量、控制变量和参数。
2. 理解为什么增长率常用对数差表示，并知道近似误差来自哪里。
3. 判断常见生产函数的齐次性、凹性和边际产出性质。
4. 会把一维线性化推广到向量、雅可比矩阵和特征值语言。
5. 从一阶条件和二阶条件理解静态最优化。
6. 使用拉格朗日方法解释约束优化中的影子价格。
7. 理解包络定理如何帮助做比较静态。

5.3　变量、参数与时间下标

增长模型首先是一套时间语言。一个变量如果随时间变化，就写成 X_t。例如 K_t 是 t 期资本存量，L_t 是劳动或人口，Y_t 是产出，A_t 是生产率。一个参数如果在模型中被当作固定环境，就通常不加时间下标，例如资本份额 α、折旧率 δ、储蓄率 s、人口增长率 n。

这种区分不是形式主义。若写 s，我们是在说储蓄率外生且固定；若写 s_t，就允许储蓄率随时间变化；若写 $s(k_t)$，则储蓄率由当前资本水平决定，可能产生非线性动态甚至发展陷阱。一个下标的差别，往往对应一个经济机制的差别。

增长模型里还有两个重要分类：状态变量和控制变量。状态变量描述“今天继承了什么”，例如资本 K_t、人力资本 H_t、技术水平 A_t。控制变量描述“今天选择什么”，例如消费 C_t、储蓄 S_t、投资 I_t、研发投入 R_t。在动态优化中，状态变量限制选择空间，控制变量决定未来状态。

表 5.1: 增长模型中常见符号

符号	常见含义	类型
Y_t	总产出	变量
K_t	资本存量	状态变量
L_t	劳动或人口	状态变量或外生过程
A_t	技术或全要素生产率	状态变量或外生过程
C_t	消费	控制变量
I_t	投资	控制变量
s	储蓄率	参数或政策变量
α	资本收入份额	参数
δ	折旧率	参数
n	人口或劳动增长率	参数或外生过程

表 5.1 只是起点。真正重要的是读模型时问：哪些变量由经济主体选择？哪些变量由历史给定？哪些参数决定稳态？哪些参数决定转移速度？一旦这些问题清楚，模型结构就不会只是一串公式。

5.4 对数与增长率

增长理论几乎离不开对数。原因有三点。第一，对数把乘法变成加法。若

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}, \tag{5.1}$$

取对数得到

$$\log Y_t = \log A_t + \alpha \log K_t + (1-\alpha)\log L_t. \tag{5.2}$$

这正是增长核算能够把产出增长拆成投入贡献和 residual 的原因。

第二，对数差近似增长率。设 X_t 从 X_t 变到 X_{t+1}，普通增长率为

$$g_{t+1} = \frac{X_{t+1} - X_t}{X_t}. \tag{5.3}$$

因为 $X_{t+1} = X_t(1 + g_{t+1})$，所以

$$\log X_{t+1} - \log X_t = \log(1 + g_{t+1}). \tag{5.4}$$

当 g 较小时，$\log(1+g) \approx g$。这个近似来自泰勒展开：

$$\log(1+g) = g - \frac{g^2}{2} + \frac{g^3}{3} - \cdots. \tag{5.5}$$

表 5.2: 普通增长率与对数增长率

普通增长率 g	$\log(1+g)$	近似误差 $g - \log(1+g)$	解释
1%	0.995%	0.005 个百分点	几乎相同
5%	4.879%	0.121 个百分点	近似很好
10%	9.531%	0.469 个百分点	仍可用但需注意
50%	40.547%	9.453 个百分点	近似明显变差

表 5.2 给出一个实用判断。宏观增长率通常在几个百分点，对数差近似普通增长率很方便；但当变量剧烈变化时，二者差距不能忽略。长期增长研究偏好对数差，还有第三个原因：对数增长率可以跨期相加。若 1980–2000 年对数增长为 a，2000–2024 年为 b，则 1980–2024 年对数增长就是 $a + b$。这使得长期分解和平均增长率计算更干净。

5.5 生产函数、齐次性与人均形式

增长模型最常用的生产函数是 Cobb-Douglas：

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{5.6}$$

这里 A 衡量生产率，K 和 L 是投入。指数 α 和 $1-\alpha$ 的和为 1，这意味着生产函数具有规模报酬不变。

定义 5.1 (齐次函数)**.** 如果函数 $F(K,L)$ 对任意 $\lambda>0$ 满足

$$F(\lambda K,\lambda L)=\lambda^m F(K,L), \tag{5.7}$$

则称 F 是 m 次齐次函数。若 $m=1$，称为一次齐次或规模报酬不变。

命题 5.1 (Cobb-Douglas 的规模报酬不变)**.** 若 $F(K,L)=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ 且 $0<\alpha<1$，则 F 对 (K,L) 一次齐次。

证明. 对任意 $\lambda>0$，

$$\begin{aligned} F(\lambda K,\lambda L) &= A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{1-\alpha} && (5.8)\\ &= A\lambda^{\alpha}K^{\alpha}\lambda^{1-\alpha}L^{1-\alpha} && (5.9)\\ &= \lambda AK^{\alpha}L^{1-\alpha} && (5.10)\\ &= \lambda F(K,L). && (5.11) \end{aligned}$$

因此 F 是一次齐次函数。 □

规模报酬不变的重要含义是可以把总量生产函数改写为人均形式。令 $y=Y/L$，$k=K/L$，则

$$\begin{aligned} y &= \frac{Y}{L}=\frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} && (5.12)\\ &= A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}=Ak^{\alpha}. && (5.13) \end{aligned}$$

这个变换看似简单，却是 Solow 模型的核心。它把两个投入变量 K,L 的问题压缩为一个人均资本变量 k 的问题，使动态分析可以画在一张相图上。

5.6　边际产出、凹性与 Inada 条件

边际产出表示多一单位投入带来多少额外产出。对人均生产函数

$$f(k)=Ak^{\alpha} \tag{5.14}$$

求导可得

$$f'(k)=\alpha Ak^{\alpha-1}, \tag{5.15}$$

再求导：

$$f''(k)=\alpha(\alpha-1)Ak^{\alpha-2}<0. \tag{5.16}$$

因为 $0<\alpha<1$，所以 $f''(k)<0$，函数是严格凹的。经济含义是资本边际产出递减：资本越多，再增加一单位资本带来的额外产出越少。

定义 5.2 (凹函数). 若对任意 x_1, x_2 和任意 $\theta \in [0,1]$，

$$f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \geq \theta f(x_1) + (1-\theta) f(x_2), \tag{5.17}$$

则 f 是凹函数。若不等号在 $x_1 \neq x_2$ 时严格成立，则称为严格凹函数。

在一维且二阶可导的情况下，$f''(k) < 0$ 是严格凹性的常用判据。凹性之所以重要，是因为它保证许多最优化问题有唯一内点解，也保证 Solow 模型有稳定的资本动态。

增长模型还常用 Inada 条件：

$$\lim_{k \to 0} f'(k) = \infty, \qquad \lim_{k \to \infty} f'(k) = 0. \tag{5.18}$$

对 $f(k) = Ak^{\alpha}$，这两个条件都成立。第一个条件说资本极少时边际产出极高；第二个条件说资本极多时边际产出趋近于零。它们帮助我们证明稳态存在，并排除一些边界异常。

5.7 极限、稳态与近似

增长模型经常问变量是否收敛到某个值。若

$$\lim_{t \to \infty} k_t = k^*, \tag{5.19}$$

则 k^* 是资本路径的长期极限。若动态方程为

$$k_{t+1} = G(k_t), \tag{5.20}$$

稳态满足

$$k^* = G(k^*). \tag{5.21}$$

连续时间下，若

$$\dot{k} = g(k), \tag{5.22}$$

稳态满足

$$g(k^*) = 0. \tag{5.23}$$

稳态不是“经济不再变化”，而是所选变量不再变化。若变量是有效劳动单位资本 $\tilde{k} = K/(AL)$，稳态 $\tilde{k}^*$ 不变并不意味着总资本 K 不增长。若 A 和 L 都在增长，总资本、总产出和人均产出仍可能沿平衡增长路径增长。

近似也是增长模型的日常语言。第 4 章的收敛速度推导已经用过线性化：在稳态附近，用函数的一阶泰勒展开替代原函数。一般地，若 G 在 x^* 附近可微，

$$G(x) \approx G(x^*) + G'(x^*)(x - x^*). \tag{5.24}$$

线性化牺牲全局精确性，换来局部动态的清晰表达。高级增长模型中，很多稳定性、相图和数值算法都从这一步开始。

5.8　向量、矩阵与雅可比：为二维动态做准备

到目前为止，我们大多把动态写成一个变量的方程，例如 $k_{t+1}=G(k_t)$ 或 $\dot{k}=g(k)$。但 Ramsey、OLG、内生增长和创新模型通常不止一个状态或控制变量。资本、消费、人力资本、知识存量、产品质量、部门就业份额可能同时变化。为了让这些模型不显得突然，本节提前把一维线性化推广到向量语言。

设经济状态由两个变量组成：

$$x(t)=\begin{pmatrix}k(t)\\ c(t)\end{pmatrix}. \tag{5.25}$$

如果动态系统写成

$$\dot{x}=F(x),\qquad F(x)=\begin{pmatrix}F_1(k,c)\\ F_2(k,c)\end{pmatrix}, \tag{5.26}$$

稳态 $x^*=(k^*,c^*)'$ 满足 $F(x^*)=0$。在稳态附近，令 $z=x-x^*$ 表示偏离量，一阶近似为

$$\dot{z}\approx J(x^*)z, \tag{5.27}$$

其中

$$J(x^*)=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial k} & \frac{\partial F_1}{\partial c}\\ \frac{\partial F_2}{\partial k} & \frac{\partial F_2}{\partial c}\end{pmatrix}_{(k^*,c^*)} \tag{5.28}$$

称为雅可比矩阵。它是多变量版本的导数：一维模型看 $g'(k^*)$，二维模型看 $J(x^*)$。

雅可比矩阵的经济含义很直接。第一行说明资本积累方程如何受资本和消费影响；第二行说明消费增长方程如何受资本和消费影响。若 $J_{12}<0$，意思是消费提高会降低资本积累；若 $J_{21}<0$，意思是资本提高可能通过降低边际产出而压低消费增长。一个矩阵把这些局部机制同时装进去。

线性系统的稳定性由特征值决定。若

$$\dot{z}=Jz, \tag{5.29}$$

可以把路径想象为若干个方向上的指数运动，特征值的实部决定这些方向是收敛还是发散。对一维连续时间模型，$g'(k^*)<0$ 表示稳定；对二维连续时间模型，若一个特征值为负、一个为正，稳态就是鞍点。Ramsey 模型正是这种情形：资本 k 是历史给定的状态变量，消费 c 是可以跳跃选择的控制变量，只有一条特定路径能通向稳态。

这一段不要求你现在会完整求特征值。你只需要记住学习顺序：先找稳态，再写雅可比矩阵，最后看特征值符号。第 6 章会把这套语言变成相图和鞍路径；第 7 章会说明为什么消费必须跳到那条路径上；第 8 章会把它放进一般均衡里。

5.9 静态最优化：一阶条件与二阶条件

最优化是增长模型的骨架。最简单的问题是无约束最大化：

$$\max_{x} f(x). \tag{5.30}$$

若最优解 x^* 位于内部且 f 可微，则一阶条件是

$$f'(x^*) = 0. \tag{5.31}$$

如果还满足 $f''(x^*) < 0$，则该点是局部最大值。若 f 是严格凹函数，则一阶条件不仅必要，而且充分，最优解唯一。

一个增长经济学中常见的静态问题是企业选择资本，使利润最大：

$$\max_{k>0} \ \pi(k) = Ak^{\alpha} - (r+\delta)k. \tag{5.32}$$

一阶条件为

$$\alpha A k^{\alpha-1} = r + \delta. \tag{5.33}$$

左边是资本边际产出，右边是资本使用成本。最优资本满足边际收益等于边际成本。

由 (5.33) 得

$$k^* = \left(\frac{\alpha A}{r+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{5.34}$$

例如 $A = 1$，$\alpha = 1/3$，$r + \delta = 0.10$，则

$$k^* = \left(\frac{1/3}{0.10} \right)^{3/2} \approx 6.09. \tag{5.35}$$

如果资本使用成本上升，最优资本下降；如果生产率 A 上升，最优资本上升。这就是比较静态。

5.10 约束优化与拉格朗日方法

经济主体通常面对约束。家庭不能消费超过预算，企业不能使用不存在的资源，政府不能同时满足所有支出需求。约束优化的一般形式是

$$\max_{x,y} \ f(x,y) \quad \text{s.t.} \quad g(x,y) = b. \tag{5.36}$$

拉格朗日函数为

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda[b - g(x,y)]. \tag{5.37}$$

一阶条件为

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 0, \tag{5.38}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = 0, \tag{5.39}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = b - g(x,y) = 0. \tag{5.40}$$

乘子 λ 的经济含义是约束右侧资源 b 的影子价值：多一单位资源能提高多少目标值。

用一个两期消费例子看这个方法。家庭有财富 W，选择今天消费 c_1 和明天消费 c_2：

$$\max_{c_1,c_2} \; u(c_1) + \beta u(c_2) \quad \text{s.t.} \quad c_1 + \frac{c_2}{1+r} = W. \tag{5.41}$$

拉格朗日函数为

$$\mathcal{L} = u(c_1) + \beta u(c_2) + \lambda \left(W - c_1 - \frac{c_2}{1+r} \right). \tag{5.42}$$

一阶条件为

$$u'(c_1) = \lambda, \tag{5.43}$$

$$\beta u'(c_2) = \frac{\lambda}{1+r}. \tag{5.44}$$

消去 λ，得到

$$u'(c_1) = \beta(1+r)u'(c_2). \tag{5.45}$$

式 (5.45) 是 Euler 方程的静态预告。它说，最优消费路径会让今天消费的边际效用等于把一单位资源推迟到明天后的贴现边际效用。Ramsey 模型中的 Euler 方程就是这个逻辑的动态版本。

5.11　一个完整数值例子

设 $u(c) = \log c$，$\beta = 0.96$，$r = 0.04$，$W = 100$。Euler 方程变为

$$\frac{1}{c_1} = \beta(1+r)\frac{1}{c_2}. \tag{5.46}$$

因此

$$c_2 = \beta(1+r)c_1 = 0.9984 c_1. \tag{5.47}$$

预算约束为

$$c_1 + \frac{c_2}{1.04} = 100. \tag{5.48}$$

代入可得

$$c_1 + \frac{0.9984 c_1}{1.04} = 100, \qquad c_1 \approx 50.04, \tag{5.49}$$

于是

$$c_2 \approx 49.96. \tag{5.50}$$

这个例子说明，当 $\beta(1+r)$ 接近 1 时，家庭倾向于平滑两期消费。若利率更高，推迟消费更有吸引力；若耐心程度 β 更低，今天消费更有吸引力。后面 Ramsey 模型会把这个两期逻辑推广到无限期。

5.12 包络定理与比较静态

比较静态问的是参数变化如何改变最优值或最优选择。直接求最优选择的导数有时很麻烦，包络定理告诉我们：若只关心最优值对参数的变化，可以先忽略最优选择随参数变化的间接效应。

设值函数为

$$V(a) = \max_{x} f(x, a), \tag{5.51}$$

且内部最优解为 $x^*(a)$。则

$$V(a) = f(x^*(a), a). \tag{5.52}$$

对 a 求导：

$$V'(a) = f_x(x^*(a), a)\frac{dx^*(a)}{da} + f_a(x^*(a), a). \tag{5.53}$$

由于内部最优的一阶条件给出 $f_x(x^*(a), a) = 0$，所以

$$V'(a) = f_a(x^*(a), a). \tag{5.54}$$

命题 5.2 (包络定理的基本形式)**.** *若 $x^*(a)$ 是内部最优解，且 f 足够光滑，则值函数 $V(a) = f(x^*(a), a)$ 满足*

$$V'(a) = \left.\frac{\partial f(x, a)}{\partial a}\right|_{x = x^*(a)}. \tag{5.55}$$

证明. 由 $V(a) = f(x^*(a), a)$，链式法则给出

$$V'(a) = f_x(x^*(a), a)x^{*\prime}(a) + f_a(x^*(a), a). \tag{5.56}$$

内部最优解满足一阶条件 $f_x(x^*(a), a) = 0$。代入上式即可得到结论。 □

包络定理在动态规划中极其重要。Bellman 方程的值函数导数通常可以用当前回报和约束的边际效应表示，而不用每次都求出完整政策函数的导数。这是第 7 章动态优化和后面 Ramsey 模型的技术基础。

表 5.3: 增长模型中的符号翻译

数学表达	经济含义
$\Delta \log y_t$	近似人均产出增长率
$f'(k) > 0$	更多资本提高产出
$f''(k) < 0$	资本边际产出递减
$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$	规模报酬不变
$\dot{k} = 0$	资本变量处于稳态
$J(x^*)$	多变量动态系统在稳态附近的局部导数矩阵
$u'(c_1) = \beta(1+r)u'(c_2)$	跨期消费边际收益相等
λ	约束资源的影子价值
$V'(a) = f_a(x^*, a)$	参数对最优值的直接边际效应

5.13　符号翻译：从数学到经济学

数学表达只有能翻译回经济含义才有用。表 5.3 总结本章几个常见表达。

读高级模型时，最有效的习惯是先做这种翻译。不要急着计算每个符号，而要先问：目标函数是什么？选择变量是什么？约束是什么？一阶条件在比较哪两个边际量？稳态条件把哪两个流量相等？只要这些问题清楚，模型就会从“公式堆”变成一套经济叙述。

5.14　中国与发展延伸

数学语言也会影响我们如何讨论中国和发展问题。比如说“中国投资率高”，这只是一个事实陈述；若写成 s 高，我们就自然追问：它提高的是稳态资本 k^*，还是改变了转移速度？若说“资本效率下降”，可以翻译为 $f'(k)$ 下降、A 增长放慢，或资源错配使可观测资本没有转化为有效资本。不同翻译对应不同机制。

再比如地区差距。若把省份写成 i，年份写成 t，人均收入写成 y_{it}，我们就可以区分水平差距、增长率差距和稳态差距。若写

$$\Delta \log y_{it} = \beta_0 + \beta_1 \log y_{i,t-1} + \gamma X_{it} + \varepsilon_{it}, \tag{5.57}$$

问题就从“哪个省发展快”变成“在控制产业结构、人力资本、基础设施和开放程度后，低收入省份是否增长更快”。这正是数学语言的价值：它迫使叙述变得可比较、可检验、可反驳。

因此，本书后面的中国章节不会只用“改革”“开放”“投资”“产业升级”这些词，而会尽量把它们放入模型语言中。资本深化对应 k，生产率对应 A，结构转型对应部门份额和再配置，资源错配对应楔子，创新对应知识生产或质量阶梯。数学不是替代历史，而是让历史机制更清晰。

5.15 本章 Review

读完本章后，你应该能做出以下判断。

第一，你应该能解释为什么增长率常用对数差表示，以及什么时候这个近似会变差。

第二，你应该能从 Cobb-Douglas 生产函数推出人均形式，并说明规模报酬不变为什么重要。

第三，你应该能用一阶和二阶导数解释边际产出递减、凹性和唯一最优解。

第四，你应该能写出一个约束优化问题的拉格朗日函数，并解释乘子的经济含义。

第五，你应该能从两期消费问题推出 Euler 方程的基本形式，并理解它为什么会在 Ramsey 模型中反复出现。

第六，你应该能说明包络定理的核心直觉：在最优点，选择变量的微小调整对目标值的一阶影响为零，所以参数变化对最优值的影响只需要看直接效应。

5.16 核心文献

本章是工具章，最重要的不是某一篇论文，而是掌握后续模型会反复使用的数学语言。若需要系统补充，可参考 [Simon and Blume, 1994] 的最优化和动态部分、[Sundaram, 1996] 的优化理论，以及 [Stokey et al., 1989] 关于动态规划和递归方法的基础章节。增长教材中，[Acemoglu, 2009] 和 [Barro and Sala-i Martin, 2004] 的前置数学和模型附录也适合作为对照阅读。

第六章　差分方程、微分方程与相图

6.1　本章导读

增长理论不是只比较两个静态状态，而是研究一个经济体如何从今天走向明天。资本今天多一点，明天的产出会变；储蓄今天高一点，未来资本会变；技术扩散今天快一点，未来与前沿国家的差距会变。只要问题里出现“路径”“调整”“收敛”“陷阱”“转移动态”，我们就已经进入动态系统。

上一章已经介绍了稳态和线性化。本章把这些工具系统化。我们先从离散时间差分方程开始，因为许多数据按年、季度或代际记录；再进入连续时间微分方程，因为 Solow、Ramsey 和很多研究生增长模型喜欢用连续时间表达。随后我们学习相图。相图不是装饰图，而是一种把动态方程翻译成经济直觉的方法：在哪些区域变量上升，在哪些区域变量下降，哪个稳态稳定，哪个稳态不稳定，经济体会沿什么方向移动。

本章仍然坚持一个原则：每个数学对象都要能翻译成经济语言。差分方程不是抽象递推式，而是“下一期由这一期决定”；微分方程不是符号游戏，而是“瞬时变化率由当前状态决定”；相图不是画线，而是把资本积累、折旧、人口增长、技术进步和消费选择放在同一个动态空间里看。

6.2　学习目标

学完本章，你应该能够：

1. 区分离散时间和连续时间动态，并知道二者在经济增长模型中的使用场景。
2. 求解一阶线性差分方程，并判断稳态是否稳定。
3. 用线性化方法判断非线性差分方程和微分方程的局部稳定性。
4. 读懂一维相图，解释变量为什么向某个稳态移动。
5. 用 Solow 型资本动态理解稳态、转移动态和收敛速度。
6. 用真实收入差距数据理解动态系统语言在经验事实中的作用。

6.3 为什么增长模型必须是动态的

如果一个模型只告诉我们“高储蓄率国家有更高资本”，它还不是完整的增长模型。增长理论真正关心的是：资本如何积累到那个水平？如果储蓄率今天上升，产出是立刻跳到新水平，还是慢慢过渡？如果一个经济体低于稳态，它增长更快的原因是什么？如果存在两个稳态，为什么某些国家会被吸在低水平均衡附近？

这些问题都不能靠一个静态方程回答。考虑最简单的资本积累式：

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t. \tag{6.1}$$

它的经济含义很朴素：下一期资本等于没有折旧掉的旧资本，加上本期投资。但这条式子已经包含动态性。今天的投资不是只影响今天，它进入明天的状态变量 K_{t+1}；而明天的资本又会影响后天的产出和投资。

增长模型中的“历史”通常就体现在状态变量里。资本、技术、人力资本、城市化水平、产业结构、企业能力、制度质量，都可能带有历史惯性。动态系统的任务就是把这种惯性写清楚。

6.4 离散时间：一阶差分方程

离散时间模型把时间写成 $t = 0, 1, 2, \ldots$。最简单的一阶差分方程是

$$x_{t+1} = G(x_t). \tag{6.2}$$

这里 x_t 是状态变量，G 是转移函数。若 x_t 是人均资本，$G(x_t)$ 就告诉我们给定今天的人均资本，明天的人均资本是多少。

定义 6.1 (离散时间稳态). *对动态系统 $x_{t+1} = G(x_t)$，若某个 x^* 满足*

$$x^* = G(x^*), \tag{6.3}$$

则称 x^* 为稳态或不动点。

稳态的含义不是“什么都不发生”，而是“在这个变量的度量下不再变化”。如果 x_t 是有效劳动单位资本，x_t 不变仍然允许总资本、总产出和人均产出沿平衡增长路径增长。

6.5 线性差分方程：最清楚的起点

先看一阶线性差分方程：

$$x_{t+1} = ax_t + b. \tag{6.4}$$

若 $a \neq 1$，稳态满足

$$x^* = ax^* + b, \qquad x^* = \frac{b}{1-a}. \tag{6.5}$$

把 x^* 从两边减掉，可以得到偏离稳态的动态：

$$x_{t+1} - x^* = ax_t + b - x^* \tag{6.6}$$

$$= ax_t + b - (ax^* + b) \tag{6.7}$$

$$= a(x_t - x^*). \tag{6.8}$$

因此

$$x_t - x^* = a^t(x_0 - x^*). \tag{6.9}$$

命题 6.1 (一阶线性差分方程的稳定性). *考虑 $x_{t+1} = ax_t + b$，其中 $a \neq 1$。其稳态为 $x^* = b/(1-a)$。若 $|a| < 1$，则对任意初始值 x_0，$x_t \to x^*$；若 $|a| > 1$ 且 $x_0 \neq x^*$，则 $|x_t - x^*|$ 发散。*

证明. 由 (6.9)，偏离稳态的距离为

$$|x_t - x^*| = |a|^t |x_0 - x^*|. \tag{6.10}$$

若 $|a| < 1$，则 $|a|^t \to 0$，所以 $|x_t - x^*| \to 0$，即 $x_t \to x^*$。若 $|a| > 1$ 且 $x_0 \neq x^*$，则 $|a|^t \to \infty$，所以偏离稳态的距离发散。命题得证。 □

这个命题很短，但它是后面所有局部稳定性分析的原型。高维、非线性、带控制变量的增长模型会复杂得多，但研究生增长课里大量稳定性判断都在问同一个问题：偏离稳态后，系统会被拉回来，还是越走越远？

表 6.1: 三个离散动态例子：同一个稳态，不同调整方式

t	$x_{t+1} = 10 + 0.6(x_t - 10)$	$x_{t+1} = 10 - 0.6(x_t - 10)$	$x_{t+1} = 10 + 1.1(x_t - 10)$
0	1.00	1.00	1.00
1	4.60	15.40	0.10
2	6.76	6.76	-10.89
3	8.06	11.94	-33.98
4	8.83	8.83	-82.38
5	9.30	10.70	-184.99

表 6.1 的三个例子都有同一个稳态 $x^* = 10$，但动态完全不同。第一列单调收敛，第二列在稳态两侧来回摆动但振幅缩小，第三列偏离稳态越来越远。增长经济学里，“稳态是多少”和“能不能到稳态”是两个不同问题。一个稳态可以存在，但不稳定；一个经济体也可能因为初始条件、预期或政策反应而走向不同稳态。

6.6 非线性差分方程与局部稳定性

增长模型通常不是线性的。比如资本动态可能是

$$k_{t+1} = sAk_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{6.11}$$

右边包含 k_t^{α}，所以不能直接使用线性差分方程的全局解。但在稳态附近，我们可以线性化。

设 $x^* = G(x^*)$，且 G 在 x^* 附近可微。泰勒展开给出

$$G(x_t) \approx G(x^*) + G'(x^*)(x_t - x^*). \tag{6.12}$$

因此

$$x_{t+1} - x^* \approx G'(x^*)(x_t - x^*). \tag{6.13}$$

命题 6.2 (一维非线性差分方程的局部稳定性). *考虑 $x_{t+1} = G(x_t)$。设 x^* 是稳态，且 G 在 x^* 附近连续可微。若*

$$|G'(x^*)| < 1, \tag{6.14}$$

则 x^* 局部稳定；若

$$|G'(x^*)| > 1, \tag{6.15}$$

则 x^* 局部不稳定。

证明. 令 $z_t = x_t - x^*$。由一阶泰勒展开，

$$z_{t+1} = G'(x^*)z_t + r(z_t), \tag{6.16}$$

其中 $r(z_t)/z_t \to 0$ 当 $z_t \to 0$。若 $|G'(x^*)| < 1$，则可取足够小的邻域，使得在该邻域内

$$|z_{t+1}| \le q|z_t| \tag{6.17}$$

对某个 $q < 1$ 成立。于是偏离稳态的距离按比例缩小，路径收敛到 x^*。若 $|G'(x^*)| > 1$，则在足够小的邻域内，偏离稳态的距离会被放大，除非初始值恰好等于稳态，否则路径离开该邻域。因此稳态局部不稳定。 □

注意这里说的是“局部”。局部稳定只保证足够接近稳态时会回到稳态，不保证从所有初始条件都会收敛。发展陷阱、多重均衡和非凸性问题正是因为全局动态可能比局部动态复杂得多。

6.7　连续时间：微分方程

连续时间模型把时间看成连续变量 $t \geq 0$，状态变量写成 $x(t)$，变化率写成

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}. \tag{6.18}$$

最基本的一维连续时间动态系统是

$$\dot{x} = g(x). \tag{6.19}$$

稳态满足

$$g(x^*) = 0. \tag{6.20}$$

连续时间的好处是许多表达更简洁。比如资本积累可以写成

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t). \tag{6.21}$$

这表示资本存量的瞬时变化等于投资减折旧。若劳动以速度 n 增长，$L(t) = L(0)e^{nt}$，则人均资本 $k = K/L$ 的变化率为

$$\dot{k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) \tag{6.22}$$

$$= \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} \tag{6.23}$$

$$= \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L}\frac{\dot{L}}{L} \tag{6.24}$$

$$= \frac{I - \delta K}{L} - nk. \tag{6.25}$$

若 $I = sY = sLF(k)$，其中 $f(k) = Y/L$，则

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k. \tag{6.26}$$

这就是 Solow 模型相图的核心方程。第 9 章会系统分析它；本章先把它作为动态系统例子。

6.8　连续时间的线性化

连续时间中最简单的稳定动态是

$$\dot{x} = -\lambda(x - x^*), \qquad \lambda > 0. \tag{6.27}$$

它的解为

$$x(t) - x^* = e^{-\lambda t}(x(0) - x^*). \tag{6.28}$$

因为 $e^{-\lambda t} \to 0$，所以 $x(t) \to x^*$。参数 λ 越大，收敛越快。

对一般非线性系统 $\dot{x} = g(x)$，在稳态附近线性化：

$$\dot{x} \approx g'(x^*)(x - x^*). \tag{6.29}$$

因此一维连续时间稳定性的判据是 $g'(x^*) < 0$。

命题 6.3 (一维连续时间系统的局部稳定性). *考虑 $\dot{x} = g(x)$。设 x^* 是稳态，且 g 在 x^* 附近连续可微。若*

$$g'(x^*) < 0, \tag{6.30}$$

则 x^* 局部稳定；若 $g'(x^*) > 0$，则 x^* 局部不稳定。

证明. 令 $z = x - x^*$。在稳态附近，

$$\dot{z} = g'(x^*)z + o(z). \tag{6.31}$$

忽略高阶项时，线性化系统为

$$\dot{z} = g'(x^*)z, \tag{6.32}$$

其解为

$$z(t) = e^{g'(x^*)t} z(0). \tag{6.33}$$

若 $g'(x^*) < 0$，指数项随时间趋于零，偏离稳态的距离收缩。若 $g'(x^*) > 0$，指数项随时间增大，偏离稳态的距离扩大。高阶项在足够小的邻域内不改变这一局部结论。 □

离散时间和连续时间的稳定性条件看起来不同：一个是 $|G'(x^*)| < 1$，一个是 $g'(x^*) < 0$。原因是离散时间每期“跳一次”，跳得过头会产生振荡；连续时间沿着方向场连续移动，一维系统中只要左边向右、右边向左，就会被推回稳态。

6.9 相图的基本读法

相图把动态方程画出来。对一维连续时间系统

$$\dot{x} = g(x), \tag{6.34}$$

横轴是 x，我们只需要判断每个区域中 $g(x)$ 的符号：

$$g(x) > 0 \Rightarrow \dot{x} > 0 \Rightarrow x \text{ 上升}, \tag{6.35}$$

$$g(x) < 0 \Rightarrow \dot{x} < 0 \Rightarrow x \text{ 下降}. \tag{6.36}$$

稳态是 $g(x) = 0$ 的点。若稳态左边 $\dot{x} > 0$、右边 $\dot{x} < 0$，路径从两侧都向它移动，它就是稳定稳态。若稳态左边 $\dot{x} < 0$、右边 $\dot{x} > 0$，路径从两侧都离开它，它就是不稳定稳态。

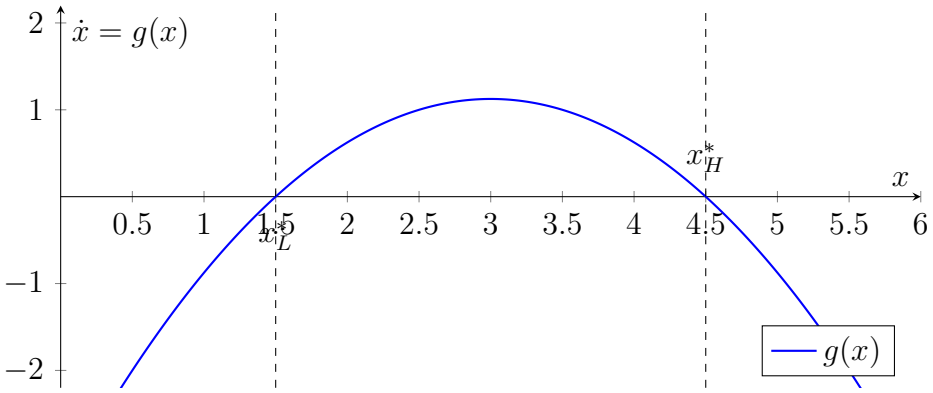

图 6.1: 一维相图：低稳态不稳定，高稳态稳定

图 6.1 展示了一个有两个稳态的系统。x_L^* 左边 $g(x) < 0$，右边 $g(x) > 0$，所以路径会离开它；x_H^* 左边 $g(x) > 0$，右边 $g(x) < 0$，所以路径会靠近它。这种结构可以用来理解阈值、临界点和俱乐部收敛：只要经济体越过某个门槛，就可能走向高稳态；如果没有越过，就可能向低水平区域退回。

6.10　Solow 型相图：资本积累与稳态

现在把相图放回增长模型。设人均产出为

$$y = f(k) = Ak^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{6.37}$$

储蓄率为 s，人口增长率为 n，折旧率为 δ。连续时间人均资本动态为

$$\dot{k} = sAk^{\alpha} - (n + \delta)k. \tag{6.38}$$

右边第一项是人均投资，第二项是维持人均资本不变所需的投资。稳态满足

$$sAk^{\alpha} = (n + \delta)k. \tag{6.39}$$

若 $k > 0$，则

$$k^* = \left(\frac{sA}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{6.40}$$

图 6.2 使用参数 $A = 1$、$\alpha = 1/3$、$s = 0.30$、$n + \delta = 0.10$。当 $k < k^*$ 时，$sAk^{\alpha} > (n + \delta)k$，所以 $\dot{k} > 0$，人均资本上升；当 $k > k^*$ 时，$sAk^{\alpha} < (n + \delta)k$，所以 $\dot{k} < 0$，人均资本下降。资本边际产出递减保证了投资曲线逐渐变平，而维持投资线是直线，二者只在一个正点相交。

命题 6.4 (Cobb-Douglas Solow 型动态的唯一稳定正稳态). *设 $f(k) = Ak^{\alpha}$，其中 $A > 0$、$0 < \alpha < 1$，且 $s > 0$、$n + \delta > 0$。动态系统*

$$\dot{k} = sAk^{\alpha} - (n + \delta)k \tag{6.41}$$

存在唯一正稳态 k^*，由 (6.40) 给出；该稳态局部稳定。

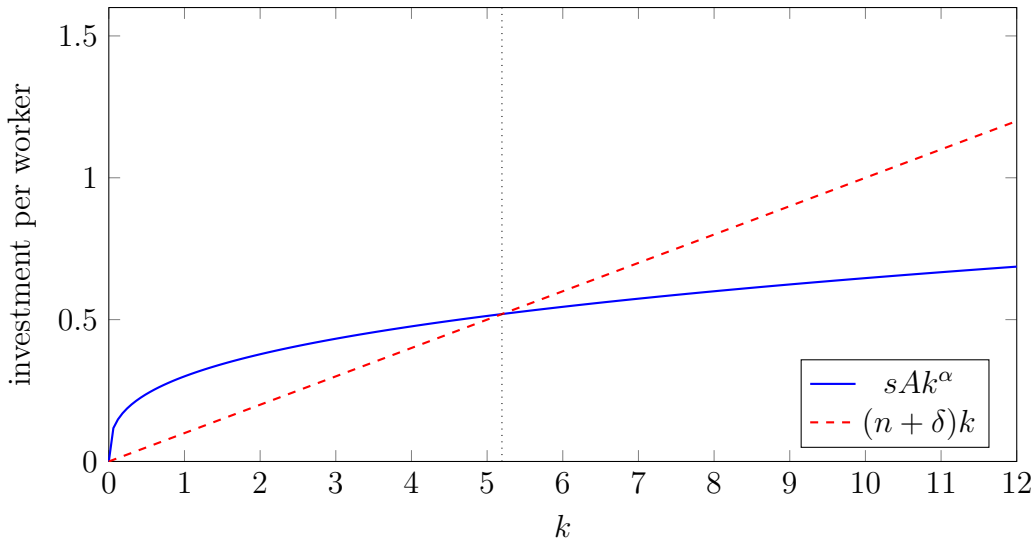

图 6.2: Solow 型相图：投资曲线与维持投资线

证明. 正稳态满足

$$sAk^\alpha = (n+\delta)k. \tag{6.42}$$

因为 $k>0$，两边除以 k^α 得

$$sA = (n+\delta)k^{1-\alpha}, \tag{6.43}$$

从而

$$k^* = \left(\frac{sA}{n+\delta}\right)^{1/(1-\alpha)}. \tag{6.44}$$

唯一性来自函数 $k^{1-\alpha}$ 在 $k>0$ 上严格递增。

定义

$$g(k) = sAk^\alpha - (n+\delta)k. \tag{6.45}$$

则

$$g'(k) = sA\alpha k^{\alpha-1} - (n+\delta). \tag{6.46}$$

在稳态处，由 $sA(k^*)^{\alpha-1} = n+\delta$，可得

$$g'(k^*) = \alpha(n+\delta) - (n+\delta) = -(1-\alpha)(n+\delta) < 0. \tag{6.47}$$

根据一维连续时间局部稳定性判据，k^* 局部稳定。 □

这个证明把第 4 章的收敛速度直觉重新放进相图中。局部线性化给出

$$\dot{k} \approx -(1-\alpha)(n+\delta)(k-k^*). \tag{6.48}$$

所以偏离稳态的速度由

$$\lambda = (1-\alpha)(n+\delta) \tag{6.49}$$

控制。α 越高，资本边际产出递减越弱，调整越慢；$n+\delta$ 越高，维持资本所需投资越多，偏离稳态的调整越快。加入劳动增进型技术进步后，$n+\delta$ 会变为 $n+g+\delta$。

6.11　转移动态：从低资本到高资本

相图最有用的地方，是帮助我们理解转移动态。设初始资本 $k_0 < k^*$。此时人均投资超过维持投资，所以资本上升。但随着 k 增加，边际产出下降，投资曲线变平，$\dot{k}$ 逐渐变小。因此经济体接近稳态时增长放慢。

这句话是 Solow 模型解释追赶增长的核心。低资本经济体如果有足够高的储蓄率、稳定的制度环境和可吸收的技术，可能因为资本稀缺而增长很快；但这种快增长不是永久的。当资本深化推进后，边际收益下降，增长自然放缓。中国、韩国等东亚经济体的高速增长阶段，经常可以用这一层动态直觉做第一步解释；但它不能替代对技术扩散、人力资本、产业升级和制度变化的分析。

表 6.2: Solow 型动态的数值路径示例

t	k_t	$y_t = k_t^{1/3}$	$\dot{k}_t = 0.30k_t^{1/3} - 0.10k_t$
0	1.00	1.00	0.200
1	1.20	1.06	0.198
2	1.40	1.12	0.195
3	1.59	1.17	0.192
4	1.79	1.21	0.184
5	1.97	1.25	0.178
10	2.80	1.41	0.143
20	3.93	1.58	0.081
30	4.54	1.66	0.043
40	4.86	1.69	0.022

表 6.2 用一个简单的 Euler 离散近似展示转移路径。稳态约为 $k^* = 5.20$。从 $k_0 = 1$ 出发时，资本增长较快；随着资本接近稳态，$\dot{k}$ 变小。这里的数值不是为了校准某个真实国家，而是为了训练数量直觉：增长率下降不一定意味着机制突然失效，也可能是同一资本深化机制在接近稳态时自然变弱。

6.12　数据例子：收入差距也可以看成动态变量

动态系统不只用于理论模型，也可以组织经验事实。令

$$z_{i,t} = \log y_{\mathrm{US},t} - \log y_{i,t}, \tag{6.50}$$

表示国家 i 与美国之间的人均 GDP 对数差距。若 $z_{i,t}$ 下降，说明该国相对美国在追赶；若 $z_{i,t}$ 上升，说明差距扩大。这个变量不是模型本身，但它把“追赶”变成了一条可观察的动态路径。

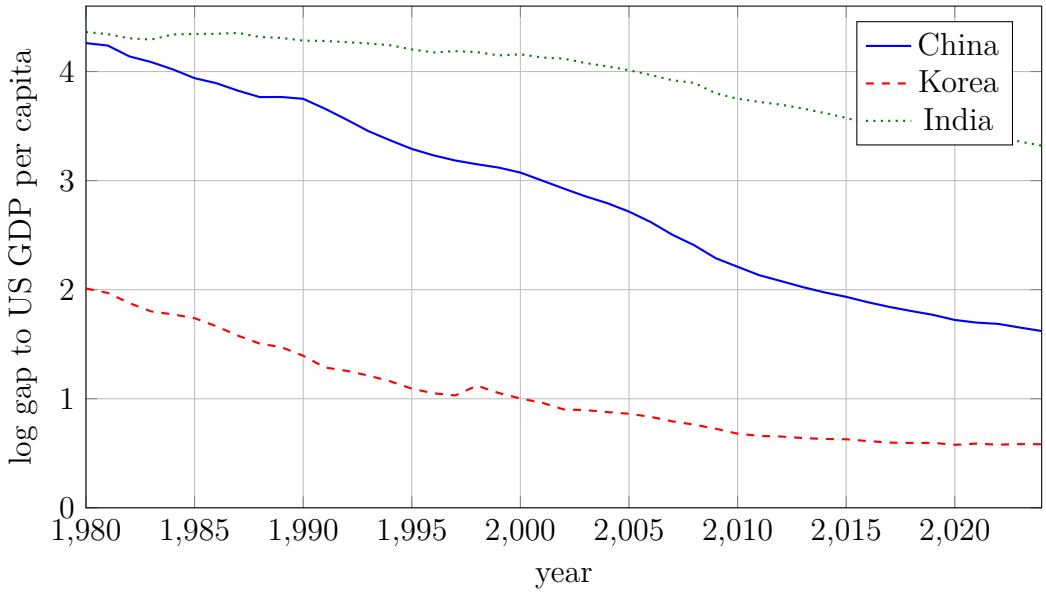

图 6.3: 相对美国的人均 GDP 对数差距，1980–2024

图 6.3 使用世界银行不变价人均 GDP 数据。1980 年，中国与美国的对数差距约为 $\log(30930) - \log(437) \approx 4.26$，韩国约为 2.01，印度约为 4.36。到 2024 年，中国差距降至约 1.62，韩国降至约 0.58，印度仍约 3.32。这张图本身不证明某个增长模型正确，但它告诉我们模型要解释的动态事实是什么：为什么有些差距快速收缩，有些差距缓慢收缩，为什么收缩速度会随阶段变化。

如果用一个非常简化的差距动态来描述追赶：

$$z_{t+1} = \rho z_t, \qquad 0 < \rho < 1, \tag{6.51}$$

那么 ρ 越小，差距收缩越快。现实世界当然不会这么简单。差距变化同时受资本积累、技术扩散、产业结构、人口、开放、制度和周期冲击影响。但这个简化式有助于把经验图像和理论语言连接起来：增长理论关心的不是某一年增长率高低，而是差距动态背后的持久机制。

6.13 从一维到二维：为什么 Ramsey 模型需要相图

Solow 型动态只有一个状态变量 k，储蓄率外生给定，所以一维相图已经足够。Ramsey 模型会更复杂，因为家庭选择消费，储蓄率不再外生。典型 Ramsey 系统有两个核心变量：资本 k 和消费 c。它的相图通常由两条曲线构成：

$$\dot{k} = 0, \qquad \dot{c} = 0. \tag{6.52}$$

第一条曲线告诉我们资本何时不变，第二条曲线告诉我们消费何时不变。两条曲线交点是稳态。

二维相图的读法和一维相图一样，核心仍是符号判断。若某个区域中 $\dot{k}>0$，则路径向右移动；若 $\dot{k}<0$，则路径向左移动；若 $\dot{c}>0$，则路径向上移动；若 $\dot{c}<0$，则路径向下移动。把四个方向合起来，就能看出经济体在 (k,c) 平面中的运动方向。

研究生增长课里还会出现“鞍路径稳定”。这意味着稳态附近只有一条特定路径能收敛到稳态，其他路径会发散或违反可行性。直觉上，资本是状态变量，今天给定；消费是跳跃变量，可以立刻选择。为了走向长期稳态，消费必须一开始就选在正确路径上。这就是 Ramsey 模型比 Solow 模型更深的地方：动态不仅来自资本积累，也来自跨期最优选择。

6.14　二维线性化、特征值与鞍路径

现在把第 5 章的雅可比语言接到相图上。考虑一个二维连续时间系统：

$$\dot{x}=F(x,y), \tag{6.53}$$

$$\dot{y}=G(x,y). \tag{6.54}$$

稳态 (x^*,y^*) 满足 $F(x^*,y^*)=0$ 且 $G(x^*,y^*)=0$。在稳态附近，令

$$z=\begin{pmatrix}x-x^*\\ y-y^*\end{pmatrix}, \tag{6.55}$$

一阶泰勒展开给出

$$\dot{z}\approx Jz,\qquad J=\begin{pmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{pmatrix}_{(x^*,y^*)}. \tag{6.56}$$

这里的 J 把相图中的局部箭头浓缩成一个矩阵。F_x 告诉我们 x 增加如何影响 $\dot{x}$，F_y 告诉我们 y 增加如何影响 $\dot{x}$；第二行同理。

二维线性系统的特征值由

$$\lambda^2-\tau\lambda+\Delta=0 \tag{6.57}$$

决定，其中

$$\tau=\operatorname{tr}(J)=J_{11}+J_{22},\qquad \Delta=\det(J)=J_{11}J_{22}-J_{12}J_{21}. \tag{6.58}$$

最常用的判断是表 6.3。

这个表不替代相图，而是解释相图为什么成立。若 $\Delta<0$，两个特征值符号相反，一个方向把路径拉向稳态，另一个方向把路径推离稳态。若系统里有一个状态变量和

表 6.3: 二维连续时间系统的局部稳定性判断

条件	特征值含义	经济解释
$\Delta < 0$	一正一负	鞍点，只有一条稳定方向
$\Delta > 0,\ \tau < 0$	实部为负	局部稳定，附近路径收敛
$\Delta > 0,\ \tau > 0$	实部为正	局部不稳定，附近路径发散

一个跳跃变量，经济体可以通过选择跳跃变量落在稳定方向上；这条稳定方向就是鞍路径。

以一个无人口增长的 Ramsey 型系统为例：

$$\dot{k} = f(k) - c - \delta k, \tag{6.59}$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{f'(k) - \delta - \rho}{\theta}. \tag{6.60}$$

稳态满足

$$f'(k^*) = \rho + \delta, \qquad c^* = f(k^*) - \delta k^*. \tag{6.61}$$

把 (6.60) 写成

$$\dot{c} = c\frac{f'(k) - \delta - \rho}{\theta}, \tag{6.62}$$

在稳态处的雅可比矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} f'(k^*) - \delta & -1 \\ \frac{c^*}{\theta} f''(k^*) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & -1 \\ \frac{c^*}{\theta} f''(k^*) & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.63}$$

因为 $f''(k^*) < 0$，所以

$$\Delta = \det(J) = \frac{c^*}{\theta} f''(k^*) < 0. \tag{6.64}$$

命题 6.5 (凹生产函数下 Ramsey 型稳态是鞍点). 设 $f'(k) > 0$、$f''(k) < 0$、$c^* > 0$、$\theta > 0$，且稳态满足 $f'(k^*) = \rho + \delta$。则系统 (6.59)–(6.60) 在稳态附近具有一个稳定方向和一个不稳定方向。

证明. 由 (6.63)，稳态处雅可比矩阵的行列式为

$$\Delta = \frac{c^*}{\theta} f''(k^*). \tag{6.65}$$

由于 $c^* > 0$、$\theta > 0$ 且 $f''(k^*) < 0$，有 $\Delta < 0$。二维线性系统的两个特征值乘积等于 Δ，因此两个特征值符号相反。一个特征值为负，对应收敛方向；另一个特征值为正，对应发散方向。故该稳态是鞍点。 □

这就是研究生增长课中“鞍路径稳定”的精确定义。它不是说经济会自动从任意点收敛到稳态，而是说在给定初始资本 k_0 时，只有一个合适的初始消费 c_0 能让路径收敛。若 c_0 太高，资本会被吃掉，路径最终不可行；若 c_0 太低，经济会过度积累，违反横截条件。第 7 章会用动态优化说明为什么最优选择正好落在这条路径上。

6.15 离散与连续：什么时候用哪一种

离散时间和连续时间不是高低之分，而是建模语言不同。离散时间适合代际模型、年度数据、季度数据和计算机模拟。Diamond OLG 模型通常用离散时间，因为一代人年轻、下一期变老；很多量化模型也用离散时间，因为数值迭代更自然。

连续时间适合推导简洁的增长理论，尤其是 Ramsey、AK、Romer、Schumpeterian 增长模型。连续时间中的 Hamiltonian、Euler 方程和相图往往更漂亮，也更容易看清平衡增长路径的结构。但连续时间不是“更真实”，只是更适合某些理论问题。

在学习上，最好掌握两种语言之间的翻译。离散时间中的

$$x_{t+1} - x_t \tag{6.66}$$

对应连续时间中的

$$\dot{x}(t). \tag{6.67}$$

离散时间中的增长因子

$$\frac{x_{t+1}}{x_t} \tag{6.68}$$

对应连续时间中的瞬时增长率

$$\frac{\dot{x}}{x}. \tag{6.69}$$

离散时间的稳定性看 $|G'(x^*)|$，连续时间看 $g'(x^*)$ 的符号。掌握这些翻译后，读不同教材会轻松很多。

6.16 中国与发展延伸：动态系统如何帮助解释转型

中国增长经验特别适合用动态系统语言来整理，但不能被一个单一动态方程完全解释。改革开放初期，中国处在低人均资本、低城市化、低工业化但高潜在投资回报的状态。若用 Solow 型语言说，这意味着 k_0 远低于某个高稳态，资本深化可以带来很强的转移增长。若用结构转型语言说，劳动力从低生产率农业转向工业和服务业，会提高总劳动生产率。若用技术扩散语言说，对外开放和产业学习使 A_t 逐渐接近国际前沿。

动态系统的价值，在于帮助我们区分“水平变化”和“增长率变化”。高投资率可以把资本推向更高稳态，但随着资本接近稳态，资本深化贡献下降；技术扩散可以缩小与前沿的差距，但当可模仿空间缩小后，增长必须更多依赖自主创新；城市化可以释放

结构转型收益，但当农业剩余劳动力减少后，转移收益会下降。这些都是动态调整的自然结果。

发展经济学中的陷阱问题也可以用动态系统表达。设某个状态变量 x 表示人力资本、基础设施、市场规模或制度能力。若低 x 导致低回报、低投资，而低投资又使 x 继续偏低，系统可能存在低稳态。若超过某个阈值后回报上升、投资增加、市场扩大，系统可能进入高稳态吸引域。这里的关键不是“穷所以穷”这句空话，而是要写出正反馈从哪里来、阈值由什么决定、政策能否把经济体推过临界点。

因此，本章的工具为后面两类分析服务。第一类是基准增长模型：Solow、Ramsey、OLG、AK 和 R&D 模型都需要稳态和局部稳定性。第二类是发展机制：结构转型、城市化、产业升级、资源错配和技术扩散都可以被看成状态变量缓慢演化的过程。数学语言不能替代历史和制度分析，但它能让机制变得更清楚。

6.17 常见误区

1. **把稳态理解为经济停滞。**稳态取决于变量定义。有效劳动单位资本不变时，总量和人均变量仍可能增长。
2. **只求稳态，不看稳定性。**稳态存在不代表经济体会走向它。稳定性决定稳态是否具有解释力。
3. **把局部稳定当成全局稳定。**线性化只告诉我们稳态附近的动态。多重均衡和发展陷阱需要全局分析。
4. **把相图当成记忆图形。**相图的核心是符号判断：变量在哪些区域上升，在哪些区域下降。
5. **把收敛速度当成纯技术参数。**在增长模型里，收敛速度背后有经济含义，通常与资本边际产出递减、人口增长、技术进步和折旧有关。

6.18 英文术语表

英文术语	中文含义与说明
Difference equation	差分方程，描述离散时间中 x_{t+1} 如何由 x_t 决定。
Differential equation	微分方程，描述连续时间中变量的瞬时变化率。
State variable	状态变量，继承历史并约束当前选择的变量。
Control variable	控制变量，经济主体在当前选择的变量。

Steady state	稳态，选定变量不再变化的状态。
Fixed point	不动点，满足 $x^* = G(x^*)$ 的点。
Local stability	局部稳定性，稳态附近的路径是否收敛回稳态。
Linearization	线性化，用一阶近似研究稳态附近动态。
Jacobian matrix	雅可比矩阵，多变量动态系统的一阶导数矩阵。
Eigenvalue	特征值，决定线性化系统在某个方向上收敛或发散的数。
Trace	迹，二维雅可比矩阵对角线元素之和。
Determinant	行列式，二维系统中用于判断特征值乘积和鞍点性质。
Phase diagram	相图，用图形表示动态系统的运动方向。
Transition dynamics	转移动态，从初始状态走向稳态或其他长期状态的路径。
Saddle path	鞍路径，多维动态系统中通向稳态的特定收敛路径。
Basin of attraction	吸引域，会收敛到某一稳态的初始条件集合。

6.19　本章 Review

读完本章后，你应该能把动态系统拆成四个问题。第一，状态变量是什么？在增长模型中，它可能是资本、人力资本、技术、知识存量或产业结构。第二，转移方程是什么？也就是今天的状态如何决定明天的状态，或者当前状态如何决定瞬时变化率。第三，稳态在哪里？稳态由 $x^* = G(x^*)$ 或 $g(x^*) = 0$ 给出。第四，稳态是否稳定？一维离散时间看 $|G'(x^*)|$，一维连续时间看 $g'(x^*)$ 的符号；二维连续时间则先写雅可比矩阵，再看特征值、迹和行列式。

你也应该能解释 Solow 型相图的基本逻辑：当人均投资高于维持投资时，资本上升；当人均投资低于维持投资时，资本下降；资本边际产出递减使经济体接近稳态时增长放慢。这个机制解释了资本深化为何能带来转移增长，也说明了为什么单靠资本积累不能永久维持高速增长。

如果现在仍觉得相图抽象，最有效的补救不是背图，而是回到符号：一维时先写出 $\dot{x} = g(x)$，再找 $g(x) = 0$，最后在稳态左右各取一点判断 $g(x)$ 的正负；二维时先写出 $\dot{x} = F(x, y)$、$\dot{y} = G(x, y)$，再找两条零增长曲线和交点，最后用雅可比矩阵确认局部稳定性。只要这个流程熟练，后面的 Ramsey 相图、OLG 动态和内生增长模型会清楚很

多。

6.20 核心文献

本章的工具性内容可参考 [Simon and Blume, 1994] 对经济学数学方法的系统介绍，以及 [Stokey et al., 1989] 对动态经济学和递归方法的经典处理。增长理论中的动态系统和相图应用，可结合 [Barro and Sala-i Martin, 2004] 与 [Acemoglu, 2009] 的相关章节阅读。后面进入 Ramsey 和 OLG 时，我们会重新使用本章的稳定性、相图和线性化方法。

第七章　动态优化：Hamiltonian 与 Bellman

7.1　本章导读

前两章准备了增长模型的数学语言和动态系统。本章把二者合在一起：经济主体不仅沿着动态方程运动，而且会在动态方程约束下做最优选择。Solow 模型把储蓄率当作外生参数，所以资本动态只需要一个相图；Ramsey 模型会问家庭为什么储蓄、储蓄多少、消费路径如何随利率和耐心程度变化。这个问题不能只靠稳态方程回答，而需要动态优化。

动态优化有两种常用语言。连续时间模型常用 Hamiltonian，它把“今天的边际收益”和“状态变量的影子价值”放在同一个对象里。离散时间模型常用 Bellman 方程，它把一个无限期问题写成“今天回报加上明天价值”的递归形式。两种语言看起来不同，但核心相同：最优路径必须让今天多消费一点的收益，等于由此损失的未来价值。

本章不追求最一般的最优控制定理，而是为增长理论建立一套可用模板。学完本章后，后面的 Ramsey、OLG、AK、R&D 和 Schumpeterian 模型会更容易读：看到 Hamiltonian，你知道它在追踪状态变量的影子价格；看到 Bellman 方程，你知道它在把未来压缩进值函数；看到 Euler 方程，你知道它是在比较跨期边际收益。

本章是正文中的工具桥。若你想把 Bellman 方程推进到随机冲击、马尔可夫状态和递归均衡，应该接着读附录 A；若你想把 Hamiltonian 推进到连续时间 HJB 和随机控制，应该接着读附录 B 和附录 D；若你想真正计算这些模型，附录 F 会把 VFI、shooting、collocation 和误差诊断连起来。

7.2　学习目标

学完本章，你应该能够：

1. 区分状态变量、控制变量、协态变量和值函数。
2. 从一个连续时间最优增长问题写出 current-value Hamiltonian。
3. 推导消费 Euler 方程，并解释其中的利率、折旧、时间偏好和跨期替代弹性。

4. 理解横截条件为什么排除无意义的“永远留下有价值资产”路径。

5. 从离散时间问题写出 Bellman 方程，并用包络条件推出 Euler 方程。

6. 理解 Hamiltonian 和 Bellman 的共同经济含义。

7.3 动态优化问题长什么样

静态优化问的是：给定资源，今天如何选择？动态优化问的是：今天的选择会改变明天的状态时，整个路径如何选择？增长理论中最常见的状态变量是资本 k_t，最常见的控制变量是消费 c_t。消费提高会增加今天效用，但会减少储蓄和明天资本；资本提高会增加未来产出，但需要牺牲当前消费。

一个抽象的连续时间动态优化问题可以写成

$$\max_{\{c(t)\}_{t\geq 0}} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c(t))\, dt \tag{7.1}$$

subject to

$$\dot{k}(t) = F(k(t), c(t)), \qquad k(0) = k_0. \tag{7.2}$$

这里 $\rho > 0$ 是主观贴现率。若 ρ 高，经济主体更不耐心，更重视今天；若 ρ 低，经济主体更愿意为了未来牺牲现在。

离散时间版本则写成

$$\max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t), \qquad 0 < \beta < 1, \tag{7.3}$$

subject to

$$k_{t+1} = G(k_t, c_t), \qquad k_0 \text{ given}. \tag{7.4}$$

这里 β 是贴现因子。β 越接近 1，主体越耐心；β 越小，主体越偏向当前消费。

表 7.1 给出一张速查表。真正读模型时，你应该先问：谁在选择？选择变量是什么？哪个变量由过去继承？选择如何改变未来？目标函数里的贴现方式是什么？这些问题比机械写公式更重要。

7.4 一个两期例子：Euler 方程的最朴素来源

先从两期问题开始。家庭有总财富 W，选择今天消费 c_0 和明天消费 c_1：

$$\max_{c_0, c_1} u(c_0) + \beta u(c_1) \tag{7.5}$$

subject to

$$c_0 + \frac{c_1}{1+r} = W. \tag{7.6}$$

表 7.1: 动态优化中的核心对象

对象	常用符号	经济含义
状态变量	k_t 或 $k(t)$	由历史继承，限制当前选择的变量
控制变量	c_t 或 $c(t)$	当前可以选择、影响未来状态的变量
效用函数	$u(c)$	当前消费带来的回报
转移方程	$k_{t+1}=G(k_t,c_t)$ 或 $\dot{k}=F(k,c)$	状态变量如何演化
协态变量	$\lambda(t)$	状态变量的当前影子价值
值函数	$V(k)$	从状态 k 出发可获得的最大折现价值

拉格朗日函数为

$$\mathcal{L}=u(c_0)+\beta u(c_1)+\lambda\left(W-c_0-\frac{c_1}{1+r}\right). \tag{7.7}$$

一阶条件为

$$u'(c_0)=\lambda, \tag{7.8}$$

$$\beta u'(c_1)=\frac{\lambda}{1+r}. \tag{7.9}$$

消去 λ，得到

$$u'(c_0)=\beta(1+r)u'(c_1). \tag{7.10}$$

式 (7.10) 是 Euler 方程的两期版本。它说，今天少消费一单位会损失 $u'(c_0)$ 的边际效用；这单位资源储蓄到明天会变成 $1+r$ 单位消费，带来 $\beta(1+r)u'(c_1)$ 的贴现边际效用。最优时二者相等。

这个条件比“消费者平滑消费”更精确。若利率高，推迟消费的回报高，最优路径会倾向于让未来消费更高；若主体不耐心，β 低，未来效用打折严重，最优路径会倾向于提高当前消费。增长模型的储蓄选择就是这个逻辑的无限期版本。

7.5 连续时间 Hamiltonian：把未来价值放进今天

考虑一个简化的连续时间最优增长问题：

$$\max_{\{c(t)\}}\int_0^\infty e^{-\rho t}u(c(t))\,dt \tag{7.11}$$

subject to

$$\dot{k}=f(k)-c-\delta k,\qquad k(0)=k_0. \tag{7.12}$$

这里 $f(k)$ 是人均生产函数，δ 是折旧率。为了让 Hamiltonian 和 Bellman 的核心逻辑最清楚，本章先采用没有人口增长和技术增长的标准化版本。后面写有效劳动单位时，

人口增长和技术进步会进入资源约束或福利贴现；那时必须先说明变量规范化，否则 Euler 方程中的 n 和 g 很容易被误放。

current-value Hamiltonian 写成

$$\mathcal{H}(k, c, \lambda) = u(c) + \lambda \left[f(k) - c - \delta k \right]. \tag{7.13}$$

这里 $\lambda(t)$ 是资本的当前影子价值。它衡量如果今天多一单位资本，按当前价值计算，目标函数能增加多少。

最优条件包括三部分。第一，对控制变量 c 的一阶条件：

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = u'(c) - \lambda = 0, \qquad u'(c) = \lambda. \tag{7.14}$$

这说明资本影子价值等于当前消费的边际效用。若资本很有价值，家庭愿意减少消费、增加储蓄；若当前消费边际效用很高，家庭不愿意再牺牲消费。

第二，状态方程仍然必须成立：

$$\dot{k} = f(k) - c - \delta k. \tag{7.15}$$

第三，current-value 协态方程为

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} = \left[\rho + \delta - f'(k) \right] \lambda. \tag{7.16}$$

协态方程是动态优化里最容易觉得神秘的一步。它的含义其实是资产定价：持有一单位资本的边际价值 λ 必须按照贴现率 ρ 获得足够回报；资本的边际产出 $f'(k)$ 提高持有资本的吸引力，而折旧 δ 降低净回报。

7.6 从 Hamiltonian 推导 Euler 方程

现在把 (7.14) 和 (7.16) 合起来。由

$$\lambda = u'(c), \tag{7.17}$$

对时间求导：

$$\dot{\lambda} = u''(c)\dot{c}. \tag{7.18}$$

代入协态方程：

$$u''(c)\dot{c} = \left[\rho + \delta - f'(k) \right] u'(c). \tag{7.19}$$

两边除以 $u'(c)$，并整理为

$$-\frac{u''(c)c}{u'(c)}\frac{\dot{c}}{c} = f'(k) - \delta - \rho. \tag{7.20}$$

定义相对风险厌恶系数，也就是跨期替代弹性的倒数：

$$\theta(c) = -\frac{u''(c)c}{u'(c)}. \tag{7.21}$$

则

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta(c)}\left[f'(k) - \delta - \rho\right]. \tag{7.22}$$

若效用为 CRRA：

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta}, \qquad \theta > 0,\ \theta \neq 1, \tag{7.23}$$

则

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{f'(k) - \delta - \rho}{\theta}. \tag{7.24}$$

若 $u(c) = \log c$，则 $\theta = 1$。

命题 7.1 (连续时间最优增长的 Euler 方程). 设 $u'(c) > 0$、$u''(c) < 0$，且最优路径为内点路径。对问题 (7.11)–(7.12)，若 *Hamiltonian* 一阶条件和协态方程成立，则消费路径满足

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta(c)}\left[f'(k) - \delta - \rho\right], \tag{7.25}$$

其中 $\theta(c) = -u''(c)c/u'(c)$。

证明. 由控制变量一阶条件，$\lambda = u'(c)$。对时间求导得 $\dot{\lambda} = u''(c)\dot{c}$。由 current-value 协态方程，

$$\dot{\lambda} = \left[\rho + \delta - f'(k)\right]\lambda. \tag{7.26}$$

将 $\lambda = u'(c)$ 代入，得到

$$u''(c)\dot{c} = \left[\rho + \delta - f'(k)\right]u'(c). \tag{7.27}$$

两边除以 $u'(c)$，再乘以 $-c/[u''(c)c/u'(c)]$，即可得到所述 Euler 方程。 □

Euler 方程的经济解释非常重要。若资本净边际回报 $f'(k) - \delta$ 高于时间偏好率 ρ，未来消费的回报高，最优路径会让消费增长。若资本净边际回报低于 ρ，主体更愿意提前消费，消费会下降。θ 越高，跨期替代越困难，同样的回报差异引起的消费增长反应越小。

7.7 数值例子：Euler 方程如何读

设 $u(c) = \log c$，所以 $\theta = 1$。令

$$f(k) = Ak^{\alpha}, \quad A = 1, \quad \alpha = \frac{1}{3}, \quad \delta = 0.08, \quad \rho = 0.04. \tag{7.28}$$

表 7.2: 不同资本水平下的最优消费增长率

k	$f'(k)$	$f'(k)-\delta-\rho$	$\dot{c}/c$
1	0.333	0.213	21.3%
4	0.132	0.012	1.2%
5	0.114	-0.006	-0.6%
9	0.077	-0.043	-4.3%

则

$$\frac{\dot{c}}{c} = f'(k) - 0.12 = \frac{1}{3}k^{-2/3} - 0.12. \tag{7.29}$$

表 7.2 展示了一个关键直觉。资本很低时，资本边际产出高，储蓄的回报高，最优消费增长率高；资本较高时，边际产出下降，消费增长放慢甚至转负。这个机制与第 6 章的转移动态相呼应，但现在储蓄不是外生给定，而是由跨期最优选择决定。

7.8 横截条件：为什么不能留下无用财富

Hamiltonian 一阶条件和状态方程还不够。无限期问题还需要横截条件。对上面的连续时间问题，一个常见横截条件是

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda(t)k(t) = 0. \tag{7.30}$$

这条式子看起来抽象，但经济含义很清楚：沿最优路径，不能在无穷远未来留下仍有正贴现价值、却从未被消费利用的资本。

如果极限大于零，说明经济体永远持有一笔有价值的资产，却没有把它转化为效用。这通常意味着可以在某个时期略微增加消费而不破坏可行性，从而提高总效用，原路径就不是最优。横截条件排除了这类“过度储蓄”路径。

横截条件也帮助区分可行路径和最优路径。一个路径可能满足状态方程和 Euler 方程，但仍然不是最优，因为它把太多资源推到无限远未来。研究生增长课里，很多错误解法都不是一阶条件写错，而是忘了检查横截条件。

7.9 TVC 与 no-Ponzi：Euler 方程为什么不够

横截条件最好用一个小反例理解。考虑一个没有生产、只有无风险资产的连续时间家庭问题：

$$\dot{a} = ra - c, \qquad a(0) = a_0 > 0, \tag{7.31}$$

效用为 $u(c)=\log c$，且 $r=\rho$。Euler 方程为

$$\frac{\dot{c}}{c}=r-\rho=0. \tag{7.32}$$

这意味着任何常数消费 $c(t)=\bar{c}$ 都满足 Euler 方程。若只看一阶条件，似乎有无穷多条候选路径。

但是资产路径满足

$$a(t)=\left(a_0-\frac{\bar{c}}{r}\right)e^{rt}+\frac{\bar{c}}{r}. \tag{7.33}$$

由于 $u'(\bar{c})=1/\bar{c}$ 且 $r=\rho$，横截项为

$$\lim_{t\to\infty}e^{-\rho t}u'(\bar{c})a(t)=\frac{a_0-\bar{c}/r}{\bar{c}}. \tag{7.34}$$

只有当 $\bar{c}=ra_0$ 时，这个极限等于零。也就是说，Euler 方程只告诉我们消费增长率应该是多少，却没有告诉我们消费水平应该选在哪里；横截条件把消费水平钉住。

这个例子也说明 no-Ponzi 条件的作用。若 $\bar{c}>ra_0$，资产路径最终会走向不可持续的负债；若允许家庭永远滚动债务，当前消费就可以被虚假地抬高。no-Ponzi 条件排除“靠无限未来借新还旧”的路径，TVC 排除“永远留下有价值资产不用”的路径。二者从不同方向保证无限期最优化不是一个只有局部一阶条件、没有整体可行性的游戏。

7.10 离散时间 Bellman 方程

Hamiltonian 从边际条件入手，Bellman 方程从递归结构入手。考虑离散时间问题：

$$\max_{\{c_t\}}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t) \tag{7.35}$$

subject to

$$k_{t+1}=f(k_t)+(1-\delta)k_t-c_t,\qquad 0\le c_t\le f(k_t)+(1-\delta)k_t. \tag{7.36}$$

值函数 $V(k)$ 表示从资本状态 k 出发能够获得的最大折现效用。Bellman 方程为

$$V(k)=\max_{0\le c\le f(k)+(1-\delta)k}\left\{u(c)+\beta V\left(f(k)+(1-\delta)k-c\right)\right\}. \tag{7.37}$$

这条式子是动态规划的核心。左边是从今天状态 k 出发的总价值；右边把问题拆成两部分：今天效用 $u(c)$，加上明天状态 $k'=f(k)+(1-\delta)k-c$ 带来的折现价值 $\beta V(k')$。最优选择是在今天消费和明天资本之间做权衡。

Bellman 方程的力量在于递归。无限期问题看似包含无穷多个选择，但如果环境不随时间变化，同一个函数 V 同时描述今天和明天的问题。这使理论证明、数值求解和计算实验都变得可行。

7.11 从 Bellman 方程推出 Euler 方程

设最优选择为 $c = c(k)$，明天资本为

$$k' = f(k) + (1-\delta)k - c. \tag{7.38}$$

Bellman 方程中对 c 的一阶条件是

$$u'(c) = \beta V'(k'). \tag{7.39}$$

包络条件为

$$V'(k) = \beta V'(k')\left[f'(k) + 1 - \delta\right]. \tag{7.40}$$

更常用的写法，是在下一期状态 k' 处应用包络条件：

$$V'(k') = u'(c')\left[f'(k') + 1 - \delta\right], \tag{7.41}$$

其中 $c' = c(k')$ 是下一期最优消费。把 (7.41) 代入 (7.39)，得到离散时间 Euler 方程：

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})\left[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta\right]. \tag{7.42}$$

命题 7.2 (Bellman 方程中的 Euler 方程). 设 u 和 f 可微，最优政策为内点解，且值函数可微。则 *Bellman* 方程 (7.37) 的最优路径满足

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})\left[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta\right]. \tag{7.43}$$

证明. 给定当前状态 k_t，选择 c_t 会通过

$$k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t \tag{7.44}$$

影响未来价值。Bellman 方程对 c_t 的一阶条件为

$$u'(c_t) - \beta V'(k_{t+1}) = 0. \tag{7.45}$$

在下一期状态 k_{t+1} 处使用包络条件：

$$V'(k_{t+1}) = u'(c_{t+1})\left[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta\right]. \tag{7.46}$$

将该式代入一阶条件，即得 Euler 方程。 □

这条离散时间 Euler 方程和两期 Euler 方程完全同源。今天少消费一单位，会多出一单位明天资本。明天资本的边际回报是 $f'(k_{t+1}) + 1 - \delta$，它转化为明天消费的边际效用，再乘以贴现因子 β。最优时，今天消费的边际效用必须等于这个贴现后的未来边际价值。

7.12　Bellman 的数值直觉：值函数迭代

Bellman 方程也给出一种计算方法。给定一个初始猜测 $V_0(k)$，反复应用 Bellman 算子：

$$(TV)(k) = \max_c \{u(c) + \beta V\left(f(k) + (1-\delta)k - c\right)\}. \tag{7.47}$$

若满足适当条件，$V_{m+1} = TV_m$ 会逐步接近真正的值函数。

表 7.3: 值函数迭代的概念性步骤

步骤	操作	产出
1	选定资本网格 $k_1, \ldots, k_N$	有限个状态点
2	猜测初始值函数 $V_0(k)$	通常可设为零或静态效用值
3	对每个 k_i 枚举可行 c	找到使右边最大的消费
4	得到新函数 $V_1 = TV_0$	同时得到政策函数 $c_1(k)$
5	重复直到 V_{m+1} 与 V_m 足够接近	近似值函数和政策函数

表 7.3 不是让你马上写代码，而是帮助理解 Bellman 方程为什么适合计算。复杂增长模型经常没有解析解，但只要能写出状态、控制、回报和转移方程，就可以用递归方法近似求解。后面的量化增长、创新模型和异质性主体模型都会依赖这种思想。

7.13　Hamiltonian 与 Bellman 的关系

Hamiltonian 和 Bellman 不是两套互不相干的方法。它们都在表达同一个最优性原则：沿最优路径，当前选择的边际收益必须等于它对未来价值的边际影响。

Hamiltonian 中的协态变量 λ 对应 Bellman 方法中的值函数导数 $V'(k)$。在连续时间里，λ 是状态变量的影子价格；在离散时间里，$V'(k)$ 是多一单位资本带来的边际价值。因此，一阶条件

$$u'(c) = \lambda \tag{7.48}$$

和

$$u'(c) = \beta V'(k') \tag{7.49}$$

都在说同一件事：当前消费的边际效用必须等于把资源留给未来的边际价值。

两种方法的使用习惯不同。连续时间、低维、重视相图和解析推导的增长模型，常用 Hamiltonian。离散时间、需要数值计算、状态变量较多的模型，常用 Bellman。现代宏观和增长研究往往同时掌握两者：用 Hamiltonian 看清机制，用 Bellman 做递归刻画和计算。

7.14 中国与发展延伸：动态优化如何改变解释

把储蓄率当作外生参数时，我们只能说“高储蓄率提高稳态资本”。动态优化进一步问：为什么一个经济体会选择高储蓄？这个问题对理解中国增长尤其重要。居民、企业、政府和地方平台的储蓄与投资行为，背后可能有不同动机：生命周期预防性储蓄、金融约束、社会保障不足、企业利润留存、地方发展竞争、基础设施投资回报，以及政策性信贷安排。

动态优化不要求我们把这些机制都塞进一个家庭模型，但它提供了组织问题的语言。若未来资本回报高，最优选择会倾向于推迟消费；若金融市场不完善，家庭可能因为风险无法保险而提高储蓄；若政府目标函数重视未来产出或财政收入，公共投资可能高于单个家庭选择；若投资存在扭曲，资本积累可能超过社会最优水平。也就是说，高投资既可能反映高回报和快速追赶，也可能反映扭曲和低效率。

这正是中国增长分析需要谨慎的地方。资本深化确实解释了一部分高速增长，但动态优化提醒我们：储蓄和投资不是自然常数，而是由偏好、回报、约束和制度共同决定。后面讨论 Ramsey、资源错配、地方政府激励和产业政策时，我们会不断回到这个问题：一个经济体选择的动态路径，是私人最优、政府目标下的最优，还是被扭曲约束推出来的次优路径？

7.15 常见误区

1. **把 Euler 方程当成纯数学条件。** Euler 方程的本质是跨期边际收益相等，不是为了求导而求导。

2. **忘记状态变量不能自由跳。**资本由历史给定，今天不能任意选择；消费通常可以跳，资本只能通过积累慢慢变。

3. **只写一阶条件，不检查横截条件。**无限期问题中，满足 Euler 方程的路径未必最优。

4. **混淆 current-value 和 present-value Hamiltonian。**二者的协态变量定义不同，贴现项位置不同，但经济含义可以互相转换。

5. **把 Bellman 方程看成计算技巧。**Bellman 首先是一种最优性原则，计算只是它的重要用途之一。

7.16 英文术语表

英文术语	中文含义与说明

Dynamic optimization	动态优化，当前选择影响未来状态时的最优化问题。
Optimal control	最优控制，连续时间动态优化的常用方法。
Hamiltonian	哈密顿函数，把当前回报、状态方程和协态变量合在一起。
Costate variable	协态变量，状态变量的影子价值。
Euler equation	欧拉方程，描述最优路径上的跨期边际条件。
Transversality condition	横截条件，排除无限期问题中的非最优资产积累路径。
No-Ponzi condition	无庞氏条件，排除靠无限滚动债务维持不可持续消费的路径。
Bellman equation	贝尔曼方程，把动态问题写成当前回报加未来价值。
Value function	值函数，从某个状态出发可获得的最大折现价值。
Policy function	政策函数，给定状态下的最优控制选择。
Envelope condition	包络条件，说明值函数导数如何由当前最优条件给出。
Value function iteration	值函数迭代，用 Bellman 算子反复逼近值函数。

7.17 本章 Review

本章最重要的内容不是记住两个工具名，而是理解动态最优选择的共同逻辑。Hamiltonian 方法中，λ 衡量资本的影子价值；Bellman 方法中，$V'(k)$ 衡量资本的边际价值。Euler 方程把当前消费的边际效用和未来资源的贴现边际价值相等起来。横截条件和 no-Ponzi 条件则确保最优路径既不会把有价值资源永远留在无穷远未来，也不会靠无限滚动债务制造虚假的高消费。

你现在应该能从一个最优增长问题中识别三件事。第一，状态变量和控制变量分别是什么。第二，资源约束或状态方程如何连接今天和明天。第三，Euler 方程中的每一项有什么经济含义：资本边际产出、折旧或稀释、时间偏好，以及跨期替代弹性。只要这三件事清楚，后面的 Ramsey 模型就不会只是公式堆叠。

如果这一章读起来吃力，建议回到两期问题。两期 Euler 方程是所有无限期 Euler 方程的直觉来源：今天少消费一单位，未来能多得到多少？未来多得到的东西按边际效用和贴现因子折回今天，是否刚好等于今天损失的边际效用？这个问题，就是动态增长

理论的心脏。

7.18 核心文献

动态优化和递归方法的经典入口是 [Stokey et al., 1989]。[Sundaram, 1996] 对优化理论基础很有帮助。最优控制的标准数学处理可参考 [Pontryagin et al., 1962] 和 [Kamien and Schwartz, 2012]；Bellman 动态规划思想可追溯到 [Bellman, 1957]。增长教材中，[Acemoglu, 2009] 和 [Barro and Sala-i Martin, 2004] 都会在 Ramsey 和动态一般均衡章节中系统使用本章工具。

第八章　一般均衡与福利定理

8.1　本章导读

前面几章已经准备了增长模型需要的三个工具：数学语言、动态系统和动态优化。本章补上第四个工具：一般均衡。增长模型不是只研究一个孤立家庭或一个孤立企业，而是研究家庭、企业和市场怎样同时相容。家庭选择消费和储蓄，企业选择资本和劳动，价格协调供给与需求，市场清算把个体选择拼成整个经济。

一般均衡的核心问题是：分散的竞争市场能否实现社会计划者会选择的资源配置？如果能，我们就可以先解计划者问题，再把它解释为竞争均衡；如果不能，就必须明确市场失灵、税收、外部性、借贷约束或制度扭曲在哪里。后面的 Ramsey、OLG、内生增长、创新和中国增长章节都会反复用到这一区分。

本章会先从纯交换经济讲起，因为它最干净地展示了价格和市场清算。然后加入生产，说明企业一阶条件如何给出工资和资本回报。接着讨论福利第一定理和第二定理，再把这些结果放回增长模型：什么时候计划者问题等价于竞争均衡，什么时候不等价。最后，我们用中国与发展问题说明，一般均衡不是抽象装饰，而是分析资源配置、政策扭曲和结构转型的基本语言。

8.2　学习目标

学完本章，你应该能够：

1. 写出纯交换经济中的消费者问题、预算约束和市场清算条件。
2. 定义 Walrasian equilibrium，并理解价格只在相对意义上有作用。
3. 解释 Walras' law、福利第一定理和福利第二定理的经济含义。
4. 在生产经济中写出企业利润最大化条件和要素价格。
5. 理解社会计划者问题和竞争均衡在无扭曲条件下为什么等价。
6. 识别哪些摩擦会打破福利定理，从而产生增长和发展中的政策问题。

8.3 为什么增长理论需要一般均衡

中级宏观里，我们常说“储蓄等于投资”“劳动市场清算”“资本回报等于边际产出”。这些说法看似自然，但在研究生增长理论里，每一句都需要一个均衡结构支撑。储蓄是谁做出的选择？投资是谁执行的？资本回报由谁支付？工资为什么等于劳动边际产出？如果一个市场不清算，价格如何调整？如果存在税收或金融摩擦，等式如何改变？

一般均衡的作用，是把这些局部条件放进同一个系统。家庭的最优选择要和企业的最优选择相容；企业对资本和劳动的需求要等于家庭供给；政府预算、资源约束和价格体系要同时成立。一个变量在一个方程里是结果，在另一个方程里可能是约束。增长模型的难处，往往就在这些相互依赖之中。

这也是为什么很多增长模型会先解“社会计划者问题”。计划者问题把整个经济当成一个统一主体，直接选择消费、资本和劳动路径，使社会福利最大化。如果福利定理适用，计划者配置可以被竞争价格分散化；这样做不仅简化推导，也帮助我们看清机制。但如果存在外部性、垄断、税收、借贷约束或资源错配，计划者配置和市场均衡就不再相同，差异本身就是研究对象。

8.4 纯交换经济：最小的一般均衡环境

先考虑没有生产的经济。经济中有 I 个消费者和 L 种商品。消费者 i 的消费向量为

$$x^i = (x^i_1, \dots, x^i_L) \in \mathbb{R}^L_+, \tag{8.1}$$

初始禀赋为

$$\omega^i = (\omega^i_1, \dots, \omega^i_L) \in \mathbb{R}^L_+, \tag{8.2}$$

偏好由效用函数 $u^i(x^i)$ 表示。

一个配置 $(x^1, \dots, x^I)$ 是可行的，如果总消费不超过总禀赋：

$$\sum_{i=1}^{I} x^i \le \sum_{i=1}^{I} \omega^i. \tag{8.3}$$

若所有商品都没有浪费，则不等式取等号。

给定价格向量 $p = (p_1, \dots, p_L) \gg 0$，消费者 i 的预算约束为

$$p \cdot x^i \le p \cdot \omega^i. \tag{8.4}$$

右边是消费者以市场价格计算的财富。注意，价格在这里不是政府给出的标签，而是稀缺性的信号。若某种商品相对稀缺，其相对价格会较高，消费者会被预算约束引导去节约它。

定义 8.1 (Walrasian equilibrium). 在纯交换经济中，一个价格向量 $p^* \gg 0$ 和配置 $(x^{*1}, \dots, x^{*I})$ 构成 *Walrasian equilibrium*，如果：

1. 对每个消费者 i，x^{*i} 在预算约束 $p^* \cdot x^i \le p^* \cdot \omega^i$ 下最大化 $u^i(x^i)$；
2. 市场清算：

$$\sum_{i=1}^{I} x^{*i} = \sum_{i=1}^{I} \omega^i. \tag{8.5}$$

价格只在相对意义上重要。如果 p^* 是均衡价格，那么对任意 $\lambda > 0$，λp^* 也是均衡价格，因为所有预算约束两边同时乘以 λ，消费者的可选集合不变。因此一般均衡模型通常选择一种商品作为 numeraire，把它的价格标准化为 1。

8.5 一个两人两物品例子

考虑两个消费者 A, B 和两种商品 $1, 2$。二者偏好相同：

$$u^A(x_1^A, x_2^A) = \sqrt{x_1^A x_2^A}, \qquad u^B(x_1^B, x_2^B) = \sqrt{x_1^B x_2^B}. \tag{8.6}$$

初始禀赋为

$$\omega^A = (4, 0), \qquad \omega^B = (0, 4). \tag{8.7}$$

总资源为 $(4, 4)$。

对 Cobb-Douglas 偏好，每个消费者会把财富的一半花在每种商品上。若价格为 $p_1 = p_2 = 1$，则 A 的财富为 4，需求为

$$x^A = (2, 2), \tag{8.8}$$

B 的财富也为 4，需求为

$$x^B = (2, 2). \tag{8.9}$$

总需求为 $(4, 4)$，正好等于总禀赋，所以

$$p^* = (1, 1), \qquad x^{*A} = x^{*B} = (2, 2) \tag{8.10}$$

构成均衡。

这个例子非常简单，却展示了一般均衡的三个要点。第一，消费者不是直接平均分配资源，而是在价格和预算约束下选择。第二，价格使两个市场同时清算。第三，均衡配置消除了最明显的互利交易机会：在均衡处，两个消费者的边际替代率相同，都等于价格比率。

表 8.1 也说明，均衡不是说每个人消费自己的禀赋。市场的作用正是允许人们用自己相对充裕的商品换取自己相对稀缺的商品。增长和发展问题中，商品可以被理解为资本、劳动、土地、信贷、技术服务、能源和中间品；一般均衡分析帮助我们追踪这些市场之间的联动。

表 8.1: 两人两物品交换经济的均衡

消费者	初始禀赋	均衡消费	财富
A	$(4,0)$	$(2,2)$	4
B	$(0,4)$	$(2,2)$	4
合计	$(4,4)$	$(4,4)$	8

8.6 Walras' law

定义消费者 i 在价格 p 下的需求为 $x^i(p)$，总超额需求为

$$z(p) = \sum_{i=1}^{I} x^i(p) - \sum_{i=1}^{I} \omega^i. \tag{8.11}$$

Walras' law 表示：

$$p \cdot z(p) = 0. \tag{8.12}$$

命题 8.1 (Walras' law)**.** *若每个消费者在价格 $p \gg 0$ 下满足预算约束且偏好局部非饱和，则总超额需求的价值为零：*

$$p \cdot z(p) = 0. \tag{8.13}$$

证明. 局部非饱和意味着消费者不会在最优选择处留下未花掉的财富，因此每个消费者的预算约束绑定：

$$p \cdot x^i(p) = p \cdot \omega^i. \tag{8.14}$$

对所有消费者求和：

$$\sum_{i=1}^{I} p \cdot x^i(p) = \sum_{i=1}^{I} p \cdot \omega^i. \tag{8.15}$$

把价格向量提出，得到

$$p \cdot \left[\sum_{i=1}^{I} x^i(p) - \sum_{i=1}^{I} \omega^i \right] = 0, \tag{8.16}$$

即 $p \cdot z(p) = 0$。 □

Walras' law 的实际用法很重要。如果一个经济有 L 个市场，而其中 $L-1$ 个市场已经清算，那么最后一个市场也会清算。因为总超额需求的价值为零，若所有其他商品超额需求为零，最后一个商品的超额需求价值也必须为零；在正价格下，它的数量超额需求也为零。宏观模型里经常“少写一个市场清算条件”，原因就在这里。

8.7 Pareto 效率

均衡是关于个体最优和市场清算的概念；效率是关于是否存在浪费的概念。

定义 8.2 (Pareto improvement 与 Pareto efficiency). 给定一个可行配置 $x = (x^1, \dots, x^I)$。若存在另一个可行配置 $y = (y^1, \dots, y^I)$，使得对所有 i，

$$u^i(y^i) \geq u^i(x^i), \tag{8.17}$$

且至少对一个消费者严格大于，则称 y 是相对于 x 的 *Pareto improvement*。若不存在这样的 y，则称 x 是 *Pareto efficient*。

Pareto 效率不是公平概念。一个极不平等的配置也可能是 Pareto efficient，因为只要改善穷人必须损害富人，就没有 Pareto improvement。福利定理讨论的是市场是否浪费资源，不直接讨论分配是否正义。第二福利定理才说明，在某些条件下，可以先通过一次性转移改变财富分配，再让市场实现相应的有效配置。

8.8 福利第一定理

命题 8.2 (福利第一定理). 若偏好局部非饱和，则任何 *Walrasian equilibrium* 的配置都是 *Pareto efficient*。

证明. 设 (p^*, x^*) 是 Walrasian equilibrium。反设 x^* 不是 Pareto efficient，则存在可行配置 y，使所有消费者弱偏好 y^i 于 x^{*i}，且至少一个消费者严格偏好。

因为 x^{*i} 在预算约束下最优，任何严格优于 x^{*i} 的消费束都不能是可负担的；因此对严格改善的消费者，

$$p^* \cdot y^i > p^* \cdot \omega^i. \tag{8.18}$$

对弱改善的消费者，局部非饱和保证如果 $p^* \cdot y^i < p^* \cdot \omega^i$，则可以在预算内找到一个略好于 y^i 的消费束，从而也好于 x^{*i}，这会违反 x^{*i} 的最优性。因此

$$p^* \cdot y^i \geq p^* \cdot \omega^i \tag{8.19}$$

对所有 i 成立，且至少一个严格成立。

对所有消费者求和，得到

$$p^* \cdot \sum_i y^i > p^* \cdot \sum_i \omega^i. \tag{8.20}$$

但 y 可行意味着 $\sum_i y^i \leq \sum_i \omega^i$，在正价格下应有

$$p^* \cdot \sum_i y^i \leq p^* \cdot \sum_i \omega^i, \tag{8.21}$$

矛盾。因此均衡配置必须是 Pareto efficient。 □

福利第一定理的直觉是：如果存在让某些人更好且无人更差的可行交易，那么在竞争市场和正价格下，这个交易机会会被价格体系捕捉到；均衡时所有可负担的改进都已经被个体选择用尽，所以不存在未利用的互利机会。

但这一定理有严格边界。它需要完整市场、价格接受、局部非饱和和没有外部性等条件。污染、知识溢出、垄断、税收扭曲、信贷约束和信息不对称都会破坏定理的适用条件。发展经济学和增长政策的大部分问题，恰恰来自这些条件不成立。

8.9 福利第二定理

福利第二定理的粗略表述是：在凸性等条件下，任何 Pareto efficient 配置都可以通过适当的财富再分配，被竞争市场支持为均衡。

命题 8.3 (福利第二定理的经济含义). *若偏好和生产集合满足适当凸性条件，并且允许一次性财富转移，则每个 Pareto efficient 配置都可以由某个价格体系支持为竞争均衡。*

本书不证明完整分离超平面定理，但要理解它的含义。第一福利定理说，竞争均衡不会浪费资源；第二福利定理说，在理想条件下，效率和分配可以分开处理。政府可以先用 lump-sum transfer 改变初始财富，然后让市场在新财富分配下实现有效配置。

现实政策难就难在这些条件往往不成立。一次性转移很难真正做到不扭曲激励；偏好、技术和信息可能非凸；金融市场不完整；企业有市场势力；知识和污染存在外部性。因此第二福利定理不是简单的“政府只管分配、市场只管效率”，而是一个基准：它告诉我们，若现实中效率和分配无法分开，原因一定来自某些条件失效。

8.10 Edgeworth box 直觉：支撑价格是什么

福利第二定理最抽象的词是“支持”。在两人两物品的 Edgeworth box 里，它可以被看得很清楚。盒子的宽度是物品 1 的总量，高度是物品 2 的总量；左下角是消费者 A 的原点，右上角是消费者 B 的原点。盒子里的任意一点都是一个可行配置：A 拿到该点相对左下角的数量，B 拿到剩余数量。

图 8.1 中的蓝色曲线表示契约曲线，也就是 Pareto efficient 配置集合。在内部有效点 x^* 上，两个人的边际替代率相等：

$$MRS_{12}^{A}(x^{A*}) = MRS_{12}^{B}(x^{B*}). \tag{8.22}$$

红色虚线是一条价格线，斜率为 $-p_1/p_2$。当价格线同时切于两个人的无差异曲线时，给定这组价格，双方都不愿意偏离 x^*。这就是“由价格支持”的含义。

第二福利定理说，如果偏好凸、可行集凸，并允许把初始禀赋通过一次性转移移动到合适的位置，那么每个有效点都能找到这样一条支撑价格线。注意这里的逻辑不是“市场自然会选择你喜欢的分配”，而是“给定一个有效配置，如果社会想要这类分配，

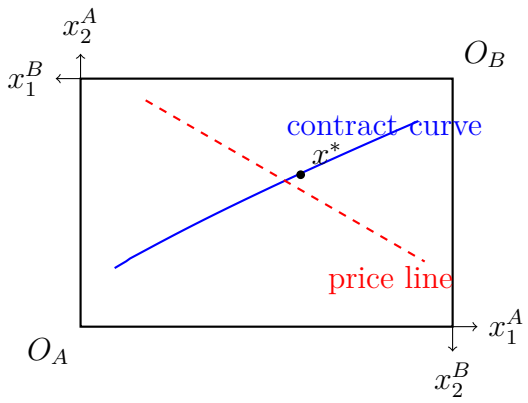

图 8.1: Edgeworth box 中的有效配置与支撑价格线

可以先调整财富，再让价格体系分散化这个配置”。这一区分对增长政策很重要：效率结果来自边际条件，分配结果来自初始财富和转移制度。

8.11　加入生产：企业、要素价格和零利润

增长模型通常有生产。设代表性企业使用资本 K 和劳动 L 生产：

$$Y = F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{8.23}$$

给定资本租金 R 和工资 w，企业利润最大化问题为

$$\max_{K,L} \; F(K, L) - RK - wL. \tag{8.24}$$

一阶条件为

$$R = F_K(K, L) = \alpha A K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}, \tag{8.25}$$

$$w = F_L(K, L) = (1-\alpha) A K^{\alpha} L^{-\alpha}. \tag{8.26}$$

若生产函数规模报酬不变，Euler 定理给出

$$F(K, L) = F_K(K, L)K + F_L(K, L)L. \tag{8.27}$$

因此在竞争价格下，要素支付正好耗尽产出，企业利润为零。

表 8.2 展示了一个简单数值例子。资本租金乘以资本存量为 $0.083 \times 8 \approx 0.667$，工资乘以劳动为 1.333，二者加总为 2，正好等于产出。增长核算中把产出增长拆成资本贡献、劳动贡献和 TFP residual，背后正是这种竞争性要素定价逻辑。

8.12　计划者问题与竞争均衡

现在回到增长理论。考虑没有人口增长的简化经济。资源约束为

$$c + \dot{k} = f(k) - \delta k. \tag{8.28}$$

表 8.2: Cobb-Douglas 生产经济中的要素价格例子

变量	数值	解释
A	1	生产率
α	1/3	资本份额
K	8	总资本
L	1	总劳动
$Y = K^{1/3}L^{2/3}$	2.000	总产出
$R = \alpha Y/K$	0.083	资本租金
$w = (1-\alpha)Y/L$	1.333	工资
$RK + wL$	2.000	要素支付总额

社会计划者选择 $\{c(t), k(t)\}$ 来最大化

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} u(c(t))\, dt \tag{8.29}$$

subject to (8.28)。第 7 章已经说明，其 Euler 方程为

$$\frac{\dot c}{c} = \frac{f'(k) - \delta - \rho}{\theta} \tag{8.30}$$

在 CRRA 效用下成立。

竞争均衡中，企业租用资本和劳动，资本净回报为

$$r = f'(k) - \delta. \tag{8.31}$$

家庭面对资产回报 r 做跨期消费选择，其 Euler 方程为

$$\frac{\dot c}{c} = \frac{r - \rho}{\theta}. \tag{8.32}$$

代入 $r = f'(k) - \delta$，就得到 (8.30)。这说明在无外部性、无税收、竞争性市场和完整资产市场下，计划者问题和竞争均衡给出同一条资源配置路径。

命题 8.4 (无扭曲增长经济中的计划者等价)**.** *在代表性家庭、竞争性企业、无外部性、无税收且市场完整的经济中，若企业按边际产出支付要素报酬，则竞争均衡的消费和资本路径满足社会计划者问题的一阶条件。*

证明. 企业利润最大化给出资本净回报 $r = f'(k) - \delta$。家庭动态优化给出 Euler 方程

$$\dot c/c = (r - \rho)/\theta. \tag{8.33}$$

代入企业的一阶条件，得到

$$\dot{c}/c = [f'(k) - \delta - \rho]/\theta, \tag{8.34}$$

这正是计划者问题的 Euler 方程。资源约束在竞争均衡中由商品市场清算给出，和计划者资源约束相同。因此两者的一阶条件和可行性条件一致。 □

这个等价结果是后面很多章节的工作方式。我们常先解计划者问题，因为它少写价格和预算约束；然后再说明哪些价格可以把这个配置分散化为竞争均衡。这样做不是偷懒，而是福利定理在增长模型中的具体应用。

8.13 递归竞争均衡

动态一般均衡模型常用递归语言表达。递归竞争均衡不是列出整条无限期价格路径，而是把价格和政策写成状态变量的函数。以代表性家庭增长模型为例，状态变量可以是总资本 K。一个递归竞争均衡包括：

1. 家庭值函数 $V(k, K)$ 和政策函数 $c(k, K)$、$k'(k, K)$；
2. 企业价格函数 $r(K)$、$w(K)$；
3. 总量转移函数 $K' = G(K)$；
4. 一致性条件：代表性家庭选择的 k' 等于总量资本转移 $G(K)$；
5. 市场清算：劳动、资本和商品市场同时清算。

更正式地，在离散时间代表性家庭经济中，给定生产函数 $F(K, 1)$ 和折旧率 δ，一个递归竞争均衡是一组函数

$$\{V(k, K), c(k, K), k'(k, K), r(K), w(K), G(K)\}, \tag{8.35}$$

使得以下条件同时成立。

定义 8.3 (代表性家庭模型的递归竞争均衡). 对每个个体资本 k 和总资本 K，家庭值函数满足

$$V(k, K) = \max_{c, k'} \{u(c) + \beta V(k', G(K))\} \tag{8.36}$$

subject to

$$c + k' = [1 + r(K)]\, k + w(K), \qquad c \geq 0, \quad k' \geq 0. \tag{8.37}$$

企业价格满足

$$r(K) = F_K(K, 1) - \delta, \tag{8.38}$$

$$w(K) = F_L(K, 1). \tag{8.39}$$

一致性和市场清算要求

$$k'(K,K) = G(K), \tag{8.40}$$

并且

$$C(K) + G(K) = F(K,1) + (1-\delta)K, \tag{8.41}$$

其中 $C(K) = c(K,K)$。

这个定义看起来比计划者问题多了很多符号，但它多出来的部分正是一般均衡内容。家庭优化给出需求和储蓄；企业最优化给出价格；市场清算把个体选择加总成可行配置；一致性条件要求个体认为的总量运动规律 G 和实际由所有人选择产生的总量运动一致。

在代表性家庭模型里，个体资本和总资本通常相同，所以递归结构看起来有些重复。但在异质性主体模型中，状态变量可能是整个财富分布，递归竞争均衡就变得非常重要。后面如果进入企业异质性、金融摩擦或资源错配模型，我们会看到，均衡不仅要决定总资本，还要决定资本在不同企业或家庭之间如何分配。

8.14 扭曲、wedges 与福利定理失效

福利定理提供基准，扭曲分析说明现实为什么偏离基准。以资本税为例。若资本收入税率为 τ_k，家庭面对的税后回报为

$$(1-\tau_k)(f'(k)-\delta). \tag{8.42}$$

Euler 方程变为

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{(1-\tau_k)(f'(k)-\delta)-\rho}{\theta}. \tag{8.43}$$

与计划者条件相比，资本税在私人回报和社会回报之间打入一个 wedge。若税率较高，私人储蓄和投资低于无扭曲基准。

类似地，若知识有正外部性，私人企业只看到自己的研发回报，看不到对其他企业生产率的溢出，私人研发可能低于社会最优。若金融市场存在信贷约束，高生产率企业可能无法获得足够资本，低生产率企业却占用资源，社会总产出低于有效配置。若地方政府或国有部门面对软预算约束，投资可能高于社会最优并降低资本配置效率。

表 8.3 的重点不是列名词，而是训练一种问法：私人一阶条件和社会一阶条件之间差在哪里？这个差异就是 wedge。增长政策分析常常不是重新发明整个模型，而是在基准均衡条件中找出 wedge，并判断它对资本、劳动、创新和结构转型的影响。

8.15 中国与发展延伸：资源配置作为一般均衡问题

中国增长经验中，许多问题都不能只从单个市场理解。高储蓄率影响资本市场，资本市场影响房地产、基础设施和制造业投资，投资结构影响地方财政和银行资产质量，

表 8.3: 常见扭曲及其一般均衡含义

扭曲或摩擦	破坏的条件	可能的增长后果
资本税	私人回报低于社会回报	投资和资本积累偏低
知识外部性	私人收益低于社会收益	研发和技术扩散不足
污染外部性	私人成本低于社会成本	高污染部门过度扩张
信贷约束	资本不能流向最高回报用途	资源错配和 TFP 损失
垄断势力	价格高于边际成本	产出偏低，创新激励可能扭曲
软预算约束	投资风险未被充分内部化	过度投资和低效率扩张

产业扩张又影响劳动流动、城市化和区域收入差距。这些机制互相连接，因此需要一般均衡视角。

以资源错配为例。如果资本没有流向边际产出最高的企业，总量资本存量不变时，总产出也会下降。在竞争均衡且无摩擦的基准中，所有企业面对同一资本价格，资本边际产出应趋于相等；若数据中高生产率企业资本不足、低生产率企业资本过多，就说明存在融资、所有制、政策或市场进入方面的 wedge。第 27 章讨论中国资源错配时，会把这个逻辑展开。

结构转型也有一般均衡性质。农业劳动力转移到工业和服务业，不只是一个部门劳动减少、另一个部门劳动增加。工资、食品价格、城市住房、公共服务、教育回报和地方财政都会随之调整。如果城市部门存在户籍、住房或公共服务约束，劳动的私人迁移决策可能低于社会最优；如果地方政府通过土地财政补贴工业用地，资本可能过度进入某些部门。这些都不是单个局部市场能解释清楚的。

因此，本章给中国与发展问题提供一个基准判断：先问竞争均衡在理想条件下会怎样配置资源，再问现实中哪些价格、约束和制度使私人选择偏离社会有效配置。这个顺序能避免两种错误：一种是把所有市场结果都当成有效，另一种是看到不满意的结果就直接归因于市场失败。真正有用的分析必须指出具体 wedge。

8.16　常见误区

1. **把一般均衡理解为所有东西都同时变化。**一般均衡不是混乱地说万物相关，而是精确写出个体最优、价格和市场清算如何相互约束。

2. **把 Pareto 效率等同于公平。** Pareto efficient 只说明没有无损改进，不说明分配是否公平。

3. **忘记福利定理的条件。**外部性、市场势力、税收、信息问题和金融约束都会使竞争

均衡不再有效。

4. **误以为计划者问题一定比市场好。**计划者问题常是分析工具；只有在明确市场失灵和政策能力后，才有政策含义。

5. **忽视价格的分散化作用。**竞争价格不是附属变量，而是把个体选择协调成总量可行配置的机制。

8.17 英文术语表

英文术语	中文含义与说明
General equilibrium	一般均衡，所有相关市场同时清算的均衡体系。
Walrasian equilibrium	瓦尔拉斯均衡，消费者最优且市场清算的竞争均衡。
Market clearing	市场清算，总需求等于总供给。
Excess demand	超额需求，总需求减总供给。
Walras' law	瓦尔拉斯法则，总超额需求的价值为零。
Pareto efficiency	帕累托效率，不存在让某些人更好且无人更差的可行改进。
First welfare theorem	福利第一定理，竞争均衡配置在适当条件下是 Pareto efficient。
Second welfare theorem	福利第二定理，凸性和转移条件下有效配置可被价格支持为均衡。
Edgeworth box	埃奇沃思盒，用两人两物品图形表示可行配置、契约曲线和支撑价格。
Social planner	社会计划者，直接选择总量资源配置以最大化社会福利的虚拟主体。
Decentralization	分散化，用价格和预算约束实现计划者配置。
Recursive competitive equilibrium	递归竞争均衡，用状态变量函数表示动态竞争均衡。
Wedge	楔子，私人一阶条件与社会一阶条件之间的差异。

8.18　本章 Review

如果我来 review 你对本章的理解，第一条标准是你是否能把一般均衡说成一个系统，而不是一组孤立最优化问题。你应该能说明消费者最优化、企业最优化、价格和市场清算怎样同时成立，也能解释 Walras' law 为什么意味着只要 $n-1$ 个市场清算，最后一个市场也会清算。

第二，我会检查你是否能区分福利第一定理和第二定理。第一定理说，在完全竞争、局部非饱和等条件下，竞争均衡没有 Pareto 浪费；第二定理说，在凸性和适当财富转移下，有效配置可以被价格体系支持。若你把两者都说成“市场有效”，说明理解还不够细。

第三，你应该能把静态一般均衡语言带回增长模型。无扭曲代表性家庭模型中，计划者问题和竞争均衡具有相同 Euler 方程和资源约束；一旦税收、外部性、金融摩擦或市场势力造成 wedge，私人边际条件和社会边际条件就会分开。

最后，我会看你是否能说出本章的边界。一般均衡不是证明现实市场完美，而是提供一个基准：先说明在什么条件下价格能协调有效配置，再说明现实制度和政策为什么让这些条件失败。

8.19　核心文献

一般均衡理论的经典源头是 [Arrow and Debreu, 1954] 和 [Debreu, 1959]。[Mas-Colell et al., 1995] 对竞争均衡和福利定理有系统教材处理。增长理论中，[Acemoglu, 2009] 和 [Barro and Sala-i Martin, 2004] 会把一般均衡方法用于 Ramsey、OLG 和动态竞争均衡分析。递归竞争均衡和动态宏观的更深处理可继续参考 [Stokey et al., 1989]。

第三部分

Solow 与外生增长

第九章　Solow 模型：资本积累与稳态

9.1　本章导读

Solow 模型是现代增长理论的基准模型。它的重要性不在于“真实世界完全像 Solow 模型”，而在于它用最少的结构说明了一个非常深的问题：资本积累能够带来追赶增长，但如果资本边际产出递减，单靠资本积累不能永久维持人均收入增长。

这一章接在第二部分之后。第 5 章准备了生产函数、凹性和线性化，第 6 章准备了动态系统和相图，第 7 章说明了跨期最优选择，第 8 章说明了竞争均衡和计划者问题。现在我们先回到一个看似更简单的模型：储蓄率外生、技术水平暂时固定、资本按机械规律积累。这个“简单”不是退步，而是为了建立一个清楚的基准。后面的 Ramsey、OLG、内生增长、创新和中国增长章节，都会不断问：相比 Solow 基准，多了什么机制？改变了什么结论？

本章有四个核心任务。第一，从总量生产函数推导人均资本动态方程。第二，证明稳态存在、唯一并稳定。第三，区分储蓄率的水平效应和长期增长效应。第四，解释黄金律资本水平：为什么储蓄率太低会贫穷，太高也可能牺牲消费福利。

9.2　学习目标

学完本章，你应该能够：

1. 从 $Y = F(K, L)$ 和资本积累方程推导出人均资本动态。
2. 解释投资曲线、维持投资线、稳态资本和转移动态。
3. 在 Cobb-Douglas 情形下求出 k^*、y^*、c^*。
4. 证明 Solow 模型中正稳态唯一且局部稳定，并理解收敛速度。
5. 解释储蓄率、人口增长率、折旧率和生产率如何影响稳态收入水平。
6. 推导黄金律资本水平，并说明为什么“储蓄越高越好”是错的。
7. 用 Solow 语言初步整理中国高投资、资本深化和增长放缓的经验事实。

9.3 核心问题

Solow 模型从一个朴素故事开始：经济体把一部分产出储蓄起来，储蓄转化为投资，投资增加资本存量，资本帮助劳动者生产更多产出。这个故事听起来足以解释增长，但它马上遇到一个限制：如果每个工人已经拥有很多机器、厂房和基础设施，再增加一单位资本带来的额外产出通常会下降。

因此，Solow 模型的核心问题是：

> 在资本边际产出递减的经济中，资本积累能解释多少增长？它在哪里失效？长期人均增长还需要什么？

模型给出的基准答案是：资本积累可以解释收入水平差异和追赶过程，但不能解释没有技术进步时的永久人均增长。储蓄率提高会抬高稳态收入水平，并在转移过程中提高增长率；但一旦经济到达新稳态，人均资本和人均产出又停止增长。这个结论非常重要，因为它把“追赶增长”和“长期增长”分开了。

9.4 从直觉开始：资本为什么会带来追赶，也会遇到天花板

想象一个刚开始工业化的经济体。每个工人只有很少的机器、厂房、电力和交通基础设施。此时，多一台机器、多一条道路、多一个港口，可能显著提高生产效率。资本稀缺，所以资本的边际产出高。高储蓄和高投资能快速提高人均资本，进而带来高增长。

但随着资本越来越多，情况会变。已有很多高速公路时，再修一条路的边际贡献可能下降；已有大量厂房时，再建厂房未必能同等提高产出；每个工人已经配备很多设备时，再多一台设备可能闲置。资本仍然有用，但新增资本的作用变小了。

Solow 模型把这个直觉写成两条力量：

- **资本深化力量**：投资 $sf(k)$ 让人均资本增加。
- **维持资本力量**：人口增长和折旧 $(n+\delta)k$ 需要不断消耗投资，才能维持原有人均资本不变。

当投资大于维持投资时，资本上升；当投资小于维持投资时，资本下降；二者相等时，经济到达稳态。资本边际产出递减使投资曲线逐渐变平，而维持投资线是直线，所以二者通常只相交一次。

9.5 模型设定

9.5.1 生产

时间是连续的。经济体有总资本 $K(t)$、劳动 $L(t)$ 和产出 $Y(t)$。生产函数为

$$Y(t) = F(K(t), L(t)). \tag{9.1}$$

假设 F 满足规模报酬不变、资本和劳动边际产出为正、单个要素边际产出递减。规模报酬不变意味着对任意 $\lambda > 0$，

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L). \tag{9.2}$$

这条假设允许我们把总量模型转化为人均模型。令

$$k \equiv \frac{K}{L}, \qquad y \equiv \frac{Y}{L}. \tag{9.3}$$

则

$$y = \frac{F(K, L)}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) \equiv f(k). \tag{9.4}$$

为了得到闭式解，后文常用 Cobb-Douglas 形式：

$$F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \qquad A > 0, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{9.5}$$

对应的人均生产函数为

$$f(k) = Ak^{\alpha}. \tag{9.6}$$

这里 A 暂时固定。第 10 章会让技术随时间增长，并把模型放到平衡增长路径上。

9.5.2 人口、储蓄和资本积累

劳动按外生速度增长：

$$\dot{L} = nL, \qquad n \geq 0. \tag{9.7}$$

Solow 模型把储蓄率当作外生常数：

$$S = sY, \qquad 0 < s < 1. \tag{9.8}$$

封闭经济中储蓄等于投资，资本按折旧率 δ 损耗：

$$\dot{K} = sY - \delta K. \tag{9.9}$$

9.6 推导人均资本动态

人均资本为 $k = K/L$。对时间求导：

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} \tag{9.10}$$

$$= \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L}\frac{\dot{L}}{L}. \tag{9.11}$$

由 (9.9) 和 (9.7)，

$$\dot{k} = \frac{sY - \delta K}{L} - nk \tag{9.12}$$

$$= sf(k) - (\delta + n)k. \tag{9.13}$$

命题 9.1 (Solow 人均资本动态). *在规模报酬不变、外生储蓄率 s、人口增长率 n 和折旧率 δ 下，人均资本满足*

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k. \tag{9.14}$$

证明. 由 $k = K/L$ 得 $\dot{k} = \dot{K}/L - k\dot{L}/L$。资本积累方程给出 $\dot{K} = sY - \delta K$，人口增长方程给出 $\dot{L}/L = n$。代入后得到

$$\dot{k} = sY/L - \delta K/L - nK/L = sf(k) - (n + \delta)k. \tag{9.15}$$

其中 $Y/L = f(k)$ 来自规模报酬不变。 □

这条方程是本章的核心。左边是人均资本变化率；右边第一项 $sf(k)$ 是人均投资，第二项 $(n + \delta)k$ 是维持人均资本不变所需的投资。人口增长会稀释资本，折旧会损耗资本。即使总资本不变，只要人口增长，人均资本也会下降；即使人口不增长，只要资本折旧，也必须有投资来维持原有资本存量。

9.7 稳态：资本积累停在哪里

稳态定义为 $\dot{k} = 0$。由 (9.13)，

$$sf(k^*) = (n + \delta)k^*. \tag{9.16}$$

这句话的经济含义是：稳态时，新增投资刚好等于维持人均资本所需投资。若 $k < k^*$，通常 $sf(k) > (n + \delta)k$，人均资本上升；若 $k > k^*$，则人均资本下降。

图 9.1 使用 $A = 1$、$\alpha = 1/3$、$s = 0.30$、$n + \delta = 0.10$。投资曲线 $sf(k)$ 是凹的，因为资本边际产出递减；维持投资线 $(n + \delta)k$ 是直线，因为每多一单位人均资本，都需要固定比例的投资来抵消人口稀释和折旧。二者的交点就是稳态。

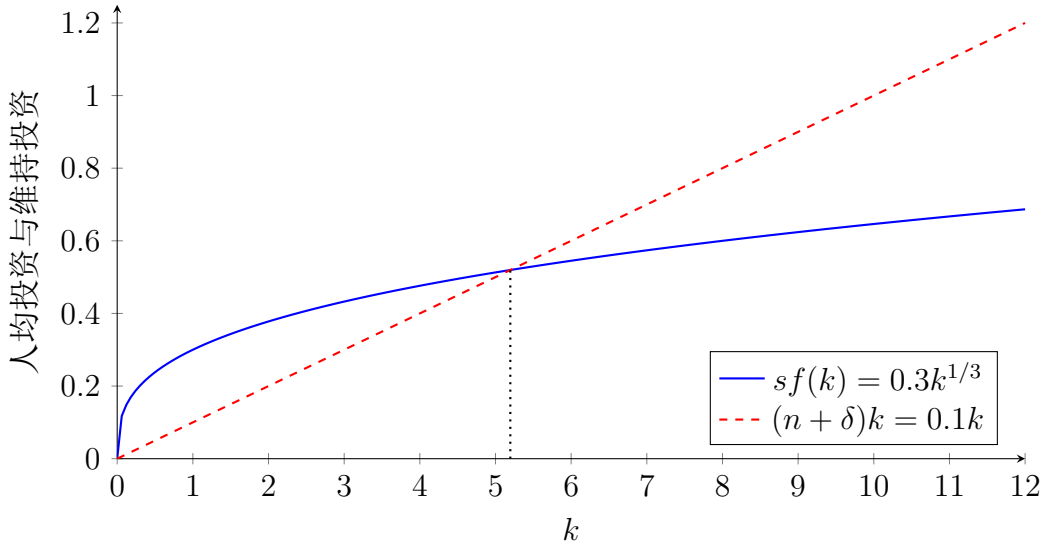

图 9.1: Solow 模型中的投资曲线、维持投资线与稳态

9.8　Cobb-Douglas 情形的闭式解

若 $f(k) = Ak^{\alpha}$，稳态条件为

$$sA(k^*)^{\alpha} = (n+\delta)k^*. \tag{9.17}$$

整理得

$$(k^*)^{1-\alpha} = \frac{sA}{n+\delta}, \tag{9.18}$$

因此

$$k^* = \left(\frac{sA}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{9.19}$$

稳态人均产出为

$$y^* = A(k^*)^{\alpha} = A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \tag{9.20}$$

稳态人均消费为

$$c^* = (1-s)y^*. \tag{9.21}$$

这些公式把模型的比较静态写得很清楚。储蓄率 s 越高，稳态资本和稳态产出越高；技术水平 A 越高，稳态产出越高；人口增长率 n 和折旧率 δ 越高，越多投资被用来维持资本，稳态资本和产出越低。

注意，s 提高的是稳态水平，不是长期增长率。在没有技术进步时，稳态上 $\dot{k} = 0$，所以 k、y 和 c 都不再增长。储蓄率提高会让经济经历一段转移增长，但最终增长率回到零。

9.9 数值例子：储蓄率改变的是水平，不是永久增长率

设 $A=1$、$\alpha=1/3$、$n+\delta=0.10$。表 9.1 比较不同储蓄率下的稳态。

表 9.1: 不同储蓄率下的 Solow 稳态

s	k^*	y^*	$c^*=(1-s)y^*$
0.10	1.000	1.000	0.900
0.20	2.828	1.414	1.131
0.30	5.196	1.732	1.212
0.40	8.000	2.000	1.200
0.50	11.180	2.236	1.118

这个表非常值得慢慢读。储蓄率从 0.10 提高到 0.30，稳态人均产出从 1.000 提高到 1.732，稳态消费也从 0.900 提高到 1.212。但储蓄率继续提高到 0.50 时，稳态产出继续提高，消费反而下降到 1.118。原因很简单：高储蓄带来更多资本和产出，但也意味着更少产出被直接用于消费。产出最大化和消费最大化不是同一个目标。

9.10 黄金律资本：储蓄不是越高越好

在稳态上，消费可以写成

$$c^*=f(k^*)-(n+\delta)k^*. \tag{9.22}$$

这是因为稳态投资必须等于维持投资。黄金律资本水平 k_{GR} 是使稳态消费最大化的资本水平：

$$\max_{k}\ f(k)-(n+\delta)k. \tag{9.23}$$

一阶条件为

$$f'(k_{GR})=n+\delta. \tag{9.24}$$

命题 9.2 (黄金律资本水平). *若 $f'(k)>0$ 且 $f''(k)<0$，则使稳态消费 $c=f(k)-(n+\delta)k$ 最大化的资本水平满足*

$$f'(k_{GR})=n+\delta. \tag{9.25}$$

在 Cobb-Douglas 情形 $f(k)=Ak^{\alpha}$ 下，

$$k_{GR}=\left(\frac{\alpha A}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{9.26}$$

证明. 稳态消费函数为 $c(k) = f(k) - (n+\delta)k$。对 k 求导得到

$$c'(k) = f'(k) - (n+\delta). \tag{9.27}$$

内部最优要求 $c'(k) = 0$，所以 $f'(k_{GR}) = n+\delta$。由于 $c''(k) = f''(k) < 0$，该点为唯一最大值。若 $f(k) = Ak^{\alpha}$，则 $f'(k) = \alpha A k^{\alpha-1}$，代入一阶条件并整理即可得到闭式解。 □

黄金律有一个很强的经济解释。若 $f'(k) > n+\delta$，多积累一单位资本带来的新增产出超过维持这单位资本所需成本，增加资本会提高长期消费。若 $f'(k) < n+\delta$，资本太多，多一单位资本的产出贡献不足以覆盖维持成本，减少资本反而能提高长期消费。

在 Cobb-Douglas 模型中，黄金律储蓄率有一个漂亮结果。稳态条件给出

$$s = \frac{(n+\delta)k^*}{f(k^*)}. \tag{9.28}$$

若 $k^* = k_{GR}$，则 $n+\delta = f'(k_{GR})$，所以

$$s_{GR} = \frac{f'(k_{GR})k_{GR}}{f(k_{GR})} = \alpha. \tag{9.29}$$

也就是说，在 Cobb-Douglas 情形下，黄金律储蓄率等于资本产出弹性。若资本份额约为三分之一，黄金律储蓄率也约为三分之一。这个结论不能机械套到现实政策上，但它提醒我们：高储蓄并不自动等于高福利。

9.11 稳定性与收敛速度

令

$$g(k) = sf(k) - (n+\delta)k. \tag{9.30}$$

稳态满足 $g(k^*) = 0$。在稳态附近，

$$\dot{k} \approx g'(k^*)(k - k^*). \tag{9.31}$$

对 Cobb-Douglas 生产函数，

$$g'(k) = sA\alpha k^{\alpha-1} - (n+\delta). \tag{9.32}$$

在稳态处，$sA(k^*)^{\alpha-1} = n+\delta$，所以

$$g'(k^*) = \alpha(n+\delta) - (n+\delta) = -(1-\alpha)(n+\delta) < 0. \tag{9.33}$$

命题 9.3 (Cobb-Douglas Solow 稳态的局部稳定性). *在 $f(k) = Ak^{\alpha}$、$0 < \alpha < 1$ 下，Solow 模型的正稳态唯一且局部稳定。稳态附近的收敛速度为*

$$\lambda = (1-\alpha)(n+\delta). \tag{9.34}$$

证明. 正稳态由 $sAk^{\alpha}=(n+\delta)k$ 给出，等价于 $k^{1-\alpha}=sA/(n+\delta)$，因此正稳态唯一。对动态方程右侧 $g(k)$ 求导，并在稳态处代入稳态条件，得到 $g'(k^*)=-(1-\alpha)(n+\delta)<0$。一维连续时间系统中，稳态处导数为负意味着局部稳定。若写成 $\dot{k}\approx-\lambda(k-k^*)$，则 $\lambda=(1-\alpha)(n+\delta)$。 □

收敛速度公式有两个含义。第一，资本边际产出递减越强，也就是 α 越小，经济越快接近稳态。第二，人口增长和折旧越高，维持投资线越陡，偏离稳态后的调整也越快。真实世界的收敛速度通常低于这个简单模型的预测，因此后续章节会加入人力资本、技术扩散、制度差异和资源错配。

9.12　全局稳定性：为什么不是只在稳态附近成立

上一节的线性化证明说明，只要经济已经靠近稳态，偏离会按近似指数速度消失。但学习 Solow 模型时，更重要的问题是：如果一个经济体一开始离稳态很远，模型是否仍然预言它会走向同一个稳态？在 Cobb–Douglas 情形下，答案是肯定的。

命题 9.4 (Cobb–Douglas Solow 模型的全局稳定性). 设 $f(k)=Ak^{\alpha}$，其中 $A>0$、$0<\alpha<1$，并且 $s>0$、$n+\delta>0$。对任意初始资本 $k_0>0$，动态方程

$$\dot{k}=sAk^{\alpha}-(n+\delta)k \tag{9.35}$$

的解单调地收敛到唯一正稳态

$$k^*=\left(\frac{sA}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{9.36}$$

若 $k_0<k^*$，则 $k(t)$ 上升；若 $k_0>k^*$，则 $k(t)$ 下降。

证明. 把动态方程写成

$$\dot{k}=k\left[sAk^{\alpha-1}-(n+\delta)\right]. \tag{9.37}$$

定义 $q(k)=sAk^{\alpha-1}-(n+\delta)$。因为 $\alpha-1<0$，$q(k)$ 对 k 严格递减。正稳态由 $q(k^*)=0$ 给出，且唯一。

若 $0<k<k^*$，则 $q(k)>0$，所以 $\dot{k}>0$；若 $k>k^*$，则 $q(k)<0$，所以 $\dot{k}<0$。因此，从任意 $k_0>0$ 出发，路径都朝向 k^* 单调移动，并且不会越过稳态。单调且有界的路径存在极限 $\bar{k}$。由动态方程连续性，若 $\bar{k}\neq k^*$，则 $\dot{k}$ 在极限附近仍保持非零符号，路径不可能收敛到 $\bar{k}$。所以 $\bar{k}=k^*$。 □

这个命题把“贫穷经济体追赶”的直觉说得更强：只要储蓄率、人口增长、折旧和技术水平固定，且生产函数具有标准递减报酬，经济不会停在某个低于稳态的任意位置。它要么在稳态以下积累资本，要么在稳态以上减少资本，最终都回到由参数决定的长期位置。真正的发展问题因此不是“是否会朝稳态移动”这么简单，而是稳态本身由什么决定，以及制度、技术和资源配置是否会移动稳态。

9.13　数据例子：投资率、追赶和增长放缓

Solow 模型不是数据本身，但它提供了一种读数据的方式。图 9.2 展示了 1980–2024 年中国、美国、韩国和印度的投资率。这里投资率用总资本形成占 GDP 比重近似，数据来自世界银行 WDI 的整理文件。

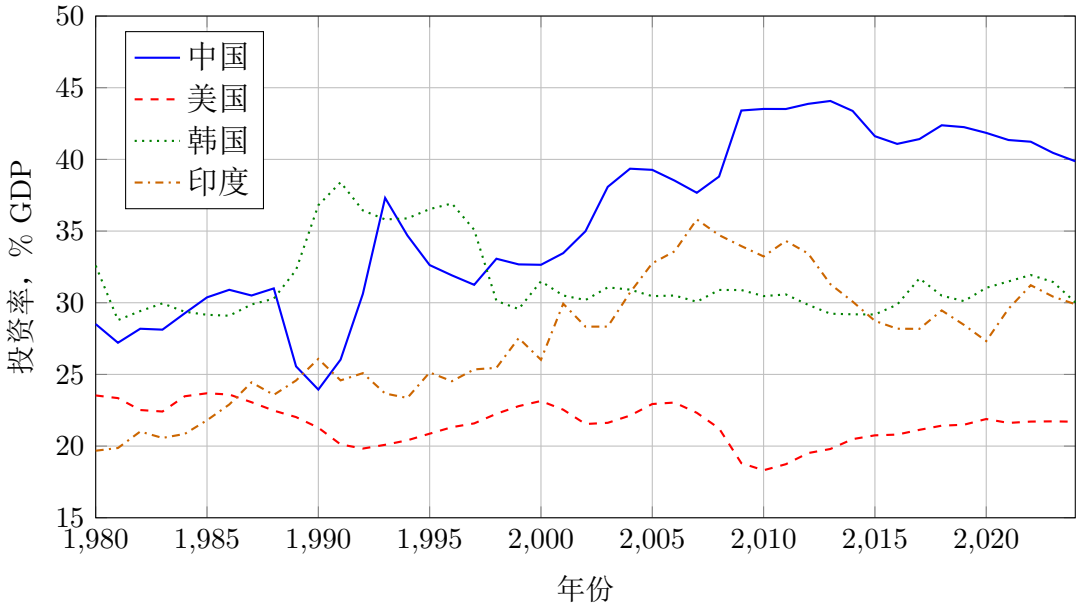

图 9.2: 投资率的跨国比较，1980–2024

这张图和 Solow 模型有直接关系。中国在很长时期内维持了显著高于美国的投资率，韩国也长期处在较高投资区间。按照 Solow 模型，这会推高稳态资本和稳态产出，并在经济低于稳态时带来快速转移增长。印度投资率也在 2000 年后明显上升，但其人均收入追赶速度仍受基础设施、人力资本、结构转型和制度环境影响。

表 9.2 把投资率和人均 GDP 放在一起。它不是对模型的严格检验，但可以帮助形成直觉：高投资率常常与资本深化和追赶阶段相伴随；但追赶是否持续，还取决于资本效率、技术吸收和制度环境。

Solow 模型能解释表中的一部分事实：低收入经济体如果有高投资率，可能经历资本深化和追赶。但它不能解释全部。中国和韩国的追赶不仅是投资率高，还包括产业升级、教育扩张、技术引进、出口学习和制度变迁。美国投资率较低但收入水平高，说明高 A、高人力资本和成熟制度同样重要。印度投资率上升后收入仍较低，提醒我们投资数量和投资效率不能混为一谈。

9.14　中国与发展延伸：高投资的两面

用 Solow 模型看中国增长，第一层解释是资本深化。改革开放初期，中国人均资本低，基础设施不足，制造业设备和城市资本存量都远低于发达经济体。高储蓄和高投

表 9.2: 若干年份的投资率与不变价人均 GDP

经济体	年份	投资率（% GDP）	人均 GDP，不变价美元
中国	1980	28.5	437
中国	2024	39.9	13,122
美国	1980	23.5	30,930
美国	2024	21.7	66,356
韩国	1980	32.6	4,140
韩国	2024	30.0	37,048
印度	1980	19.7	394
印度	2024	29.9	2,397

资使人均资本快速上升，资本边际产出在早期较高，因此能够支持高速增长。

第二层解释是转移动态。若一个经济体的初始资本 k_0 远低于稳态 k^*，则 $sf(k_0) > (n+\delta)k_0$，资本会快速积累。随着 k 接近 k^*，投资曲线和维持投资线之间的差距缩小，资本深化带来的增长自然放缓。这为理解中国增长从高速转向中高速提供了一个基准视角。

第三层解释是黄金律和资本效率。高投资率在资本稀缺阶段可能很有价值，但如果投资继续流向低回报项目，或者资本配置受到金融、土地、地方政府激励和国企预算约束影响，经济可能出现资本回报下降。Solow 模型本身不能解释资源错配，但它能提出一个清楚的问题：新增资本的边际产出是否仍然高于维持成本？如果不是，高投资就可能提高产出水平，却压低消费福利或降低全要素生产率。

因此，Solow 模型对中国增长的最好用法不是给出最终答案，而是建立一个基准分解：先问资本深化能解释多少，再问剩下的增长来自哪里；先问投资率提高如何改变稳态水平，再问投资效率和技术进步如何改变 A；先问经济是否在向某个稳态收敛，再问制度变化和结构转型是否移动了稳态本身。

9.15 常见误区

1. **把高储蓄率等同于永久高增长。**在基本 Solow 模型中，储蓄率提高带来水平效应和转移增长，但不带来永久人均增长。

2. **把稳态理解为经济停滞。**稳态是所选人均变量不再变化；加入技术进步后，总量和人均收入仍可能沿平衡增长路径增长。

3. **忽视人口增长的资本稀释作用。**即使总投资很高，人口增长也会提高维持人均资

本所需投资。

4. **认为投资越多越好。**黄金律说明消费福利最大化需要适度资本，资本过少和过多都可能降低稳态消费。

5. **把 Solow 模型当成完整发展理论。**它提供资本积累基准，但不能单独解释技术进步、人力资本、制度、产业结构和资源错配。

9.16 英文术语表

英文术语	中文含义与说明
Solow model	索洛模型，以外生储蓄率、资本积累和边际产出递减解释增长和稳态的基准模型。
Capital accumulation	资本积累，投资增加资本存量、折旧减少资本存量的过程。
Capital deepening	资本深化，人均资本或单位劳动资本上升。
Depreciation	折旧，资本因损耗、老化或维护不足而减少。
Dilution effect	稀释效应，人口增长使既有资本分摊到更多劳动者身上。
Steady state	稳态，人均资本不再变化的状态。
Break-even investment	维持投资，使人均资本保持不变所需的投资。
Transition dynamics	转移动态，经济从初始状态向稳态移动的过程。
Level effect	水平效应，参数变化改变长期收入水平而非长期增长率。
Golden rule capital	黄金律资本，使稳态消费最大化的资本水平。
Convergence speed	收敛速度，偏离稳态后回到稳态附近的速度。

9.17 本章 Review

如果我来 review 你对本章的理解，第一条标准是你能否从总量生产函数走到人均资本动态，而不是只背稳态公式。你应该能写出

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k,$$

并解释投资曲线、维持投资线和二者交点的含义。

第二，我会检查你是否理解“水平效应”和“增长效应”的区别。储蓄率提高会提高稳态资本和稳态产出，并在转移期提高增长率；但在没有技术进步时，它不能永久提高人均增长率。若你把高储蓄直接等同于长期增长，说明还停在 Solow 模型最容易误读的地方。

第三，你应该能解释收敛机制。资本边际产出递减使贫资本经济体在转移期增长更快，但这不自动意味着所有国家都会绝对收敛；储蓄率、人口增长、折旧、技术和制度差异会让各国稳态不同。

最后，我会看你是否能把 Solow 用作基准语言分析中国和发展经济体。高投资能推动资本深化和追赶，但当增长放缓时，真正的问题是资本边际回报、技术进步、资源错配和结构转型哪一项发生了变化。

9.18 核心文献

Solow 模型的经典来源是 [Solow, 1956] 和 [Swan, 1956]。[Jones and Vollrath, 2013] 对模型直觉和事实连接讲解清楚，[Barro and Sala-i Martin, 2004] 和 [Acemoglu, 2009] 提供更系统的研究生处理。[Mankiw et al., 1992] 将 Solow 框架扩展到人力资本和条件收敛实证，是第 11 章的重要入口。理解中国资本深化和生产率变化时，可以结合 [Young, 1995] 与 [Zhu, 2012]。

第十章　技术进步与平衡增长路径

10.1　本章导读

第 9 章的 Solow 模型故意把技术水平固定下来。这样做让资本积累机制变得清楚：储蓄提高人均资本，资本边际产出递减使经济走向稳态；没有技术进步时，人均资本和人均产出最终停止增长。但这也留下一个明显问题：现代经济最重要的事实恰恰是长期人均收入持续增长。若基本 Solow 模型不能解释这一点，我们必须把技术进步放进模型。

本章做两件事。第一，把技术进步作为外生变量加入 Solow 模型，并说明为什么通常写成劳动增进型技术进步，也就是 Harrod-neutral technical progress。第二，解释平衡增长路径。平衡增长路径不是“所有变量同速增长”的粗略说法，而是一组非常强的长期限制：人均产出和人均资本以技术进步率增长，资本产出比保持常数，资本和劳动收入份额保持稳定，实际工资随技术进步上升，资本回报率不呈长期趋势。

这章比第 9 章更接近研究生增长课的核心。因为一旦要求模型同时解释持续人均增长和 Kaldor facts，生产函数和技术进步形式就不能随便写。后面的 Ramsey、Romer、半内生增长和创新模型，都必须通过这道门。

10.2　学习目标

学完本章，你应该能够：

1. 解释为什么基本 Solow 模型需要外生技术进步才能产生持续人均增长。
2. 推导劳动增进型技术进步下的有效劳动单位资本动态。
3. 求出有效劳动稳态，并说明平衡增长路径上各变量的增长率。
4. 理解 Kaldor facts 对增长模型的约束。
5. 说明为什么 Harrod-neutral 技术进步在平衡增长分析中具有特殊地位。
6. 区分总量增长、人均增长和有效劳动单位变量的稳定。
7. 用数据图像理解长期人均收入增长与阶段性追赶。

10.3 核心问题

第 9 章告诉我们，若生产函数为 $Y = F(K, L)$ 且技术固定，资本边际产出递减会使人均资本收敛到稳态。一旦 k 不再增长，$y = f(k)$ 也不再增长。因此，若要解释长期人均收入持续增长，模型必须引入某种让生产函数持续向外移动的力量。

本章的核心问题是：

> 什么形式的技术进步能够让人均收入持续增长，同时又不破坏资本产出比、要素收入份额和资本回报率的长期稳定？

这个问题比“把 A_t 加进生产函数”更严格。技术进步可以是资本增进型、劳动增进型、中性技术进步，甚至改变资本和劳动替代弹性。但并不是所有形式都能产生与长期事实相容的平衡增长路径。增长理论之所以偏爱劳动增进型技术进步，不是因为它最容易写，而是因为它最容易同时容纳持续人均增长和长期比例关系稳定。

10.4 Kaldor facts：模型要尊重的长期事实

增长理论不是在真空里选择技术形式。Kaldor 总结的长期增长事实为现代增长模型提供了基准约束。不同教材表述略有差异，但最核心的事实包括：

1. 人均产出长期持续增长。
2. 人均资本长期持续增长。
3. 资本产出比 K/Y 在长时期内没有明显趋势。
4. 资本回报率没有长期单调下降或上升趋势。
5. 资本和劳动收入份额相对稳定。
6. 不同经济体之间增长率和收入水平存在巨大差异。

这些事实之间有张力。若人均资本持续增长而资本边际产出递减很强，资本回报率似乎应该持续下降；但长期数据中资本回报率并没有简单地一路下降。若技术进步只增强资本，资本收入份额可能不断上升；但许多长期样本中劳动份额和资本份额相对稳定。平衡增长路径就是为了解决这类张力而提出的模型语言。

10.5 加入劳动增进型技术进步

令技术水平 $A(t)$ 按外生速度增长：

$$\dot{A} = gA, \qquad g \geq 0. \tag{10.1}$$

劳动仍按速度 n 增长：

$$\dot{L} = nL. \tag{10.2}$$

劳动增进型技术进步把生产函数写成

$$Y = F(K, AL). \tag{10.3}$$

这里 AL 称为有效劳动。一个工人配备更高技术水平后，相当于提供更多有效劳动。若 A 翻倍，同样数量的劳动者能以更高效率使用资本和组织生产。

假设 F 对 K 和 AL 规模报酬不变。定义有效劳动单位资本和产出：

$$\tilde{k} \equiv \frac{K}{AL}, \qquad \tilde{y} \equiv \frac{Y}{AL}. \tag{10.4}$$

由规模报酬不变，

$$\tilde{y} = F\left(\frac{K}{AL}, 1\right) \equiv f(\tilde{k}). \tag{10.5}$$

资本积累仍然为

$$\dot{K} = sY - \delta K. \tag{10.6}$$

与第 9 章不同的是，现在分母不是 L，而是 AL。有效劳动增长率为

$$\frac{(\dot{AL})}{AL} = g + n. \tag{10.7}$$

因此

$$\dot{\tilde{k}} = \frac{\dot{K}}{AL} - \tilde{k}\frac{(\dot{AL})}{AL} \tag{10.8}$$

$$= sf(\tilde{k}) - \delta\tilde{k} - (n+g)\tilde{k} \tag{10.9}$$

$$= sf(\tilde{k}) - (n+g+\delta)\tilde{k}. \tag{10.10}$$

命题 10.1 (含劳动增进型技术进步的 Solow 动态)**.** *若 $Y = F(K, AL)$、F 对 K 和 AL 规模报酬不变、$\dot{A}/A = g$、$\dot{L}/L = n$，则有效劳动单位资本满足*

$$\dot{\tilde{k}} = sf(\tilde{k}) - (n+g+\delta)\tilde{k}. \tag{10.11}$$

证明. 由 $\tilde{k} = K/(AL)$，有

$$\dot{\tilde{k}} = \frac{\dot{K}}{AL} - \tilde{k}\frac{(\dot{AL})}{AL}. \tag{10.12}$$

资本积累方程给出 $\dot{K} = sY - \delta K$，而有效劳动增长率为 $n+g$。代入得到

$$\dot{\tilde{k}} = sY/(AL) - \delta K/(AL) - (n+g)K/(AL). \tag{10.13}$$

由规模报酬不变，$Y/(AL) = f(\tilde{k})$，所以

$$\dot{\tilde{k}} = sf(\tilde{k}) - (n+g+\delta)\tilde{k}. \tag{10.14}$$

□

这个方程和第 9 章的 Solow 方程完全平行，只是维持投资项从 $(n+\delta)k$ 变成了 $(n+g+\delta)\tilde{k}$。技术进步提高了有效劳动数量，因此每单位有效劳动要维持原有资本水平，需要额外投资。

10.6 有效劳动稳态

有效劳动稳态满足

$$sf(\tilde{k}^*) = (n+g+\delta)\tilde{k}^*. \tag{10.15}$$

若 $f(\tilde{k}) = \tilde{k}^\alpha$，其中 $0 < \alpha < 1$，则

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{10.16}$$

且

$$\tilde{y}^* = (\tilde{k}^*)^\alpha = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \tag{10.17}$$

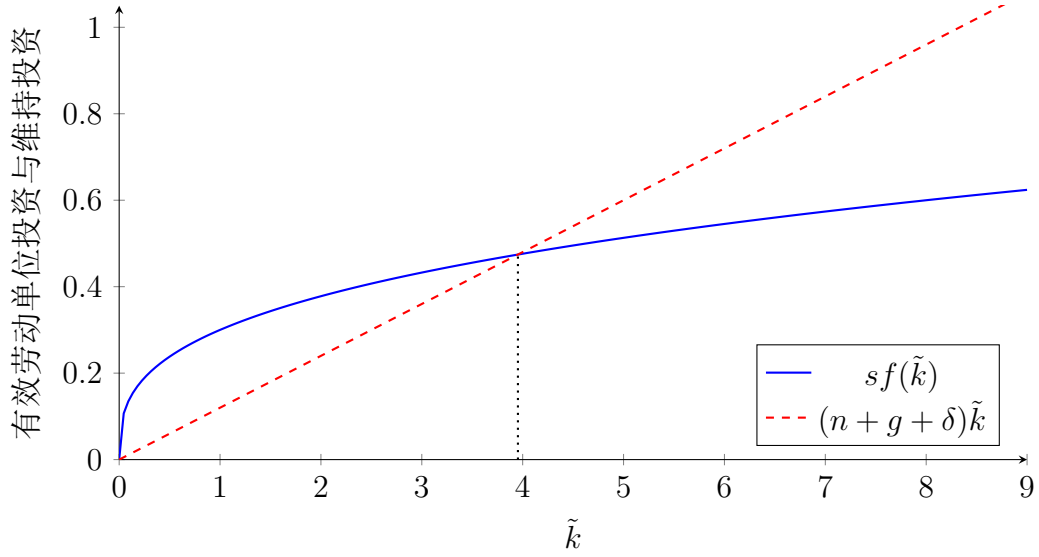

图 10.1: 含技术进步的 Solow 模型：有效劳动单位稳态

图 10.1 使用 $s = 0.30$、$\alpha = 1/3$、$n+g+\delta = 0.12$。与第 9 章相比，技术进步率 g 进入维持投资项，意味着同样的有效劳动单位资本需要更多投资来维持。直觉是：技术进步让有效劳动持续增加，资本必须跟上有效劳动扩张，才能保持 $\tilde{k} = K/(AL)$ 不变。

10.7 平衡增长路径上的增长率

当 $\tilde{k}$ 收敛到 $\tilde{k}^*$ 后，$\tilde{y} = f(\tilde{k})$ 也保持不变。但这不意味着人均产出停止增长。因为普通人均产出为

$$\frac{Y}{L} = A\frac{Y}{AL} = A\tilde{y}. \tag{10.18}$$

若 $\tilde{y}$ 不变而 A 以速度 g 增长，则人均产出以速度 g 增长。同理，

$$\frac{K}{L} = A\tilde{k}, \tag{10.19}$$

所以人均资本也以速度 g 增长。总产出为

$$Y = AL\tilde{y}, \tag{10.20}$$

因此总产出以速度 $n+g$ 增长。总资本同理也以速度 $n+g$ 增长。

表 10.1: 平衡增长路径上的变量增长率

变量	表达式	BGP 增长率
有效劳动单位资本	$\tilde{k} = K/(AL)$	0
有效劳动单位产出	$\tilde{y} = Y/(AL)$	0
人均资本	$K/L = A\tilde{k}$	g
人均产出	$Y/L = A\tilde{y}$	g
总资本	$K = AL\tilde{k}$	$n+g$
总产出	$Y = AL\tilde{y}$	$n+g$
实际工资	$w = A[F_2(\tilde{k}, 1)]$	g
资本回报	$r = F_1(\tilde{k}, 1) - \delta$	0

表 10.1 是本章最重要的表。它说明了三个层次：有效劳动单位变量不增长，人均变量以技术进步率增长，总量变量以人口增长率加技术进步率增长。很多学习者混淆 Solow 模型，就是因为没有区分这三层。

10.8 资本产出比和要素份额为什么稳定

平衡增长路径还解释了资本产出比为什么可以保持稳定。由于

$$\frac{K}{Y} = \frac{AL\tilde{k}}{ALf(\tilde{k})} = \frac{\tilde{k}}{f(\tilde{k})}, \tag{10.21}$$

当 $\tilde{k} = \tilde{k}^*$ 不变时，K/Y 也不变。

若生产函数为 Cobb-Douglas，

$$Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}, \tag{10.22}$$

竞争市场下资本收入份额为

$$\frac{RK}{Y} = \frac{F_K K}{Y} = \alpha, \tag{10.23}$$

劳动收入份额为 $1-\alpha$。因此要素收入份额天然稳定。资本净回报为

$$r = F_K - \delta = \alpha \left(\frac{K}{AL}\right)^{\alpha-1} - \delta = \alpha \tilde{k}^{\alpha-1} - \delta. \tag{10.24}$$

在 BGP 上 $\tilde{k}$ 不变，所以 r 不变。

命题 10.2 (劳动增进型技术进步下的 BGP 比例关系). *设 $Y = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, 且 $\tilde{k}$ 在平衡增长路径上保持常数。则 K/Y、资本收入份额、劳动收入份额和资本回报率均保持常数，人均产出和实际工资以速度 g 增长。*

证明. 若 $\tilde{k} = K/(AL)$ 为常数，则

$$Y = AL\tilde{k}^\alpha. \tag{10.25}$$

所以 $Y/L = A\tilde{k}^\alpha$，以速度 g 增长。资本产出比为

$$K/Y = (AL\tilde{k})/(AL\tilde{k}^\alpha) = \tilde{k}^{1-\alpha}, \tag{10.26}$$

因此为常数。竞争条件下 $F_K K/Y = \alpha$, $F_L L/Y = 1-\alpha$，故要素收入份额为常数。资本回报率 $r = F_K - \delta = \alpha\tilde{k}^{\alpha-1} - \delta$，也为常数。实际工资等于劳动边际产出 $F_L = (1-\alpha)A\tilde{k}^\alpha$，因此以速度 g 增长。 □

这个命题解释了为什么劳动增进型技术进步如此有用。它让人均收入持续增长，同时保留资本产出比和要素份额稳定。若模型无法同时做到这两件事，它就很难作为长期增长基准。

10.9 为什么强调 Harrod-neutral 技术进步

技术进步可以有不同写法。最常见的三种是：

$$Y = AF(K, L) \qquad \text{Hicks-neutral,} \tag{10.27}$$

$$Y = F(AK, L) \qquad \text{capital-augmenting,} \tag{10.28}$$

$$Y = F(K, AL) \qquad \text{labor-augmenting / Harrod-neutral.} \tag{10.29}$$

在 Cobb-Douglas 情形下，这几种写法有时可以互相转换，因为幂函数结构非常特殊。但在更一般的生产函数中，它们对长期比例关系的含义不同。

命题 10.3 (Uzawa 定理的证明思路). *在标准新古典环境中，如果经济存在非退化的平衡增长路径，并且长期资本产出比、资本回报率和要素收入份额都保持稳定，那么长期技术进步必须渐近地表现为劳动增进型。这个结论通常称为 Uzawa 定理。*

证明. 这里给出证明思路，而不是最一般形式的完整证明。设生产函数具有规模报酬不变，竞争性要素市场使资本和劳动分别获得边际产出报酬。平衡增长路径要求 K/Y 稳定，因此 K 和 Y 必须以同一速度增长；同时，资本净回报率若要稳定，资本边际产出 F_K 不能出现长期趋势。

若技术进步主要写成资本增进型 $Y = F(BK, L)$，且 B 持续增长，那么有效资本 BK 相对于劳动会持续上升。除非生产函数采取非常特殊的形式或参数恰好抵消，否则 F_K、资本份额或资本产出比会出现系统性趋势。这会破坏 Kaldor facts 中资本产出比和要素份额相对稳定的要求。

劳动增进型写法 $Y = F(K, AL)$ 则不同。只要 K 和 AL 以同一速度增长，$K/(AL)$ 就可以保持稳定；在规模报酬不变和竞争性定价下，资本产出比、资本边际产出和要素份额也可以同时稳定。因此，平衡增长路径不是随便允许任何技术进步形式，而是对技术进步形式施加了强约束：长期可持续的人均增长必须能够被重新表述为有效劳动的持续提高。 □

这个证明思路的教学意义很大。它说明 Harrod-neutral 不是符号上的方便，而是长期比例事实对模型的筛选。如果一个模型能产生技术进步，却让资本回报率长期爆炸或劳动份额长期趋近于零，它也许能描述某个过渡阶段，但很难成为长期增长的基准模型。

研究生增长理论中的 Uzawa 定理给出一个强结论：在标准新古典条件下，若经济存在非退化的平衡增长路径，并且资本回报率、资本产出比和要素份额长期稳定，则技术进步必须渐近地表现为劳动增进型。完整证明需要更一般的生产函数和技术变化表示，本章只强调经济含义：平衡增长不是任何技术进步形式都能支持的，长期稳定比例关系会反过来限制技术进步的形式。

直觉可以这样理解。若技术进步主要增强资本，资本相对劳动会越来越有效，资本收入份额和资本回报可能出现趋势性变化；若技术进步以劳动增进形式出现，资本必须与有效劳动一起扩张，才能保持资本产出比稳定。换句话说，劳动增进型技术进步把“技术提高劳动效率”和“资本与有效劳动保持长期比例”放在同一个结构里。

10.10 数据例子：人均收入的长期上升与追赶

图 10.2 使用本项目已有的世界银行不变价人均 GDP 数据，画出中国、美国、韩国和印度的人均 GDP 对数。对数图的斜率近似增长率，因此它比普通水平图更适合观察长期增长速度。

这张图有三层含义。第一，所有经济体的人均收入都有长期上升趋势，说明固定技术的 Solow 模型不够。第二，中国和韩国的斜率在若干时期高于美国，说明追赶经济体不仅有技术进步，还可能有资本深化和技术吸收带来的转移增长。第三，印度的增长加速较晚，提醒我们平衡增长路径只是长期语言，实际经济会经历结构转型、政策变化、

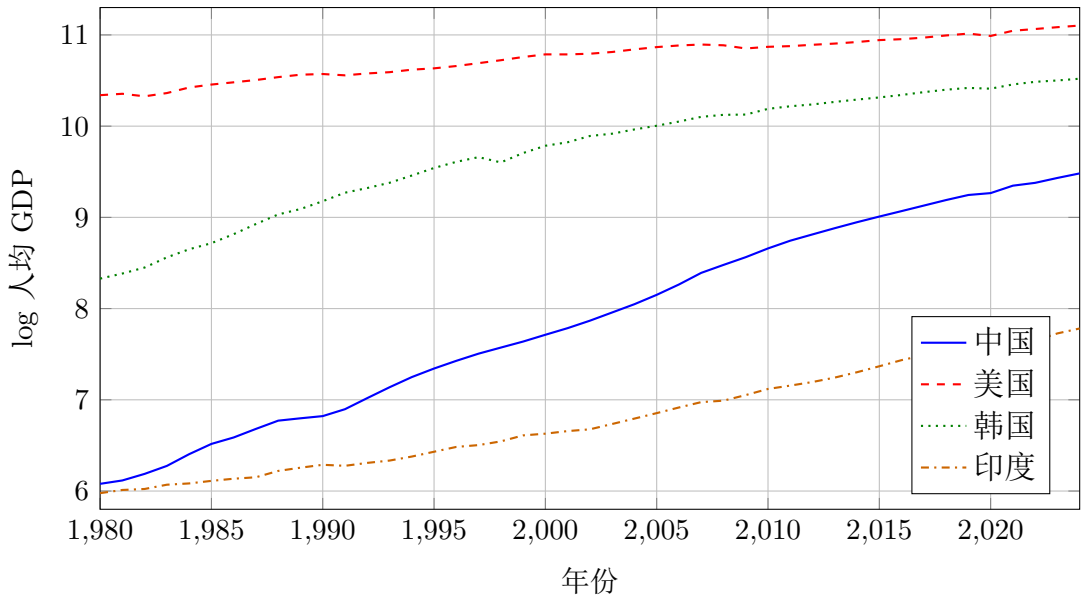

图 10.2: 人均 GDP 对数路径，1980–2024

外部冲击和制度摩擦。

表 10.2 把 1980 和 2024 年的人均 GDP 放在一起，并计算近似年均对数增长率。这里的增长率是描述性事实，不是因果估计。

表 10.2: 人均 GDP 的长期变化，1980–2024

经济体	1980	2024	近似年均对数增长率
中国	437	13,122	7.7%
美国	30,930	66,356	1.7%
韩国	4,140	37,048	5.0%
印度	394	2,397	4.1%

在 Solow 语言中，美国更接近平衡增长路径，其长期人均增长更接近技术进步率。中国和韩国在样本期内包含强烈追赶成分，增长率高于前沿经济体并不意味着其长期 g 永久更高；它也可能反映资本深化、结构转型、技术引进和资源再配置。第 12 章会进一步讨论如何区分这些机制。

10.11　数据例子：资本产出比与劳动份额

Kaldor facts 不能只停留在文字上。表 10.3 使用 Penn World Table 中的资本产出比 K/Y、劳动收入份额和 TFP 指数，给出中国、美国、韩国和印度在 1980、2000 和

2019 年的截面快照。这里的数据不是对某个模型的因果检验，而是帮助我们看见平衡增长路径所要求的比例关系在现实中大致长什么样。

表 10.3: PWT 中的资本产出比、劳动份额与 TFP 指数

经济体	年份	K/Y	劳动收入份额	TFP 指数
中国	1980	1.39	0.59	0.77
中国	2000	2.32	0.59	0.78
中国	2019	4.94	0.59	0.97
美国	1980	3.98	0.62	0.79
美国	2000	3.49	0.64	0.91
美国	2019	3.36	0.60	1.02
韩国	1980	3.84	0.59	0.52
韩国	2000	4.88	0.51	0.80
韩国	2019	5.11	0.52	1.01
印度	1980	4.22	0.74	0.62
印度	2000	3.62	0.60	0.75
印度	2019	3.87	0.52	1.02

这张表有三点值得读。第一，美国的资本产出比和劳动份额相对平稳，比较接近“前沿经济体围绕平衡增长路径波动”的图景。第二，中国的资本产出比在样本期内明显上升，这说明中国长期处在强烈资本深化和转型过程中，不能简单把它当成已经到达 BGP 的经济体。第三，韩国和印度提醒我们，劳动份额和资本产出比也会受结构转型、产业构成、统计口径和资本质量影响。因此，表中的比例关系是理论约束的入口，而不是理论的终点。

10.12　中国与发展延伸：从资本深化到技术进步

第 9 章强调中国增长中的高投资和资本深化。本章提醒我们，资本深化不是全部。若没有持续技术进步，资本边际产出递减最终会让人均增长放缓。中国要从追赶增长转向更高质量的长期增长，关键问题就从“投资多少”逐渐转向“技术、组织、制度和人力资本如何提高有效劳动和全要素生产率”。

劳动增进型技术进步可以宽泛理解为每个劳动者能够使用更好的技术、组织方式和知识体系。对中国而言，这包括教育和技能提升、企业管理改进、供应链能力、数字

化基础设施、研发投入、技术扩散、城市匹配效率和制度环境改善。它们不都等同于狭义发明，但都可能提高单位劳动的有效生产能力。

同时，本章也给出一个警惕：如果增长主要依赖资本深化，资本产出比可能上升，资本回报可能下降；如果技术进步能够持续提高有效劳动，经济才更可能在较稳定的资本产出比下维持人均收入增长。因此，讨论中国增长放缓时，不能只问投资率是否下降，还要问技术进步率、资源配置效率和劳动质量是否足以支撑新的平衡增长路径。

10.13 常见误区

1. **把技术进步当成一个随便加进去的残差。**在平衡增长分析中，技术进步的形式会影响资本产出比、要素份额和资本回报率。
2. **混淆人均变量和有效劳动单位变量。** BGP 上 $\tilde{k}$ 和 $\tilde{y}$ 不增长，但 K/L 和 Y/L 以 g 增长。
3. **以为平衡增长路径意味着现实经济总在稳态上。** BGP 是长期基准，现实路径可能长期处于转移动态、结构转型或冲击调整中。
4. **把追赶增长率当成永久技术进步率。**后发经济体的高增长可能来自资本深化和技术吸收，不一定代表长期前沿技术增长率更高。
5. **忽视 Kaldor facts 的约束。**一个增长模型如果能产生人均增长，却让资本产出比或收入份额出现荒唐趋势，就不适合作为长期基准。

10.14 英文术语表

英文术语	中文含义与说明
Technological progress	技术进步，使给定要素能够生产更多产出的变化。
Labor-augmenting technology	劳动增进型技术，使每单位劳动变得更有效率的技术进步。
Harrod-neutral technical progress	哈罗德中性技术进步，通常与劳动增进型技术进步同义。
Effective labor	有效劳动，技术水平与劳动数量的乘积 AL。
Balanced growth path	平衡增长路径，关键比例变量稳定而总量和人均变量按固定速度增长的路径。

Kaldor facts	卡尔多事实，关于长期增长中人均产出、资本产出比和要素份额等稳定关系的经验概括。
Capital-output ratio	资本产出比，资本存量与产出的比值 K/Y。
Factor shares	要素收入份额，资本和劳动收入在总产出中的占比。
Uzawa theorem	宇泽定理，说明平衡增长条件对技术进步形式的限制。
Transition growth	转移增长，经济向长期路径移动过程中出现的阶段性高增长或低增长。

10.15 本章 Review

如果我来 review 你对本章的理解，第一条标准是你是否能解释为什么 Solow 模型必须加入技术进步才能解释永久人均增长。你应该能把状态变量从 $k = K/L$ 改成 $\tilde{k} = K/(AL)$，并写出

$$\dot{\tilde{k}} = sf(\tilde{k}) - (n + g + \delta)\tilde{k}.$$

第二，我会检查你是否真正理解平衡增长路径。BGP 不是“所有变量都不变”，而是有效劳动单位变量稳定、人均变量以 g 增长、总量变量以 $n + g$ 增长，同时资本产出比、资本回报率和要素收入份额保持相对稳定。

第三，你应该能说明为什么劳动增进型技术进步不是随便选的。Uzawa 定理的直觉是：若长期资本产出比和资本回报率要稳定，技术进步必须能被表示为有效劳动的提高。

最后，我会看你是否能把本章和发展经验连接起来。资本深化解释追赶阶段的一部分高增长，但越接近较高收入水平，持续增长越依赖技术、组织效率、人力资本和资源配置改善。

10.16 核心文献

Solow 模型中的技术进步和长期增长基准可从 [Solow, 1956] 与 [Swan, 1956] 开始。[Kaldor, 1961] 总结的长期增长事实构成平衡增长分析的重要背景。关于劳动增进型技术进步和平衡增长限制，可参考 [Uzawa, 1961]。教材处理可见 [Jones and Vollrath, 2013]、[Barro and Sala-i Martin, 2004]、[Romer, 2019] 和 [Acemoglu, 2009]。

第十一章　人力资本与 MRW 模型

11.1　本章导读

第 9 章和第 10 章建立了 Solow 模型的核心逻辑：资本积累解释转移动态，劳动增进型技术进步解释平衡增长路径上的持续人均增长。但这套模型仍有一个明显缺口。现实中，劳动不是同质的。一个受过更多教育、拥有更高技能、更好健康状况和更强组织能力的劳动者，不能简单地和另一个劳动者按人数相加。若只用物质资本 K 和劳动人数 L，我们会把大量与教育和技能有关的差异塞进残差 A。

Mankiw, Romer, and Weil (1992) 的贡献，是把人力资本系统加入 Solow 框架。他们问：如果不同国家不仅物质资本积累不同，人力资本积累也不同，那么 Solow 模型解释跨国收入差异的能力会不会明显增强？答案是会增强，但也会带来新的问题：人力资本如何测量？学校教育能否代表人力资本？横截面回归能否被解释为因果关系？本章既讲模型，也讲这些实证解释上的边界。

这章的目标不是把“教育重要”说成一句口号，而是把人力资本放进增长模型的方程里。你会看到，人力资本使稳态收入对积累率更敏感，也会降低收敛速度；这正是 MRW 模型在经验增长研究中的核心位置。

11.2　学习目标

学完本章，你应该能够：

1. 解释为什么标准 Solow 模型容易低估要素积累对收入差异的作用。
2. 写出含物质资本和人力资本的 Cobb-Douglas 生产函数。
3. 推导物质资本和人力资本的有效劳动单位动态。
4. 求出双资本模型的稳态，并推导稳态收入方程。
5. 解释 MRW 回归中储蓄率、人口增长率和人力资本变量的系数含义。
6. 理解条件收敛与绝对收敛的区别。
7. 用 PWT 人力资本指数和增长核算表观察中国、美国、韩国和印度的经验差异。

11.3　核心问题

第 10 章把技术进步写成 A，但 A 很宽。它可能代表狭义技术，也可能代表教育、健康、管理、制度、资源配置和测量误差。人力资本模型的第一步，是把其中一部分从残差中拿出来，变成一个可以积累的状态变量。

本章的核心问题是：

> 加入人力资本后，Solow 模型能否更好解释跨国收入差异和条件收敛？如果能，它解释的是机制，还是只是更好地拟合数据？

这个问题必须小心回答。MRW 模型不是说教育变量的回归系数就是教育的因果效应，也不是说所有国家都共享同一个生产函数和同一套制度环境。它更像一个强基准：如果把人力资本加入新古典增长框架，收入差异、投资率、人口增长和收敛速度之间应该呈现什么关系？

11.4　为什么标准 Solow 模型可能不够

标准 Solow 模型中，人均产出由物质资本和技术决定：

$$Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}. \tag{11.1}$$

若 α 约为三分之一，稳态收入对储蓄率的弹性为 $\alpha/(1-\alpha) \approx 1/2$。这意味着，即使一个国家储蓄率显著更高，模型预测的收入差异也有限。可是现实中的跨国收入差异非常大，低收入国家和高收入国家之间常常相差十倍甚至更多。

一种反应是说：差异都来自 A。这当然可能，但如果 A 包含了教育和技能，那么我们其实没有真正解释劳动质量差异。另一种反应是把人力资本作为独立生产要素加入模型。这样，收入差异不仅来自物质资本深度，也来自劳动者技能和知识积累。

人力资本还有一个动态含义。若经济积累的不只是机器，还有教育、经验和健康，资本边际产出递减会变弱。物质资本增加时，若人力资本同步提高，新增机器更容易被有效使用；人力资本提高时，若物质资本也充足，技能更容易转化为产出。因此，双资本模型通常比单资本 Solow 模型预测更慢的收敛速度。

11.5　模型设定

设生产函数为

$$Y = K^{\alpha}H^{\beta}(AL)^{1-\alpha-\beta}, \qquad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha + \beta < 1. \tag{11.2}$$

其中 K 是物质资本，H 是人力资本，AL 是有效原始劳动。条件 $\alpha + \beta < 1$ 保证对可积累资本 K 和 H 存在联合边际报酬递减；若 $\alpha + \beta$ 接近 1，模型会非常接近 AK 型增长，收敛会变慢。

技术和劳动按外生速度增长：

$$\dot{A} = gA, \qquad \dot{L} = nL. \tag{11.3}$$

物质资本和人力资本的积累方程为

$$\dot{K} = s_K Y - \delta K, \tag{11.4}$$

$$\dot{H} = s_H Y - \delta H. \tag{11.5}$$

这里 s_K 是物质资本投资率，s_H 是人力资本投资率。MRW 的实证处理中，s_K 常用实物投资占 GDP 比重近似，s_H 常用中学入学率等教育变量近似。这个近似很粗，但它提供了可检验的模型入口。

定义有效劳动单位变量：

$$k \equiv \frac{K}{AL}, \qquad h \equiv \frac{H}{AL}, \qquad y \equiv \frac{Y}{AL}. \tag{11.6}$$

由 (11.2)，

$$y = k^{\alpha} h^{\beta}. \tag{11.7}$$

11.6 双资本动态方程

对 $k = K/(AL)$ 求导，和第 10 章一样：

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{AL} - k(n+g). \tag{11.8}$$

代入 (11.4) 得

$$\dot{k} = s_K k^{\alpha} h^{\beta} - (n+g+\delta)k. \tag{11.9}$$

同理，

$$\dot{h} = s_H k^{\alpha} h^{\beta} - (n+g+\delta)h. \tag{11.10}$$

命题 11.1 (MRW 模型的有效劳动单位动态). *在生产函数 (11.2) 和资本积累方程 (11.4)–(11.5) 下，有效劳动单位物质资本和人力资本满足*

$$\dot{k} = s_K k^{\alpha} h^{\beta} - (n+g+\delta)k, \tag{11.11}$$

$$\dot{h} = s_H k^{\alpha} h^{\beta} - (n+g+\delta)h. \tag{11.12}$$

证明. 由 $k = K/(AL)$ 和 $h = H/(AL)$，分别有

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{AL} - k(n+g), \qquad \dot{h} = \frac{\dot{H}}{AL} - h(n+g). \tag{11.13}$$

将 $\dot{K} = s_K Y - \delta K$、$\dot{H} = s_H Y - \delta H$ 代入，并使用 $Y/(AL) = k^{\alpha} h^{\beta}$，即可得到两条动态方程。 □

这组方程比 Solow 模型多了一个状态变量。相图不再是一条投资曲线和一条维持投资线，而是在 (k, h) 平面中寻找两条零增长曲线。直觉仍然相同：物质资本和人力资本都有流入，也都有折旧和有效劳动稀释。

11.7 稳态推导

令

$$\eta \equiv n + g + \delta. \tag{11.14}$$

稳态满足

$$s_K (k^*)^\alpha (h^*)^\beta = \eta k^*, \tag{11.15}$$

$$s_H (k^*)^\alpha (h^*)^\beta = \eta h^*. \tag{11.16}$$

两式相除得到

$$\frac{k^*}{h^*} = \frac{s_K}{s_H}. \tag{11.17}$$

物质资本和人力资本在稳态上按投资率比例配置。若一个经济体物质投资率高但教育投资率低，长期会表现为较高的 k/h；反过来，教育投资率高而物质投资不足，也会限制人力资本转化为产出。

进一步求解可得

$$k^* = \left(\frac{s_K^{1-\beta} s_H^{\beta}}{\eta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}, \tag{11.18}$$

$$h^* = \left(\frac{s_K^{\alpha} s_H^{1-\alpha}}{\eta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}. \tag{11.19}$$

因此有效劳动单位产出稳态为

$$y^* = (k^*)^\alpha (h^*)^\beta. \tag{11.20}$$

取对数并整理，普通人均产出 $Y/L = Ay$ 满足

$$\log \frac{Y}{L} = \log A + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} \log s_K + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} \log s_H - \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta} \log(n+g+\delta). \tag{11.21}$$

命题 11.2 (MRW 稳态收入方程). *若 $\alpha + \beta < 1$ 且经济处于有效劳动单位稳态，则人均收入满足 (11.21)。因此，稳态人均收入随物质资本投资率和人力资本投资率上升而上升，随人口增长、技术增长和折旧之和上升而下降。*

证明. 稳态条件 (11.15)–(11.16) 给出 $k^*/h^* = s_K/s_H$。将该比例代入任一稳态条件，可以得到 (11.18) 和 (11.19)。再代入 $y^* = (k^*)^\alpha (h^*)^\beta$，并使用 $Y/L = Ay^*$，取对数后得到 (11.21)。 □

这个方程是 MRW 回归的理论来源。它告诉我们，若各国技术水平差异可以被常数项或其他控制吸收，长期人均收入应该与物质投资率、人力资本投资率正相关，与人口增长率负相关。

11.8 系数含义：为什么人力资本会放大积累效应

比较标准 Solow 模型和 MRW 模型，可以看出人力资本的重要性。标准 Solow 中，$\log s$ 的系数为

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}. \tag{11.22}$$

MRW 中，$\log s_K$ 的系数变成

$$\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}. \tag{11.23}$$

因为 $\beta > 0$，分母更小，所以物质资本投资率对稳态收入的影响更大。原因不是物质资本突然更重要了，而是物质资本和人力资本互补：更多机器配合更高技能，能产生更高产出；更多技能也需要物质资本承载。

举一个数值例子。若 $\alpha = 1/3$，标准 Solow 中 $\log s$ 系数为 0.5。若加入人力资本且 $\beta = 1/3$，则

$$\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} = 1, \qquad \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} = 1. \tag{11.24}$$

这意味着物质投资率和人力资本投资率的差异都会以更强方式体现在稳态收入上。双资本模型因此更容易解释巨大的跨国收入差异。

11.9 条件收敛：为什么要控制稳态差异

第 4 章讨论过绝对收敛和条件收敛。MRW 模型给条件收敛一个清楚解释。如果所有国家拥有相同储蓄率、人力资本投资率、人口增长率和技术水平，那么低初始收入国家应该增长更快，这叫绝对收敛。但如果这些参数不同，各国稳态本身不同，低收入国家未必会追上高收入国家。

在 MRW 框架中，收敛应该写成向各自稳态收敛：

$$\frac{1}{T}\left[\log y_i(t+T) - \log y_i(t)\right] = a - b\log y_i(t) + \Gamma X_i + \varepsilon_i, \tag{11.25}$$

其中 X_i 包括 $\log s_{K,i}$、$\log s_{H,i}$ 和 $\log(n_i + g + \delta)$ 等稳态决定因素。若控制这些变量后 $b > 0$，就表示条件收敛：给定稳态决定因素，初始收入较低的经济体增长更快。

MRW 模型还改变收敛速度。在线性化近似下，收敛速度约为

$$\lambda = (1-\alpha-\beta)(n+g+\delta). \tag{11.26}$$

人力资本份额 β 越高，$\alpha+\beta$ 越接近 1，收敛越慢。直觉是，可积累要素越多，整体边际报酬递减越弱，经济从低资本状态向稳态移动的过程越长。

11.10 MRW 经验回归：应该期待哪些系数

MRW 的经验贡献不是简单地“把教育变量放进回归”。它真正做的是把稳态方程变成可检验的系数限制。由式 (11.21) 可知，如果所有国家共享相同的生产弹性，长期收入应该与物质资本投资率、人力资本投资率和有效劳动增长成本系统相关。表 11.1 总结了理论预测和解释边界。

表 11.1: MRW 回归的理论预测与解释边界

变量	理论预测	解释边界
$\log s_K$	系数为正，理论值为 $\alpha/(1-\alpha-\beta)$	投资率可能受制度、金融发展和预期影响，不能直接解释为外生资本积累冲击。
$\log s_H$	系数为正，理论值为 $\beta/(1-\alpha-\beta)$	学校教育只是人力资本代理变量，教育质量、健康和技能匹配可能被遗漏。
$\log(n+g+\delta)$	系数为负，理论值为 $-(\alpha+\beta)/(1-\alpha-\beta)$	$g+\delta$ 往往被设为共同常数，人口增长也可能与发展阶段和制度环境相关。
$\log y_0$	在增长回归中系数为负，给定稳态因素后体现条件收敛	负系数不等于无条件追赶；它说明的是向各自稳态收敛。

一个数值例子可以帮助理解系数大小。若 $\alpha=\beta=1/3$，则稳态收入方程中 $\log s_K$ 和 $\log s_H$ 的理论系数都是 1，而 $\log(n+g+\delta)$ 的理论系数是 -2。这意味着人口增长或折旧成本提高会同时稀释物质资本和人力资本，负向影响比标准 Solow 模型更强。也正因为如此，MRW 模型比单资本 Solow 模型更容易解释跨国收入差异，但代价是它把更多解释力放在难以精确测量的人力资本变量上。

因此，本书读 MRW 回归时采用三层语言。第一层是“方向”：投资率和人力资本代理变量应该与收入正相关，人口增长成本应该与收入负相关。第二层是“数量”：估计系数是否接近理论限制，或者是否显示某些弹性设定不合理。第三层是“识别”：这些相关关系是否能被解释为因果机制。MRW 主要完成前两层；第三层需要更细的数据和更强的研究设计。

11.11　数据例子：人力资本指数的变化

图 11.1 使用 Penn World Table 中的人力资本指数。这个指数基于受教育年限和教育回报构造，不等同于学校质量、健康或技能全貌，但它比单纯人口数量更接近“有效劳动质量”。

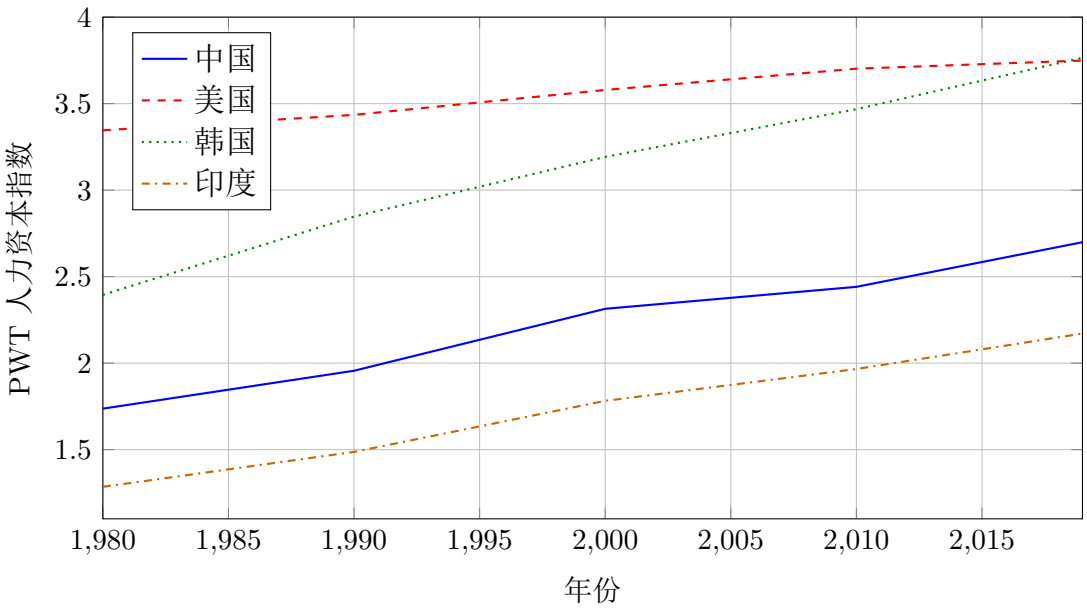

图 11.1: PWT 人力资本指数，1980–2019

图 11.1 显示，中国、韩国和印度的人力资本指数在样本期内明显上升。韩国到 2019 年已经接近美国水平，中国也有显著提升，印度提升较慢。这个图不是 MRW 模型的严格检验，但它说明“劳动数量”确实不足以描述发展过程。一个国家的劳动力教育和技能结构变化，会影响资本使用效率和长期收入水平。

表 11.2 进一步给出 PWT 增长核算中人力资本对每工人产出增长的贡献。数值表示年均百分点贡献。

表 11.2: PWT 增长核算中的人力资本贡献，1980–2019

经济体	每工人产出增长	资本深化贡献	人力资本贡献	残差
中国	4.96	2.74	0.75	1.47
美国	1.56	0.38	0.19	0.99
韩国	4.33	1.69	0.77	1.87
印度	4.27	1.35	0.90	2.03

表 11.2 的含义要谨慎读。它表明人力资本提升对增长有可见贡献，但在这些经济体中，资本深化和残差同样重要。中国的增长很大一部分来自资本深化，韩国和印度的

残差贡献较高，美国则更接近前沿经济体的技术和效率增长。这里的残差不能简单叫“技术”，它还包括资源配置、制度、测量误差和模型未捕捉的机制。

11.12 MRW 回归如何读，不能如何读

MRW 的经验方程通常把长期收入水平或增长率回归到投资率、人口增长率和教育变量上。模型预测很清楚：物质投资和人力资本投资应与收入正相关，人口增长应与收入负相关；控制稳态决定因素后，初始收入越低，后续增长应越快。

但是，这类回归需要非常小心。第一，投资率和教育变量不是随机分配的。高收入国家可能因为制度好、政府能力强、家庭预期稳定而同时拥有高教育和高收入。第二，教育数量不等于教育质量。中学入学率或受教育年限不能完整衡量认知技能、职业技能和健康。第三，技术水平 A_i 可能与教育和投资高度相关，若遗漏制度、地理、开放和历史因素，系数会吸收很多非人力资本机制。

因此，本书在解释 MRW 回归时采用保守语言：这些回归展示了与模型一致的条件相关关系，而不是直接证明教育投资的因果效应。若要估计教育的因果回报，需要更细的微观数据、政策变化或可信识别设计；若要估计人力资本对总量增长的因果影响，需要处理国家层面的制度、技术和选择问题。

11.13 中国与发展延伸：教育扩张、技能结构和资本效率

中国增长经验非常适合用 MRW 模型补充第 9 章的资本深化叙述。高投资能增加物质资本，但资本能否转化为高产出，取决于劳动者是否具备使用、维护、改进和组织这些资本的能力。基础教育提高识字、计算和纪律化生产能力；高等教育和职业教育提高工程、管理、研发和服务业技能；健康改善提高劳动参与和工作效率。

从图 11.1 看，中国的人力资本指数在 1980–2019 年显著上升。这与教育扩张、城市化和产业升级相互作用。制造业从劳动密集型走向更复杂的供应链，需要更多技术工人、工程师和管理者；服务业升级也需要更强的沟通、数字和专业能力。若人力资本跟不上，物质资本投资的边际产出就会下降。

但 MRW 模型也提醒我们不要把教育扩张自动等同于高质量增长。若专业结构与产业需求错配，若教育质量差异很大，若劳动力流动受到户籍、住房和公共服务约束，受教育年限上升未必充分转化为生产率。后面讨论中国结构转型和资源错配时，这一点会变得非常重要：人力资本不是孤立变量，它需要和城市、企业、产业和制度匹配。

11.14 常见误区

1. **把人力资本等同于受教育年限。**受教育年限是常用代理变量，但人力资本还包括教育质量、健康、经验、技能和匹配效率。

2. **把 MRW 回归系数解释为教育因果效应。**跨国回归主要支持模型相关性，因果解释需要更强识别。

3. **忘记人力资本和物质资本互补。**教育提高资本使用效率，资本也影响技能回报。

4. **认为加入人力资本就解释了一切。** MRW 改善了 Solow 模型，但仍把技术、制度和资源配置的大量差异留在残差中。

5. **混淆绝对收敛和条件收敛。** MRW 预测的是控制稳态决定因素后的条件收敛，不是所有低收入国家自动追上高收入国家。

11.15 英文术语表

英文术语	中文含义与说明
Human capital	人力资本，体现劳动者教育、技能、健康和经验的生产能力。
MRW model	Mankiw-Romer-Weil 模型，在 Solow 框架中加入人力资本的经验增长模型。
Physical capital	物质资本，机器、厂房、基础设施等可积累生产要素。
Schooling proxy	教育代理变量，用入学率或受教育年限近似人力资本投资。
Conditional convergence	条件收敛，控制稳态决定因素后，初始收入较低的经济体增长更快。
Absolute convergence	绝对收敛，不控制结构差异时，低收入经济体自动增长更快。
Steady-state income equation	稳态收入方程，把长期收入表示为投资率、人口增长和技术等变量的函数。
Omitted variable bias	遗漏变量偏误，未控制制度、技术或其他因素导致回归系数吸收多重机制。
Growth accounting	增长核算，把产出增长分解为资本深化、人力资本和残差贡献。

11.16 本章 Review

如果我来 review 你对本章的理解，第一条标准是你能否把 MRW 看成 Solow 的双资本扩展，而不是只把“教育”加进回归。你应该能写出物质资本和人力资本两条动态方程，并解释 s_K、s_H 与 $\eta = n + g + \delta$ 的作用。

第二，我会检查你是否能说明 MRW 如何改变收敛判断。加入人力资本后，国家向各自稳态收敛；可积累要素份额更高，收敛速度更慢，也更接近许多经验研究看到的慢收敛。

第三，你应该能谨慎解释经验回归。MRW 中 $\log s_K$、$\log s_H$ 和 $\log(n + g + \delta)$ 有清楚理论符号，但跨国回归主要支持条件相关，不能直接当成教育或投资的因果效应。

最后，我会看你是否能把人力资本放回中国和发展问题。高投资需要技能、健康、管理和产业结构承接；教育扩张如果不能转化为岗位匹配和生产率，也不会自动带来长期增长。

11.17 核心文献

本章的核心文献是 MRW 的经典论文 [Mankiw et al., 1992]。入门教材可先看 [Jones and Vollrath, 2013]。

研究生教材可分三条读。[Barro and Sala-i Martin, 2004] 偏增长经验和收敛。[Romer, 2019] 偏宏观教材脉络。[Acemoglu, 2009] 处理更系统。

人力资本理论的更早基础可追溯到 [Becker, 1964]。跨国人力资本数据可参考 [Barro and Lee, 2013]，PWT 数据和人力资本指数说明见 [Feenstra et al., 2015]。

第十二章　Solow–MRW 框架的解释力与局限

12.1　本章导读

第 9–11 章已经建立了外生增长理论的主干：资本积累解释转移动态，劳动增进型技术进步解释平衡增长路径，人力资本扩展解释为什么简单 Solow 模型低估要素积累对收入差异的作用。到这里，一个自然的问题出现了：这套框架到底已经解释了多少，又把多少最重要的问题留在了模型之外？

本章不是为了“否定”Solow–MRW 框架。相反，越是走向研究生阶段，越应该珍惜这套框架的作用。它给增长分析提供了一个干净的基准：先把每工人产出分解为物质资本、人力资本和效率项，再判断一个国家的增长究竟来自资本深化、劳动质量提高，还是来自模型不能直接解释的残差。没有这个基准，讨论制度、创新、产业升级和资源错配时很容易变成松散叙事；有了这个基准，我们至少知道哪些部分已经被近因解释，哪些部分仍需要更深层机制。

但这套框架的局限也正是在这里。Solow 残差不是一个机制，而是一个名称；它把技术、组织、资源配置、制度、市场规模、开放、产业结构、测量误差和短期冲击都装在一起。MRW 加入人力资本后，残差会变小，但不会消失。若一个模型只能说“剩下的都叫 TFP”，它就还没有真正解释长期增长的核心来源。后面进入 Ramsey、内生增长、创新和中国结构转型部分时，本章会成为一个路标：我们不是离开 Solow，而是在回答 Solow 留下的问题。

12.2　学习目标

学完本章，你应该能够：

1. 说明 Solow–MRW 框架在增长理论中的基准作用。
2. 区分增长核算中的近因解释与深层机制解释。
3. 推导并解释含人力资本的增长分解式。

4. 理解 Solow 残差为什么不能被简单等同于“技术进步”。
5. 用 PWT 数据比较每工人产出、资本深化、人力资本和 TFP 的贡献。
6. 判断跨国收入差异分解中参数、测量和因果解释的边界。
7. 说明为什么外生增长理论自然导向 Ramsey、内生增长、创新和资源错配模型。

12.3 核心问题

Solow–MRW 框架最强的地方，是它把增长问题压缩成一个可操作的分解。设每工人产出为 Y/L，物质资本深度为 K/L，人力资本为 H 或 h，效率水平为 A。那么不同经济体的收入差异可以先问三个问题：

> 收入差异有多少来自资本深度？有多少来自人力资本？剩下的残差到底意味着什么？

这个问题看似简单，但它几乎贯穿现代增长研究。若资本和人力资本能解释大部分差异，政策重点就会偏向储蓄、投资、教育和健康；若大部分差异留在 TFP，研究重点就会转向技术采用、制度、企业进入退出、资源错配、创新激励和组织能力。外生增长模型的解释力和局限，决定了后续理论应当往哪里走。

本章的核心判断是：

> Solow–MRW 框架很好地解释了增长的近因结构，却没有解释近因本身为什么不同；它能告诉我们资本、人力资本和 TFP 各占多少，但不能单独解释为什么某些经济体更会积累资本、更能形成技能、更能把投入转化为产出。

12.4 什么叫解释力：从现象到近因，再到机制

讨论一个增长模型“解释了什么”，要区分三个层次。第一层是现象描述。例如，中国、韩国和印度在 1980 年以后每工人产出明显上升，美国在高收入水平上继续增长。第二层是近因分解。例如，中国增长中资本深化贡献很大，韩国增长中 TFP 和人力资本贡献也很重要，印度在 2000 年以后残差贡献明显。第三层是深层机制。例如，为什么中国能维持高投资？为什么韩国能把教育、出口和技术吸收结合起来？为什么印度的服务业和制度结构产生了不同路径？为什么美国能在前沿维持创新？

Solow–MRW 框架主要完成第二层工作。它不是直接解释制度、创新或政策，而是把它们的影响先投影到几个可测量的通道中。物质资本通道问的是机器、建筑、基础设施和设备有多少；人力资本通道问的是劳动者质量如何；TFP 通道问的是给定这些投入后，经济体把投入转化为产出的效率有多高。

这种分解很有价值。若没有它，我们可能会把所有增长都叫作“改革红利”或“技术进步”；若有了它，我们会进一步问：所谓改革红利是提高了投资率，改善了资本配置，促进了人力资本形成，还是提高了企业层面的生产率？这就是增长核算作为研究工具的意义。

但这种分解也有限。近因不是终点。说一个国家 TFP 高，并没有解释它为什么 TFP 高；说一个国家资本深化快，也没有解释为什么储蓄、投资和金融配置能支持这种资本深化。外生增长模型的最大贡献，是把问题摆正；它的最大局限，是不回答最深的问题。

12.5 增长核算的基准公式

考虑含人力资本的 Cobb–Douglas 生产函数：

$$Y = K^{\alpha}(hL)^{1-\alpha}A, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{12.1}$$

这里 h 表示每个劳动者的人力资本水平，A 表示给定物质资本和人力资本后的效率。把式 (12.1) 除以 L，可得每工人产出：

$$y \equiv \frac{Y}{L} = Ak^{\alpha}h^{1-\alpha}, \qquad k \equiv \frac{K}{L}. \tag{12.2}$$

取对数：

$$\log y = \log A + \alpha \log k + (1-\alpha)\log h. \tag{12.3}$$

若用增长率表示，得到

$$g_y = g_A + \alpha g_k + (1-\alpha)g_h. \tag{12.4}$$

命题 12.1 (含人力资本的增长核算). *若生产函数为 (12.1)，且 α 在考察期内保持不变，则每工人产出增长率可以分解为 TFP 增长、资本深化贡献和人力资本贡献三部分：*

$$g_A = g_y - \alpha g_k - (1-\alpha)g_h. \tag{12.5}$$

其中 g_A 是由生产函数和投入数据反推出的 Solow 残差。

证明. 由 (12.3) 对时间求导，得到

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{A}}{A} + \alpha\frac{\dot{k}}{k} + (1-\alpha)\frac{\dot{h}}{h}. \tag{12.6}$$

按增长率记号，这就是 (12.4)。移项即可得到 (12.5)。 □

这个命题很短，但它是整个外生增长框架最有用的工具之一。它告诉我们，TFP 不是直接观测到的变量，而是从产出增长中扣除要素投入贡献后的剩余项。这个剩余项可能包含真正的技术进步，也可能包含资源配置改善、规模经济、产能利用率变化、劳动质量测量误差、资本质量误差和统计误差。

12.6 核算口径：这些数字从哪里来

增长核算看起来像精确分解，但每一项都带有口径选择。一个好的增长核算表不应该只给出数字，还应该说明数字依赖哪些假设。表 12.1 总结了本书使用增长核算时最重要的测量选择。

表 12.1: 增长核算中的口径选择与可能偏误

对象	常用口径	主要风险
资本份额 α	使用固定值如 1/3，或用 1 减劳动收入份额近似	自雇收入、土地收入、垄断利润和国企利润会影响劳动份额，固定 α 可能错估资本贡献。
资本存量 K	永续盘存法或 PWT 资本存量	初始资本、折旧率、投资品价格和资本质量差异会影响资本深化贡献。
人力资本 h	PWT 人力资本指数，通常基于受教育年限和教育回报	教育质量、健康、技能结构和岗位匹配难以完全进入指数。
TFP A	Solow 残差，或 PWT 的 TFP 指数	残差会吸收测量误差、产能利用率、资源再配置、规模经济和制度变化。
时期平均	对数增长率的年均值，或阶段平均贡献	起止年份、商业周期、危机年份和结构转折会改变阶段判断。

这张表解释了为什么不同资料中的 TFP 贡献可能不完全一致。若一个研究使用固定资本份额，另一个研究使用逐年劳动份额；若一个研究使用总资本存量，另一个研究调整资本质量；若一个研究把人力资本单独列出，另一个研究把劳动质量留在残差里，最后的 TFP 数字就会不同。这不是简单的谁对谁错，而是口径不同导致的分解差异。

因此，本章后面的数据表应当这样读：它们是结构化近似，目的是帮助我们判断增长来源的大致构成，而不是给出政策效果的精确因果估计。读到某个时期“残差高”时，下一步不是马上说“技术进步高”，而是追问：是否有资源再配置？是否有统计口径变化？是否有产能利用率上升？是否有教育质量或资本质量没有被单独测出来？

12.7 层次分解：为什么资本积累不能解释永久增长

外生增长模型的第一个强结论是：资本积累可以解释水平差异和转移增长，但不能在边际产出递减下解释永久的人均增长。以标准 Solow 模型为例：

$$y = Ak^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{12.7}$$

若 A 固定，k 越高，资本边际产出越低。储蓄率提高会把经济推向更高的稳态资本和更高的稳态收入，但当经济到达新稳态后，人均增长会消失。

命题 12.2 (储蓄率的水平效应). *在没有技术进步的 Cobb–Douglas Solow 模型中，稳态每工人产出为*

$$y^* = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{n+\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \tag{12.8}$$

因此，储蓄率 s 提高会提高稳态收入水平，但不会提高稳态人均增长率。

证明. 资本动态为

$$\dot{k} = sAk^{\alpha} - (n+\delta)k. \tag{12.9}$$

稳态满足 $sA(k^*)^{\alpha} = (n+\delta)k^*$，即

$$(k^*)^{1-\alpha} = \frac{sA}{n+\delta}. \tag{12.10}$$

所以

$$k^* = \left(\frac{sA}{n+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{12.11}$$

代入 $y^* = A(k^*)^{\alpha}$，整理可得命题中的表达式。因为稳态下 k 和 y 不再变化，所以稳态人均增长率为零。 □

这条结论对理解发展经验很重要。一个低资本经济体可以因为高投资而快速追赶，但追赶不是永久增长的同义词。若技术、效率和资源配置不改善，资本深化的贡献会逐步下降。许多经济体在工业化初期依靠投资和劳动力转移获得高增长，但进入中高收入阶段后，若 TFP 增长不足，就会面临增长放缓。Solow 模型不是预言某国一定会停滞，而是提醒我们：资本积累本身会遇到边际收益递减。

12.8 数据例子一：每工人产出与 TFP 的分叉

图 12.1 和图 12.2 使用 Penn World Table 数据，把 1980 年设为 100。第一个图画每工人实际产出指数，第二个图画 TFP 指数。两张图放在一起看，能直接看到外生增长框架的核心张力：产出可以高速增长，但 TFP 不一定同步高速增长。

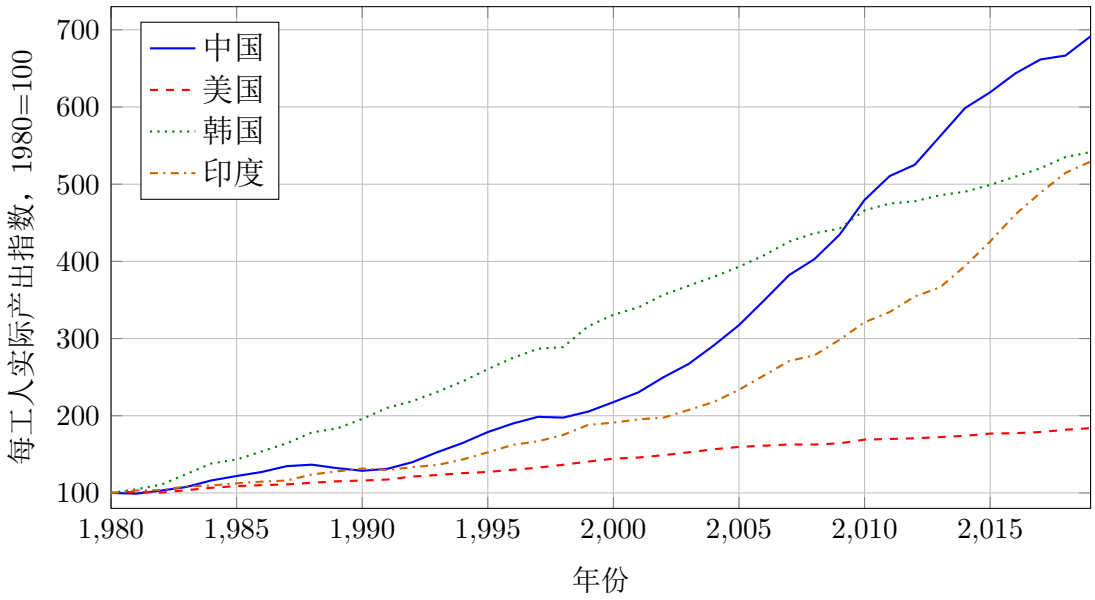

图 12.1: 每工人实际产出指数，1980–2019

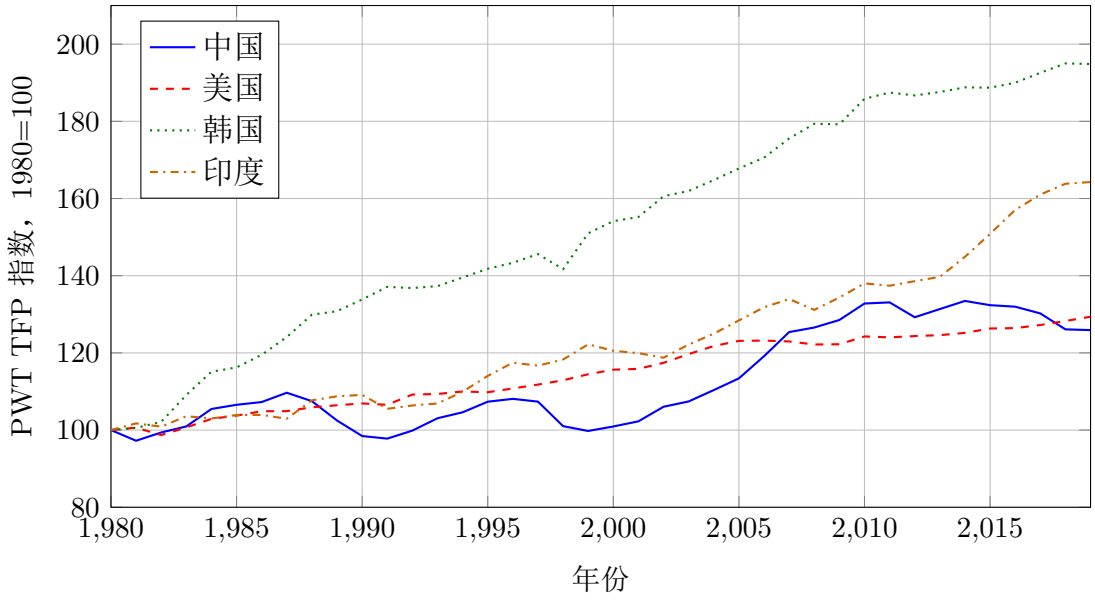

图 12.2: PWT TFP 指数，1980–2019

图 12.1 显示，中国每工人产出从 1980 年的 100 上升到 2019 年约 692，韩国上升到约 542，印度上升到约 529，美国上升到约 184。若只看这张图，我们会说追赶经济体增长远快于前沿经济体。

但图 12.2 给出另一层信息。韩国 TFP 指数从 100 上升到约 195，印度上升到约 164，美国上升到约 129，中国上升到约 126。中国每工人产出增长远高于 TFP 指数增长，这说明资本深化和人力资本提升在其中扮演了很大角色。韩国和印度的 TFP 增长相对更强，美国虽然产出增长较慢，但作为前沿经济体，其 TFP 稳定上升仍然是长期生活水平提高的重要来源。

这两张图不是因果识别，而是结构化事实。它们说明：若只看收入增长，我们容易把所有增长都归结为“生产率提高”；若用增长核算拆开，就会发现同样的产出增长背后可能有非常不同的来源。

12.9 数据例子二：增长贡献的时期差异

表 12.2 把 1980–2019 年分成三个阶段，并列出每工人产出增长、资本深化贡献、人力资本贡献和残差。数值为年均百分点贡献。这里的残差与 PWT TFP 增长不完全相同，因为具体指数、份额和核算口径会影响结果；这正好提醒我们，增长核算的数字应当被理解为有结构的近似，而不是自然常数。

表 12.2: PWT 增长核算：每工人产出增长的来源

经济体	时期	每工人产出	资本深化	人力资本	残差
中国	1980–2000	3.89	2.15	0.95	0.78
中国	2000–2010	7.90	3.47	0.36	4.08
中国	2010–2019	4.07	3.24	0.74	0.09
美国	1980–2000	1.84	0.39	0.22	1.22
美国	2000–2010	1.57	0.66	0.23	0.69
美国	2010–2019	0.94	0.02	0.09	0.82
韩国	1980–2000	5.98	2.39	0.96	2.63
韩国	2000–2010	3.43	1.19	0.55	1.68
韩国	2010–2019	1.67	0.67	0.61	0.39
印度	1980–2000	3.24	0.82	1.09	1.32
印度	2000–2010	5.19	1.88	0.66	2.65
印度	2010–2019	5.56	1.93	0.73	2.90

这张表能读出几条教材级结论。第一，中国 1980–2019 年的增长不能只说成“技术进步”，资本深化一直非常重要。尤其 2010–2019 年，资本深化贡献仍高，而残差贡献明显下降，这与高投资经济进入资本回报压力阶段的直觉相符。第二，韩国早期增长同时包含资本深化、人力资本和较高残差贡献，说明成功追赶往往不是单一投入扩张，而是投入积累与效率改善共同发生。第三，印度在 2000 年后残差贡献较高，提示服务业、制度改革、开放、技术采用和资源配置可能是重要候选机制。第四，美国的增长率较低，但残差贡献在长期中很关键，前沿经济体不能主要依靠资本深化维持增长。

这些解释都要保持谨慎。增长核算不能告诉我们残差为什么变化，也不能证明某项政策导致某项贡献。它能做的是把“要解释的对象”变得更清楚：若一个时期残差高，我们要找效率改善机制；若一个时期资本深化高但残差低，我们要问资本配置和边际回报；若人力资本贡献上升，我们还要追问教育质量和技能匹配。

12.10 Solow 残差为什么不是一个简单答案

Solow 残差经常被称为 TFP 增长，但这容易让人误解。TFP 听起来像一种可以直接观察的技术变量，仿佛统计表中有一个叫“技术”的仪器读数。实际上，残差是一个扣除项：产出增长减去投入增长的加权和之后，还剩多少，就叫 TFP 增长。

残差至少混合了五类东西。第一是真正的技术进步，例如更好的机器、工艺、算法和知识。第二是资源配置改善，例如资本和劳动从低生产率部门转向高生产率部门。第三是组织和管理效率，例如供应链、企业管理、质量控制和市场竞争。第四是制度和政策环境，例如产权保护、开放、金融配置、地方政府激励和进入退出规则。第五是测量误差，例如资本存量估计、人力资本质量、劳动时间、产能利用率和价格指数误差。

因此，说“增长来自 TFP”只是研究的开始，不是研究的结束。Prescott 强调需要解释 TFP 本身；Hall and Jones 把社会基础设施放在跨国产出差异的中心；Klenow and Rodriguez-Clare 与 Caselli 等文献则提醒我们，跨国收入差异中相当大一部分难以仅靠可测量投入解释。这些讨论共同推动增长理论从外生技术进步走向制度、创新、资源错配和企业异质性。

12.11 跨国收入差异：一个简单数值分解

为了看清“投入解释”和“残差解释”的区别，考虑两个经济体 i 和 j。由 (12.2) 得

$$\log \frac{y_i}{y_j} = \log \frac{A_i}{A_j} + \alpha \log \frac{k_i}{k_j} + (1-\alpha) \log \frac{h_i}{h_j}. \tag{12.12}$$

这条式子把收入差异拆成三项：效率差异、资本深度差异和人力资本差异。

假设 $\alpha = 1/3$。若某低收入经济体的每工人资本只有前沿经济体的 $1/4$，人力资本

只有前沿经济体的 1/2，则投入项能解释的收入比为

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{1/3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}\approx 0.315. \tag{12.13}$$

也就是说，仅按资本和人力资本，该经济体的每工人产出约为前沿的 31.5%。如果实际收入只有前沿的 15%，那么剩下差异就必须由 A、测量误差或模型遗漏机制解释。这个例子展示了增长核算的力量：它不需要一开始就知道制度或创新如何运作，也能告诉我们“单靠投入是否够”。

但这个例子也展示了增长核算的脆弱性。若 α 从 1/3 改为 1/2，资本差异的解释力会明显上升；若人力资本质量被低估，h 的解释力会上升；若资本存量中很多项目回报很低，简单的 K 反而会高估资本贡献。跨国分解因此不是机械算术，而是理论、数据和参数共同决定的判断。

12.12 外生增长框架的四个边界

第一，外生增长框架没有解释技术进步从哪里来。第 10 章把 g 写成外生参数，这让平衡增长路径变得清楚，却把最重要的问题留在了外面。为什么某些社会的创新更快？为什么知识能扩散到一些经济体却不能扩散到另一些经济体？为什么研发投入有时带来高回报，有时却低效？这些问题需要内生增长和创新模型。

第二，它没有解释储蓄率、投资率和教育投资为什么不同。Solow 模型把 s 当作参数，MRW 把 s_H 或教育变量加入回归，但一个真正的发展理论还要解释家庭储蓄、政府投资、金融体系、教育供给、健康投资和预期形成。第 13 章的 Ramsey 模型会把储蓄从外生参数变成家庭最优选择，这是从外生增长走向动态一般均衡的第一步。

第三，它没有处理异质性和资源错配。总量生产函数把经济体压缩成一个代表性生产部门，但现实中企业生产率差异巨大，金融约束、行政壁垒、土地制度、市场分割和国企预算约束会改变资源流向。若高生产率企业拿不到资源，低生产率企业保留过多资源，总量 TFP 会下降。这个问题在中国增长和发展经济学中尤其重要。

第四，它很难直接做福利判断。高投资提高产出，但也压低当前消费；高速城市化提高生产率，但也改变分配和风险；教育扩张提高人力资本，但财政成本和机会成本不低。Solow 模型可以讲黄金律，但没有从家庭偏好和社会福利出发系统选择路径。Ramsey 和 OLG 模型会补上这一层。

12.13 中国与发展延伸：从资本深化到生产率问题

中国增长经验可以看作外生增长框架的一个典型应用场景，也可以看作它的压力测试。改革开放后的高速增长，确实包含强烈的资本深化：基础设施、制造业设备、城

市住房、交通网络和工业园区快速扩张。第 9 章的 Solow 模型能很好解释为什么低初始资本配合高投资会产生快速追赶。

但中国经验不能被简化为资本积累。若只看资本，会解释不了外贸扩张、乡镇企业、城市化、技术引进、供应链学习、产业集聚和制度变迁对效率的影响。若只说 TFP，又会把很多不同机制混在一起。更好的做法是分层分析：先用增长核算确认资本深化、人力资本和残差的相对贡献，再把残差拆向具体机制，例如资源再配置、企业进入退出、管理改善、开放学习、创新能力和地方政府激励。

表 12.2 中中国 2010–2019 年残差贡献较低，特别适合引出中高收入阶段的问题。若资本深化仍然高而 TFP 放缓，增长放缓就不能简单解释为“投资不够”。相反，需要问投资是否进入高回报部门，金融体系是否有效筛选项目，地方政府是否仍有扩张性投资激励，服务业和创新部门是否获得足够资源，人口老龄化和教育结构是否改变了资本回报。

对其他发展中国家，本章也给出一个一般教训。低收入阶段的增长常常可以依靠资本、基础教育、劳动力转移和技术采用；但越接近中高收入阶段，越需要解释效率、创新和组织能力。外生增长模型给了我们第一张地图，但地图上最关键的区域标着“残差”。后面的章节就是要进入这片区域。

12.14 常见误区

1. **把 Solow 残差直接等同于狭义技术进步。**残差包含技术，也包含配置、制度、管理、产能利用和测量误差。
2. **认为资本深化不重要。**资本深化不能解释永久增长，但可以解释追赶阶段的大量增长和收入水平差异。
3. **把增长核算当作因果识别。**核算是分解，不是实验；它不能证明某项政策导致 TFP 提高。
4. **忽视参数敏感性。**资本份额、人力资本测量和折旧估计都会影响分解结果。
5. **把外生增长模型当作过时模型。**它不是最终理论，但仍是判断后续复杂模型是否有意义的基准。

12.15 英文术语表

英文术语	中文含义与说明

Exogenous growth	外生增长，长期技术进步或效率增长由模型外部给定。
Solow residual	Solow 残差，产出增长扣除投入贡献后的剩余项，常被称为 TFP 增长。
Total factor productivity	全要素生产率，给定投入后经济体转化投入为产出的效率指标。
Proximate causes	近因，资本、人力资本和 TFP 等直接分解项。
Fundamental causes	深层原因，制度、地理、文化、政策、创新体系和历史等更底层机制。
Growth accounting	增长核算，把产出增长分解为资本、劳动质量和残差贡献。
Level accounting	水平核算，把某一时点的跨国收入差异分解为投入差异和效率差异。
Capital deepening	资本深化，每个劳动者或有效劳动单位拥有的资本增加。
Measurement error	测量误差，变量统计和构造误差对核算结果的影响。
Misallocation	资源错配，生产要素没有流向边际产出最高的用途，从而压低总量生产率。

12.16 本章 Review

如果我来 review 你对本章的理解，第一条标准是你能否说明 Solow–MRW 框架到底解释了什么。它解释增长近因：资本深度、人力资本和 TFP 如何分解每工人产出与增长率；它不直接解释这些近因为什么不同。

第二，我会检查你是否能区分核算、模型和因果。增长核算能告诉我们资本深化、人力资本和 residual 的贡献，但 residual 不是纯技术，投资率和教育变量也不是天然外生。

第三，你应该能读懂 PWT 图表的含义和局限。每工人产出追赶不等于 TFP 追赶；资本份额、资本存量、人力资本指数、时期划分和价格口径都会影响分解结果。

最后，我会看你是否知道何时该离开 Solow–MRW。若资本深化仍高而 residual 放缓，分析重点就必须转向资本效率、资源错配、创新、制度和结构转型。

12.17　核心文献

外生增长框架的起点仍然是 [Solow, 1956] 和 [Swan, 1956]。MRW 的经验扩展见 [Mankiw et al., 1992]。对 TFP 作为增长核心问题的强调，可读 [Prescott, 1998]；关于跨国收入差异中投入和生产率的分解，可读 [Klenow and Rodriguez-Clare, 1997]、[Hall and Jones, 1999] 和 [Caselli, 2005]。

教材层面可分开读：

- [Jones and Vollrath, 2013] 适合建立直觉。
- [Barro and Sala-i Martin, 2004] 适合连接经验增长。
- [Romer, 2019] 适合把外生增长接到 Ramsey 和内生增长。
- [Acemoglu, 2009] 提供更完整的研究生框架。

理解中国增长时，可把本章分解方法与 [Young, 1995]、[Zhu, 2012] 和后续资源错配文献结合起来读。

第四部分

Ramsey、OLG 与动态一般均衡

第十三章　Ramsey–Cass–Koopmans 模型

13.1　本章导读

前面三章已经把 Solow–MRW 框架推到它最有用的位置：资本积累、人力资本和外生技术进步共同解释增长的近因。但它仍然留下一个很大的外生变量：储蓄率。Solow 模型说储蓄率越高，稳态资本越高；MRW 模型说物质资本和人力资本投资率都会影响长期收入。可是储蓄率从哪里来？为什么有些经济体长期高储蓄，有些经济体低储蓄？高储蓄到底是福利改善，还是把太多消费推迟到未来？

Ramsey–Cass–Koopmans 模型的作用，就是把这些问题放进一个跨期最优化框架中。家庭不再机械地把固定比例收入储蓄起来，而是在今天消费和未来消费之间选择。资本积累不再只是一个工程方程，而是一个福利权衡：多投资一单位资本，今天少消费，但明天资本边际产出提高可用资源。

本章是研究生增长课的第一道核心门槛。它会把第 6 章的二维相图、第 7 章的 Hamiltonian 和 Euler 方程、第 8 章的一般均衡思想放到同一个模型里。为了保证可读性，我们先写无人口增长、无技术进步的版本，理解 Euler 方程和相图；再把模型扩展到有效劳动单位，得到与 Solow 平衡增长路径相容的 RCK 系统。

如果你读这一章时更关心方法，可以把它和附录 B、附录 F 配合阅读：附录 B 系统整理连续时间 Hamiltonian、HJB 和相图背后的数学语言，附录 F 说明如何用 shooting 和 collocation 计算 Ramsey 转移路径。正文负责经济直觉，附录负责把工具推到 PhD 课程和定量论文需要的深度。

13.2　学习目标

学完本章，你应该能够：

1. 说明 Ramsey 模型如何把 Solow 的外生储蓄率内生化。
2. 写出代表性家庭的无限期效用最大化问题。
3. 从 Hamiltonian 推导 Euler 方程和资源约束。

4. 解释消费增长率为什么取决于资本回报率、时间偏好和跨期替代弹性。

5. 求出含劳动增进型技术进步的 RCK 稳态。

6. 用相图理解 $\dot{k}=0$、$\dot{c}=0$ 和 saddle path。

7. 区分黄金律资本和 Ramsey 最优稳态资本。

8. 用资本产出比数据理解中国高储蓄、高投资与资本回报变化之间的关系。

13.3 核心问题

本章的核心问题是：

> 当储蓄率由家庭跨期最优选择决定，而不是由模型外生给定时，增长模型的动态、稳态和福利判断如何改变？

这个问题有三层含义。第一，储蓄率不再是一个简单参数，而是由偏好、资本回报、折旧、人口增长和技术进步共同决定的内生结果。第二，转移动态不再只有资本一条线；消费可以跳跃选择，资本只能逐步积累，因此模型会出现鞍路径稳定。第三，福利判断不再等同于稳态消费最大化，因为家庭会把整个未来路径的效用贴现加总。

13.4 从 Solow 到 Ramsey：一个变量变成两个变量

Solow 模型的核心动态是

$$\dot{k}=sf(k)-(n+g+\delta)k. \tag{13.1}$$

给定储蓄率 s 后，消费只是产出的剩余部分：

$$c=(1-s)f(k). \tag{13.2}$$

因此 Solow 模型只有一个真正的动态变量：资本 k。资本低于稳态时，资本上升；资本高于稳态时，资本下降。相图是一维的。

Ramsey 模型把消费 c 变成选择变量。资源约束变为

$$\dot{k}=f(k)-c-(n+g+\delta)k. \tag{13.3}$$

现在，只知道 k 还不够。给定同一个资本水平，若消费很高，储蓄很低，资本可能下降；若消费很低，储蓄很高，资本可能上升。因此模型需要两个方程：一个描述资本如何变，一个描述最优消费如何变。

这就是 Ramsey 模型比 Solow 模型深的地方。Solow 问：“如果储蓄率是 s，资本会怎样？”Ramsey 问：“什么样的消费和储蓄路径在整个未来福利意义下最优？”

13.5 最简单版本：没有人口增长和技术进步

先从最干净的版本开始。时间连续，代表性家庭选择消费路径 $\{c(t)\}_{t\geq 0}$，最大化

$$\int_0^\infty e^{-\rho t}u(c(t))\,dt, \qquad \rho>0, \tag{13.4}$$

其中 ρ 是主观贴现率。ρ 越高，家庭越不耐心，越重视当前消费。

生产函数为

$$y=f(k), \qquad f'(k)>0, \quad f''(k)<0. \tag{13.5}$$

资源约束为

$$\dot{k}=f(k)-c-\delta k, \qquad k(0)=k_0>0. \tag{13.6}$$

这里 $f(k)-\delta k$ 是扣除折旧后的可用产出，消费 c 和净投资 $\dot{k}$ 共同分配这部分资源。

为了得到清晰的消费增长公式，令瞬时效用为 CRRA 形式：

$$u(c)=\begin{cases}\dfrac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta}, & \theta\neq 1,\\[2mm] \log c, & \theta=1,\end{cases} \qquad \theta>0. \tag{13.7}$$

参数 θ 是相对风险厌恶系数，也是跨期替代弹性的倒数。θ 越大，家庭越不愿意让消费在时间上剧烈波动；跨期替代弹性 $1/\theta$ 越小，利率变化对消费增长的影响越弱。

13.6 Hamiltonian 推导：Euler 方程从哪里来

当前值 Hamiltonian 为

$$\mathcal{H}=u(c)+\lambda\left[f(k)-c-\delta k\right], \tag{13.8}$$

其中 λ 是资本的当前值影子价格。它衡量多一单位资本对未来效用的边际价值。

命题 13.1 (无增长 Ramsey 模型的 Euler 方程). 设效用满足 (13.7)，生产函数严格递增、严格凹，且内部最优路径存在。则最优消费路径满足

$$\frac{\dot{c}}{c}=\frac{1}{\theta}\left[f'(k)-\delta-\rho\right]. \tag{13.9}$$

证明. Hamiltonian 的一阶条件为

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial c}=u'(c)-\lambda=0, \qquad \text{所以} \qquad \lambda=u'(c). \tag{13.10}$$

协态方程为

$$\dot{\lambda}=\rho\lambda-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial k}=\left[\rho+\delta-f'(k)\right]\lambda. \tag{13.11}$$

对 $\lambda = u'(c)$ 两边取时间导数，得到

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{u''(c)c}{u'(c)}\frac{\dot{c}}{c}. \tag{13.12}$$

CRRA 效用满足 $u''(c)c/u'(c) = -\theta$，所以

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -\theta\frac{\dot{c}}{c}. \tag{13.13}$$

把这个式子与 (13.11) 合并，得

$$-\theta\frac{\dot{c}}{c} = \rho + \delta - f'(k). \tag{13.14}$$

整理即可得到 (13.9)。 □

Euler 方程的经济含义很直接。资本的净回报是 $f'(k) - \delta$。若净回报高于贴现率 ρ，推迟消费更有吸引力，最优消费应该增长；若净回报低于贴现率，家庭不愿意为了低回报未来消费牺牲当前消费，消费应该下降。θ 决定调整幅度：同样的回报差距，在 θ 较小时会带来更快的消费增长，在 θ 较大时只带来温和调整。

13.7 横截条件：为什么不能只看一阶条件

Euler 方程不是最优性的全部。若只看一阶条件，可能会得到一些奇怪路径：家庭不断压低消费、无限积累资本，却从不真正享受这些资本带来的消费；或者家庭过早消费太多，最终资本耗尽。为了排除这类路径，需要横截条件。

在最简单版本中，横截条件可以写成

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda(t)k(t) = 0. \tag{13.15}$$

直觉是：在最优路径上，不能把有正影子价值的资本无限期留到未来而不使用。如果极限为正，就说明家庭本可以在某个时候多消费一点而提高福利；如果路径让资本为负或违反可行性，则根本不是可行最优路径。

研究生课程中，横截条件经常显得抽象，但它的经济含义很朴素：最优路径不能既牺牲今天消费，又把永远用不完的资源留在桌上。

13.8 引入人口增长和技术进步

现在把模型放回增长理论。人口 $L(t)$ 以速度 n 增长，劳动增进型技术 $A(t)$ 以速度 g 增长。总量生产函数为

$$Y = F(K, AL) = ALf(k), \qquad k \equiv \frac{K}{AL}. \tag{13.16}$$

定义有效劳动单位消费

$$c \equiv \frac{C}{AL}. \tag{13.17}$$

则资源约束为

$$\dot{k} = f(k) - c - (n + g + \delta)k. \tag{13.18}$$

这与第 10 章的 Solow 方程非常相似，区别只在于 Solow 中消费由固定储蓄率决定，而 Ramsey 中消费由最优条件决定。

若家庭效用以人均消费 $C/L = Ac$ 进入，并采用 CRRA 偏好，则有效劳动单位消费的 Euler 方程为

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left[f'(k) - \delta - \rho - \theta g\right]. \tag{13.19}$$

对应地，人均消费 C/L 的增长率满足

$$\frac{d\log(C/L)}{dt} = \frac{1}{\theta}\left[f'(k) - \delta - \rho\right]. \tag{13.20}$$

这两个式子并不矛盾。有效劳动单位消费 c 要扣除技术进步带来的尺度增长；人均消费 C/L 则包含技术进步本身。

13.9 分散竞争均衡：家庭、企业和市场清算

上面的推导像是在解一个社会计划者问题。RCK 模型也可以写成分散竞争均衡。这样做的好处是，它把“谁选择消费”“谁租用资本”“价格如何形成”说清楚。

企业在每个时点租用资本 K 和有效劳动 AL，最大化利润。竞争性要素市场下，要素价格等于边际产出：

$$r(t) = f'(k(t)) - \delta, \tag{13.21}$$

$$w(t) = A(t)\left[f(k(t)) - k(t)f'(k(t))\right], \tag{13.22}$$

其中 $r(t)$ 是资本净回报率，$w(t)$ 是每单位劳动的工资。

代表性家庭持有资产，获得工资和资本收入，并选择消费路径。人均消费的 Euler 方程为

$$\frac{d\log(C/L)}{dt} = \frac{1}{\theta}\left[r(t) - \rho\right]. \tag{13.23}$$

把企业条件 $r(t) = f'(k(t)) - \delta$ 代入，就回到 (13.20)。

定义 13.1 (RCK 分散竞争均衡). 给定初始资本 $K(0) > 0$，一个分散竞争均衡由价格路径 $\{r(t), w(t)\}_{t\geq 0}$、家庭消费和资产路径、企业投入路径以及总量资本路径组成，并满足：

1. 家庭在给定价格下最大化终身效用，并满足预算约束和横截条件；
2. 企业在每个时点给定价格下最大化利润，要素价格满足 (13.21)–(13.22)；

3. 资本市场、劳动市场和最终品市场清算；

4. 总量资本演化满足资源约束 (13.18)。

这个定义暂时只作为桥梁。第 14 章会更系统地证明，在标准凸性和完全市场条件下，RCK 的计划者配置可以被分散竞争均衡支持；如果存在税收、外部性、借贷约束或代际冲突，计划者路径和市场路径就可能分离。

13.10 稳态：Ramsey 资本水平由什么决定

平衡增长路径上，有效劳动单位变量 k 和 c 都不变。因此 $\dot{c}=0$ 和 $\dot{k}=0$ 同时成立。

由 (13.19)，

$$f'(k^*)=\rho+\theta g+\delta. \tag{13.24}$$

由 (13.18)，

$$c^*=f(k^*)-(n+g+\delta)k^*. \tag{13.25}$$

命题 13.2 (Cobb–Douglas RCK 稳态). *若 $f(k)=k^\alpha$，$0<\alpha<1$，则 RCK 模型的有效劳动单位稳态资本为*

$$k^*=\left(\frac{\alpha}{\rho+\theta g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{13.26}$$

稳态消费为

$$c^*=(k^*)^\alpha-(n+g+\delta)k^*. \tag{13.27}$$

证明. Cobb–Douglas 生产函数的边际产出为 $f'(k)=\alpha k^{\alpha-1}$。稳态条件 (13.24) 给出

$$\alpha(k^*)^{\alpha-1}=\rho+\theta g+\delta. \tag{13.28}$$

因为 $\alpha-1<0$，整理得

$$(k^*)^{1-\alpha}=\frac{\alpha}{\rho+\theta g+\delta}, \tag{13.29}$$

即 (13.26)。再把 k^* 代入资源约束的稳态形式，即得 (13.27)。 □

这个结果非常重要。Solow 模型中，稳态资本由储蓄率 s 决定；Ramsey 模型中，稳态资本由偏好和技术参数决定。更不耐心的经济体，即 ρ 更高，会选择更低的长期资本。技术进步率 g 越高，若 $\theta>0$，维持平滑消费所需的回报要求也越高，从而降低有效劳动单位稳态资本。折旧率越高，资本必须提供更高边际产出才值得持有。

13.11 黄金律资本与 Ramsey 稳态资本

Solow 模型中的黄金律资本满足

$$f'(k^{GR}) = n + g + \delta. \tag{13.30}$$

Ramsey 稳态资本满足

$$f'(k^*) = \rho + \theta g + \delta. \tag{13.31}$$

两者比较可知：

$$k^* < k^{GR} \quad \Longleftrightarrow \quad \rho + \theta g > n + g. \tag{13.32}$$

这个条件称为修正黄金律。黄金律最大化稳态消费，Ramsey 稳态最大化从今天开始的贴现效用。若家庭很不耐心，或者跨期替代意愿低，那么最优路径可能选择低于黄金律的资本水平，因为为了提高很远未来的稳态消费而大幅牺牲今天消费并不划算。

这也是 Ramsey 模型对政策讨论的第一个提醒：不能只说“更多投资带来更高产出”。如果提高投资意味着长期压低消费，且未来收益被高度贴现，那么高投资未必是福利最优。相反，如果一个经济体资本严重不足、资本边际产出很高，当前较高储蓄就可能是合理的转型选择。

13.12 相图：两条零增长曲线

RCK 系统由两条微分方程组成：

$$\dot{k} = f(k) - c - (n + g + \delta)k, \tag{13.33}$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left[f'(k) - \delta - \rho - \theta g\right]. \tag{13.34}$$

$\dot{k} = 0$ 曲线为

$$c = f(k) - (n + g + \delta)k. \tag{13.35}$$

它是一条先上升后下降的驼峰曲线。消费高于这条曲线时，资源不足以维持现有资本，$\dot{k} < 0$；消费低于这条曲线时，剩余产出用于投资，$\dot{k} > 0$。

$\dot{c} = 0$ 曲线由

$$f'(k) = \rho + \theta g + \delta \tag{13.36}$$

给出。因为 $f'(k)$ 随 k 下降，这条曲线在相图中是一条垂直线 $k = k^*$。当 $k < k^*$ 时，资本边际产出高，消费增长；当 $k > k^*$ 时，资本边际产出低，消费下降。

图 13.1 不是数值求解出来的精确 saddle path，而是为了帮助理解方向。真正的 saddle path 是一条使经济既满足 Euler 方程、又满足资源约束和横截条件的唯一收敛路径。资本 k 是状态变量，历史给定，不能跳；消费 c 是控制变量，可以在初始时刻选择。若消费一开始太高，资本会被消耗，最终路径不可行；若消费一开始太低，资本会过度积累，违反横截条件。只有一个合适的初始消费水平能把经济带向稳态。

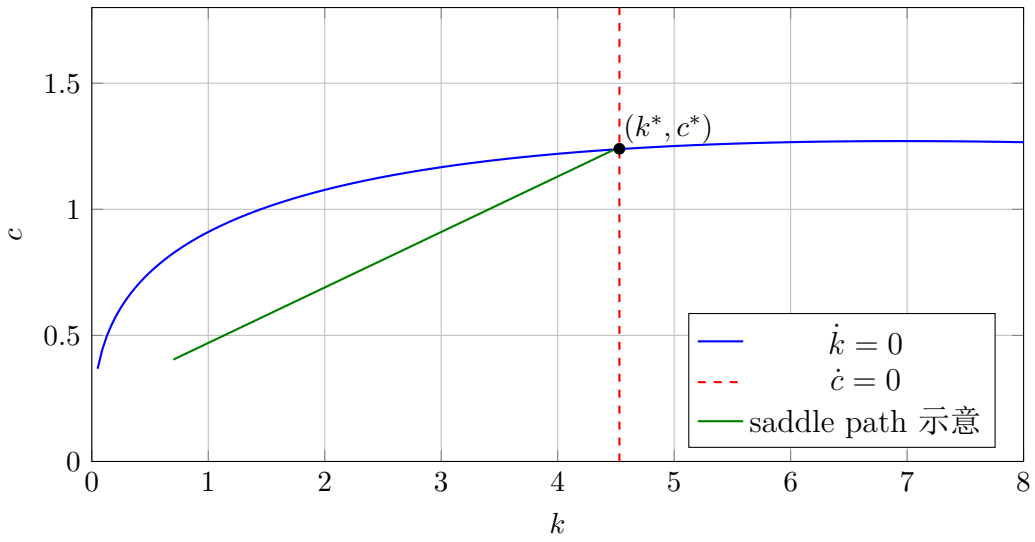

图 13.1: Ramsey–Cass–Koopmans 模型的相图示意

13.13　为什么叫鞍路径稳定

在 Solow 模型中，只要 $k_0 > 0$，经济都会向稳态移动。但 Ramsey 模型不是这样。给定初始资本 k_0，只有一个初始消费 c_0 与最优路径相容。这种稳定性叫鞍路径稳定。

直觉可以用一个低资本经济体说明。若 $k_0 < k^*$，资本边际产出很高，最优路径通常选择较低当前消费和较高投资，让资本积累起来。但消费不能低到离谱，因为家庭重视当前效用；也不能高到耗尽资本，因为那会牺牲未来。saddle path 正是在这两种错误之间找到的最优折中。

研究生增长课会进一步用雅可比矩阵证明稳态附近一个特征值为负、一个特征值为正，因此只有一维稳定流形通向稳态。本章先保留经济直觉：资本慢变量和消费跳变量共同决定了为什么动态均衡需要“选对”初始消费。

13.14　线性化：为什么只有一条稳定路径

现在把上一节的直觉推进到研究生课常用的局部分析。定义动态系统

$$\dot{k} = \Phi(k, c) \equiv f(k) - c - (n + g + \delta)k, \tag{13.37}$$

$$\dot{c} = \Psi(k, c) \equiv \frac{c}{\theta}\left[f'(k) - \delta - \rho - \theta g\right]. \tag{13.38}$$

稳态 (k^*, c^*) 满足 $\Phi(k^*, c^*) = 0$ 和 $\Psi(k^*, c^*) = 0$。

命题 13.3 (RCK 稳态附近的鞍路径性质). *若 $f'(k) > 0$、$f''(k) < 0$，且 $c^* > 0$，则 RCK 动态系统在稳态附近的线性化矩阵有一个正特征值和一个负特征值。因此，稳态是鞍点，通向稳态的稳定路径是一维的。*

证明. 在 (k^*, c^*) 附近线性化，得到

$$\begin{pmatrix} \dot{k} \\ \dot{c} \end{pmatrix} \approx J \begin{pmatrix} k - k^* \\ c - c^* \end{pmatrix}, \tag{13.39}$$

其中 Jacobian 为

$$J = \begin{pmatrix} f'(k^*) - (n + g + \delta) & -1 \\ \dfrac{c^* f''(k^*)}{\theta} & 0 \end{pmatrix}. \tag{13.40}$$

由于 $f''(k^*) < 0$、$c^* > 0$ 且 $\theta > 0$，矩阵的行列式为

$$\det(J) = \frac{c^* f''(k^*)}{\theta} < 0. \tag{13.41}$$

二维矩阵的两个特征值之积等于行列式。既然乘积为负，两个特征值必然一正一负。因此稳态附近有一个发散方向和一个收敛方向。资本 k 是给定初始状态，不能跳；消费 c 可以跳。给定 k_0，只有一个 c_0 能把经济放到稳定方向上并收敛到稳态。证毕。 □

这个证明把“鞍路径”三个字落到了数学上。若初始消费高于稳定路径，经济会沿着不稳定方向离开稳态，通常表现为资本被过快消耗；若初始消费低于稳定路径，资本会过度积累，最后违反横截条件。真正的最优路径不是所有看起来可行的路径，而是同时满足 Euler 方程、资源约束和横截条件的那条稳定流形。

13.15 一个校准例子：偏好如何改变稳态

表 13.1 给出一个简单校准。取 $\alpha = 0.33$、$\delta = 0.06$、$n = 0.01$、$g = 0.02$。基准情形取 $\rho = 0.02$、$\theta = 2$。表中 K/Y 由稳态条件

$$\frac{K}{Y} = \frac{\alpha}{\rho + \theta g + \delta} \tag{13.42}$$

得到。

表 13.1: RCK 稳态对偏好参数的敏感性

情形	ρ	θ	$f'(k^*)$	K/Y	c^*
基准	0.02	2	0.120	2.75	1.24
更不耐心	0.04	2	0.140	2.36	1.20
更愿意跨期替代	0.02	1	0.100	3.30	1.27
更不愿意跨期替代	0.02	4	0.160	2.06	1.16

这张表说明，Ramsey 模型中的长期资本并不是由一个外生储蓄率直接钉住。更高的贴现率降低稳态资本产出比，因为家庭更偏好当前消费；更高的 θ 在存在技术进步时提高维持平滑消费所需的边际回报，因此也会降低有效劳动单位稳态资本。这个结论不是说偏好能解释所有跨国差异，而是说，在动态最优化框架中，储蓄和资本积累必须和家庭跨期权衡一起理解。

13.16 数据例子：资本产出比与隐含资本回报

RCK 模型的核心机制之一，是资本边际产出影响储蓄和消费增长。现实中，资本边际产出不能被简单观察到，但可以用一个粗略公式形成直觉。若生产函数近似为 Cobb–Douglas，资本份额为 α，则

$$MPK = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha \frac{Y}{K} = \frac{\alpha}{K/Y}. \tag{13.43}$$

表 13.2 使用 PWT 的资本产出比，并取 $\alpha = 1/3$、$\delta = 0.06$，计算一个非常粗略的隐含净资本回报 $MPK - \delta$。这些数字不是金融资产收益率，也不是严格估计的资本回报；它们只是帮助理解资本深化如何压低边际产出。

表 13.2: 资本产出比与粗略隐含资本回报

经济体	年份	K/Y	粗略 MPK	粗略 $MPK - \delta$
中国	1980	1.39	24.0%	18.0%
中国	2019	4.94	6.7%	0.7%
美国	1980	3.98	8.4%	2.4%
美国	2019	3.36	9.9%	3.9%
韩国	2019	5.11	6.5%	0.5%
印度	2019	3.87	8.6%	2.6%

注：资本产出比来自 Penn World Table 口径的资本存量与实际产出比；$MPK = \alpha/(K/Y)$，其中 $\alpha = 1/3$，净回报再减去 $\delta = 0.06$。本表用于机制说明，不是资本回报率估计。

这张表的作用不是给出精确事实，而是把 Ramsey 机制和增长数据连起来。中国 1980 年资本产出比较低，按简单 Cobb–Douglas 公式隐含较高资本边际产出，这与高储蓄、高投资、快速资本深化的转型直觉一致。到 2019 年，中国资本产出比显著提高，粗略隐含边际产出下降，这提示我们：继续依靠资本深化推动增长会越来越困难，消费、资本效率和 TFP 的问题会变得更重要。

美国的资本产出比相对稳定，更接近平衡增长路径上的资本回报稳定图景。韩国的高资本产出比提醒我们，追赶经济体在高投资阶段可能逐渐面对资本回报下降。印度的资本产出比低于韩国和中国 2019 年水平，说明其资本深化空间可能仍然存在，但真实回报还取决于基础设施质量、制度环境、金融配置和产业组织。

13.17 中国与发展延伸：高储蓄是谜题还是选择

中国增长经验中，高储蓄和高投资长期是核心事实。Solow 模型可以说，高储蓄提高稳态资本并推动追赶；Ramsey 模型则进一步问：为什么家庭、企业和政府会选择这样的储蓄投资路径？

第一种解释是高资本回报。改革开放早期资本稀缺，基础设施、制造业设备、城市资本和企业资本的边际产出较高，高储蓄可以被理解为对高回报投资机会的反应。这个解释与 RCK 的 Euler 方程一致：当资本净回报高于时间偏好率时，推迟消费、增加投资是有吸引力的。

第二种解释是制度和风险。高储蓄不一定全是最优跨期选择，也可能来自社会保障不足、医疗和教育支出不确定、住房制度、金融抑制、企业留存利润、地方政府投资激励和收入分配结构。若这些因素推高储蓄，观察到的高投资就不一定等同于代表性家庭的福利最优路径。

第三种解释是转型动态。一个经济体从低资本走向较高资本时，最优储蓄率可能阶段性较高；但随着资本深化，资本边际产出下降，最优路径通常会逐步提高消费占比。用 Ramsey 语言说，发展问题不是“高储蓄好不好”这么简单，而是当前资本水平、资本回报、风险结构、公共服务和未来增长预期共同决定的动态选择。

13.18 常见误区

1. **把 Ramsey 模型理解成 Solow 加一个 Euler 方程。** Ramsey 的核心不是多一个方程，而是储蓄率从外生参数变成跨期最优选择。

2. **把 $\dot{c}=0$ 理解为消费不重要。** $\dot{c}=0$ 只是稳态条件；转移路径上消费的选择决定经济能否沿 saddle path 收敛。

3. **忽视横截条件。** Euler 方程只给局部边际条件，横截条件排除过度积累或不可行路径。

4. **把黄金律资本等同于 Ramsey 最优资本。**黄金律最大化稳态消费，Ramsey 最大化贴现福利，两者一般不同。

5. **把代表性家庭当作现实家庭分布。** RCK 是基准模型，不能直接处理异质性、借贷约束和代际分配；这些会在后续章节扩展。

13.19 英文术语表

英文术语	中文含义与说明
Ramsey–Cass–Koopmans model	无限期代表性家庭最优增长模型，把储蓄率内生化。
Representative household	代表性家庭，用一个家庭代表整个经济的消费和储蓄选择。
Euler equation	Euler 方程，描述最优消费跨期变化的边际条件。
Current-value Hamiltonian	当前值 Hamiltonian，把当前效用和状态方程的影子价值合在一起。
Costate variable	协态变量或影子价格，表示状态变量的边际价值。
Transversality condition	横截条件，排除无限期持有有价值资源却不使用的非最优路径。
Saddle path	鞍路径，给定初始资本后通向稳态的唯一最优路径。
Modified golden rule	修正黄金律，Ramsey 稳态下资本边际产出满足偏好和技术增长约束。
Intertemporal elasticity of substitution	跨期替代弹性，衡量消费对跨期回报变化的反应程度。

13.20 本章 Review

如果我来 review 你对本章的理解，第一条标准是你能否说明 Ramsey 和 Solow 的根本差别。Solow 把储蓄率当作外生参数；Ramsey 让消费和储蓄来自代表性家庭的跨期效用最大化。

第二，我会检查你是否能从家庭问题推出 Euler 方程，并解释每一项。消费增长取决于资本净回报、主观贴现率、技术增长项和跨期替代弹性；它不是一个需要背诵的公式，而是“今天少消费一单位是否值得”的边际条件。

第三，你应该能解释鞍路径稳定。资本是历史给定的状态变量，消费是可跳跃的控制变量；给定初始资本，只有一个初始消费选择能同时满足资源约束、Euler 方程和横截条件并收敛到稳态。

最后，我会看你是否能用 Ramsey 纠正政策直觉。更高投资和更高稳态产出不必然意味着更高福利，因为转移路径中的消费损失、贴现和代际分配都重要。

13.21 核心文献

本章的源头是 [Ramsey, 1928]、[Cass, 1965] 和 [Koopmans, 1965]。教材层面，[Romer, 2019] 适合学习连续时间推导，[Barro and Sala-i Martin, 2004] 适合连接增长经验和政策讨论，[Acemoglu, 2009] 提供更完整的动态一般均衡处理，[Stokey et al., 1989] 则是递归方法和动态规划的经典参考。

第十四章　社会计划者、竞争均衡与福利

14.1　本章导读

第 13 章建立了 Ramsey–Cass–Koopmans 模型：代表性家庭选择消费，企业租用资本和劳动，资本积累由资源约束决定。本章要回答一个更深的问题：我们在解 Ramsey 模型时，为什么经常可以先解社会计划者问题，再把结果解释为竞争均衡？这一步看起来像技术便利，实际上是动态一般均衡理论的核心。

如果市场完全、没有外部性、没有税收楔子、没有借贷约束，分散竞争均衡会把家庭和企业的私人最优选择协调成社会计划者的最优路径。这个结论让增长理论变得非常强大：我们可以用计划者问题得到清楚的动态条件，再用价格、工资和利率解释它如何在市场中实现。

但这个等价不是无条件成立的。资本税会让私人资本回报低于社会资本回报；知识外部性会让企业忽视自己对总体生产率的贡献；借贷约束会让一些家庭无法按 Euler 方程平滑消费；代际结构会让代表性家庭假设失效。本章的任务，就是把“等价为什么成立”和“等价何时失败”都讲清楚。

14.2　学习目标

学完本章，你应该能够：

1. 写出 RCK 的社会计划者问题和分散竞争均衡问题。
2. 推导计划者问题的一阶条件、Euler 方程和资源约束。
3. 推导家庭、企业和市场清算条件下的竞争均衡方程。
4. 证明在标准条件下，计划者配置与分散竞争均衡配置等价。
5. 解释第一福利定理在动态增长模型中的含义。
6. 用动态楔子语言说明福利定理何时失效。
7. 用资本税、投资补贴和外部性理解政策楔子。
8. 用消费等价变化理解福利比较，而不是只比较稳态产出。

9. 联系中国增长讨论高投资、资本效率、税费楔子和公共投资的福利含义。

14.3　核心问题

本章的核心问题是：

> 在 RCK 模型中，社会计划者选择的最优增长路径，什么时候可以由分散竞争市场实现？如果不能实现，差异来自哪里？

这个问题把增长理论从“模型求解”推进到“制度和政策判断”。若计划者路径和市场路径等价，我们可以把市场均衡理解为有效配置；若二者不等价，我们就要找楔子：税收、补贴、外部性、市场不完全、借贷约束、信息问题或代际冲突。

14.4　先固定一个简单环境

为了把等价证明写清楚，本章先采用无人口增长、无技术进步的 RCK 环境。生产函数为

$$y = f(k), \qquad f'(k) > 0, \quad f''(k) < 0. \tag{14.1}$$

资本折旧率为 δ，贴现率为 ρ，瞬时效用为 $u(c)$，满足

$$u'(c) > 0, \qquad u''(c) < 0. \tag{14.2}$$

总资源约束为

$$\dot{k} = f(k) - c - \delta k, \qquad k(0) = k_0 > 0. \tag{14.3}$$

这个简化不影响本章的核心逻辑。加入人口增长和劳动增进型技术进步后，只是把变量改成有效劳动单位，并在资源约束中加入 $n+g$，在 Euler 方程中调整增长率项。等价证明的经济含义不变。

14.5　社会计划者问题

社会计划者直接选择消费和资本路径，最大化代表性家庭的贴现效用：

$$\max_{\{c(t),k(t)\}_{t\geq 0}} \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c(t))\, dt \tag{14.4}$$

约束为 (14.3)、非负消费和可行资本路径。

当前值 Hamiltonian 为

$$\mathcal{H}^P = u(c) + \lambda \left[f(k) - c - \delta k \right], \tag{14.5}$$

其中 λ 是资本的社会影子价值。

命题 14.1 (计划者问题的一阶条件). *若内部最优路径存在，则计划者配置满足*

$$u'(c) = \lambda, \tag{14.6}$$

$$\dot{\lambda} = [\rho + \delta - f'(k)]\,\lambda, \tag{14.7}$$

$$\dot{k} = f(k) - c - \delta k. \tag{14.8}$$

若 $u(c)$ 为 CRRA，且相对风险厌恶系数为 θ，则

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left[f'(k) - \delta - \rho\right]. \tag{14.9}$$

证明. 对 Hamiltonian (14.5) 关于控制变量 c 求一阶条件，得 $u'(c) - \lambda = 0$，即 (14.6)。协态方程为

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \frac{\partial \mathcal{H}^P}{\partial k} = \rho\lambda - \lambda[f'(k) - \delta], \tag{14.10}$$

整理得 (14.7)。状态方程就是资源约束 (14.3)。若 u 为 CRRA，则 $u''(c)c/u'(c) = -\theta$。由 $u'(c) = \lambda$ 取对数并求导，结合协态方程，即得 (14.9)。 □

这组条件的含义与第 13 章一致，但这里要多看一层：$f'(k) - \delta$ 是资本的社会净回报。计划者在比较今天消费和明天消费时，会把资本对社会资源的边际贡献完整纳入。

14.6 分散竞争均衡

现在把同一个经济写成市场形式。企业在每个时点租用资本和劳动。标准化劳动为 1，企业问题为

$$\max_{K,L}\; F(K, L) - (\bar{r} + \delta)K - wL, \tag{14.11}$$

其中 $\bar{r}$ 是家庭资产的净回报率，企业租用资本时还要覆盖折旧。按人均变量写，竞争性定价给出

$$\bar{r}(t) = f'(k(t)) - \delta, \tag{14.12}$$

$$w(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t)). \tag{14.13}$$

代表性家庭持有资产 $a(t)$，获得工资和资产收入，选择消费路径：

$$\max_{\{c(t),a(t)\}_{t\geq 0}} \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c(t))\, dt \tag{14.14}$$

约束为

$$\dot{a} = \bar{r}a + w - c. \tag{14.15}$$

家庭的一阶条件给出

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left[\bar{r} - \rho\right]. \tag{14.16}$$

把企业定价条件 (14.12) 代入，就得到

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left[f'(k) - \delta - \rho\right], \tag{14.17}$$

与计划者 Euler 方程完全一致。

定义 14.1 (RCK 竞争均衡). 给定初始资本 k_0，一个竞争均衡由价格路径 $\{\bar{r}(t), w(t)\}$、家庭路径 $\{c(t), a(t)\}$、企业投入路径和总量资本路径 $\{k(t)\}$ 构成，并满足：

1. 家庭在价格路径下最大化 (14.14)，满足预算约束 (14.15) 和横截条件；
2. 企业在每个时点最大化利润，价格满足 (14.12)–(14.13)；
3. 资产市场清算 $a(t) = k(t)$；
4. 最终品市场清算 $c(t) + \dot{k}(t) + \delta k(t) = f(k(t))$。

14.7　计划者解与竞争均衡等价

现在可以把等价关系写成一个清楚命题。

命题 14.2 (RCK 中计划者配置与竞争均衡配置的等价). 在代表性家庭、完全竞争、无税收、无外部性、完全资产市场和标准凸性条件下，任何满足计划者最优条件和横截条件的内部配置，都可以由一组竞争价格支持为分散竞争均衡。反过来，任何分散竞争均衡的配置也满足计划者问题的一阶条件和资源约束。

证明. 证明分两步。

第一步：从计划者配置到竞争均衡。设 $\{c(t), k(t)\}$ 是计划者最优配置。定义价格

$$\bar{r}(t) = f'(k(t)) - \delta, \qquad w(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t)). \tag{14.18}$$

在规模报酬不变和完全竞争下，这组价格使企业利润最大化。令家庭资产持有满足 $a(t) = k(t)$。由计划者资源约束，

$$\dot{k} = f(k) - c - \delta k. \tag{14.19}$$

由欧拉定理，$f(k) = w + [\bar{r} + \delta]\, k$，因此

$$\dot{k} = \bar{r}k + w - c. \tag{14.20}$$

这正是家庭预算约束 (14.15) 在 $a = k$ 时的形式。计划者 Euler 方程与家庭 Euler 方程一致，横截条件也一致。因此，计划者配置可由上述价格支持为竞争均衡。

第二步：从竞争均衡到计划者配置。设 $\{c(t), k(t)\}$ 来自竞争均衡。市场清算给出资源约束，家庭最优给出 Euler 方程，企业最优给出 $\bar{r} = f'(k) - \delta$。代入家庭 Euler 方程，得到计划者 Euler 方程。竞争均衡的横截条件排除非最优过度积累路径。因此，竞争均衡配置满足计划者问题的一阶条件、资源约束和横截条件。 □

这个命题是动态增长模型中的第一福利定理版本。它不是说现实市场总是完美，也不是说政府没有作用；它说在一组强假设下，价格能够把分散个体的边际选择协调成社会最优路径。正因为这个基准足够清楚，后面分析政策和市场失灵时，才知道楔子到底进入哪里。

14.8 一阶条件对照表

表 14.1 把计划者问题和竞争均衡的核心条件放在一起。读这张表时，关键不是背公式，而是看“社会回报”和“私人回报”是否相同。

表 14.1: 计划者问题与竞争均衡的一阶条件对照

对象	社会计划者	分散竞争均衡
资源约束	$\dot{k} = f(k) - c - \delta k$	市场清算推出同一资源约束
资本回报	社会边际净回报 $f'(k) - \delta$	私人净回报 $\bar{r} = f'(k) - \delta$
消费 Euler 方程	$\dot{c}/c = [f'(k) - \delta - \rho]/\theta$	$\dot{c}/c = (\bar{r} - \rho)/\theta$
影子价格	$\lambda = u'(c)$	资产价格对应家庭边际效用价值
横截条件	不留下有价值资本不用	不允许 Ponzi 路径或过度积累

等价成立的核心，是第三行和第二行可以合并：私人回报等于社会回报。一旦税收、外部性或约束让二者不同，市场 Euler 方程就不再等于计划者 Euler 方程。

14.9 动态楔子：福利定理怎样失效

第一福利定理在动态增长模型中的核心条件，可以压缩成一句话：

$$\text{私人跨期边际回报} = \text{社会跨期边际回报}.$$

只要这句话成立，家庭用 Euler 方程平滑消费，企业按边际产出定价，市场清算把所有人的选择拼成可行路径，竞争均衡就能复制计划者配置。只要这句话不成立，福利定理的动态版本就会失效。

为了把这个失效机制写得清楚，定义社会资本净回报为

$$R^S(t) = f'(k(t)) - \delta + \xi(t), \tag{14.21}$$

其中 $\xi(t)$ 表示资本或投资带来的外部收益，例如知识溢出、基础设施网络效应、产业集聚或学习效应。若没有外部性，$\xi(t)=0$。家庭实际看到的私人净回报写成

$$R^P(t)=[1-\tau_k(t)]\,[f'(k(t))-\delta]+s_I(t)-\mu(t), \tag{14.22}$$

其中 $\tau_k(t)$ 是资本收入税，$s_I(t)$ 是投资补贴或低息融资带来的私人回报提升，$\mu(t)$ 是融资约束、交易成本、风险溢价或政策不确定性带来的私人回报折减。

动态楔子定义为

$$\Delta(t)=R^S(t)-R^P(t). \tag{14.23}$$

计划者 Euler 方程使用社会回报：

$$\frac{\dot{c}^P}{c^P}=\frac{1}{\theta}\left[R^S(t)-\rho\right], \tag{14.24}$$

分散均衡 Euler 方程使用私人回报：

$$\frac{\dot{c}^D}{c^D}=\frac{1}{\theta}\left[R^P(t)-\rho\right]. \tag{14.25}$$

二者相减得到

$$\frac{\dot{c}^P}{c^P}-\frac{\dot{c}^D}{c^D}=\frac{\Delta(t)}{\theta}. \tag{14.26}$$

命题 14.3 (动态楔子与福利定理失效). *在代表性家庭 RCK 环境中，若某个时间区间上 $\Delta(t)\neq 0$，且没有其他政策工具正好抵消该楔子，则同一条消费–资本路径不能同时满足计划者 Euler 方程和分散均衡 Euler 方程。因此，分散竞争均衡一般不能复制计划者配置。*

证明. 证明只需比较必要条件。计划者最优路径必须满足 (14.24)，分散均衡路径必须满足 (14.25)。若同一条路径同时是计划者配置和分散均衡配置，则同一消费增长率必须同时等于两个右端项。因此必须有

$$R^S(t)=R^P(t)$$

几乎处处成立，也就是 $\Delta(t)=0$。若在某个正长度区间上 $\Delta(t)\neq 0$，两个 Euler 方程给出的消费增长率不同，同一条内部路径不可能同时满足二者。故福利定理的动态等价失效。 □

这个命题的直觉非常直接。若 $\Delta(t)>0$，社会回报高于私人回报，市场投资太少、消费增长太慢；典型例子是知识外部性、基础设施外部性或融资约束压低私人投资。若 $\Delta(t)<0$，私人回报高于社会回报，市场投资太多、当前消费被压得过低；典型例子是隐性担保、低息信贷、土地补贴或地方政府考核使某些投资项目看起来私人上有利，但社会边际回报较低。

表 14.2: 动态楔子的几种来源

机制	私人回报相对社会回报	Euler 方程中的表现	可能的政策含义
资本收入税	$R^P < R^S$	家庭储蓄动机偏弱，市场资本偏低	若无其他目标，税收扭曲资本积累；若用于公共品或再分配，需完整福利评价
知识或基础设施外部性	$R^P < R^S$	私人投资没有计入对总体生产率的贡献	研发补贴、公共基础设施或协调政策可能有福利依据
融资约束和高风险溢价	$R^P < R^S$ 对受约束主体成立	高回报企业或家庭无法按社会回报扩张	金融改革、信用信息、担保和风险分担可能改善配置
隐性担保和软预算约束	$R^P > R^S$	低社会回报项目仍获得资本，投资偏多	需要硬化预算约束、退出机制和资本回报约束
投资补贴	可使 R^P 高于或接近 R^S	若纠正外部性则改善配置；若补贴低回报项目则加重错配	关键是补贴对象是否对应真实外部性和学习收益

表 14.2 也说明，政策判断不能只看“政府是否干预”。同样是投资补贴，如果它补的是正外部性，可能把私人回报推向社会回报；如果它补的是低效率项目，反而把私人回报推离社会回报。增长政策的核心不是多投或少投，而是让跨期私人边际条件更接近社会边际条件。

14.10　一个动态扭曲的数值例子

为了让 (14.26) 不只是符号，考虑一个瞬时比较。设 $\theta = 2$、$\rho = 0.02$。若无扭曲时资本社会净回报为 $R^S = 0.08$，计划者消费增长率为

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{0.08 - 0.02}{2} = 0.03.$$

现在改变私人回报或社会回报，就会立刻改变市场消费增长率和计划者消费增长率之间的距离。

表 14.3: 动态楔子如何改变消费增长率

情形	R^S	R^P	$\Delta = R^S - R^P$	市场 $\dot{c}/c$
无楔子	0.08	0.08	0.00	3.0%
资本税或融资约束	0.08	0.06	0.02	2.0%
正外部性未内部化	0.11	0.08	0.03	3.0%
隐性担保推高私人回报	0.04	0.08	-0.04	3.0%

注：计划者消费增长率为 $(R^S - \rho)/\theta$，市场消费增长率为 $(R^P - \rho)/\theta$。本表只展示 Euler 方程中的局部扭曲，不是完整转移路径模拟。

表 14.3 的第三行尤其容易误读。市场消费增长率仍是 3.0%，看起来和无楔子一样，但如果存在未被私人主体内部化的正外部性，社会回报其实是 11%，计划者希望消费增长率为 $(0.11 - 0.02)/2 = 4.5\%$。这意味着市场储蓄和投资低于社会最优。第四行则相反：如果隐性担保让私人回报看起来有 8%，但社会回报只有 4%，市场会按 3.0% 的消费增长率推迟消费；计划者只希望增长率为 1.0%。这就是“投资很多但福利不一定高”的动态版本。

14.11　福利比较：为什么不能只看产出

增长政策常常提高投资、资本和产出，但福利比较不能只看产出。一个政策若让当前消费大幅下降、未来收益又很远，即使长期产出更高，也未必提高贴现福利。RCK 模型用效用积分衡量整条路径：

$$W = \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c(t))\, dt. \tag{14.27}$$

常用的福利表达方式是消费等价变化。给定基准路径 $c^0(t)$ 和政策路径 $c^1(t)$，消费等价变化 χ 定义为：

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} u((1+\chi)c^0(t))\, dt = \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c^1(t))\, dt. \tag{14.28}$$

若 $\chi = 0.02$，表示政策路径带来的福利相当于把基准路径每一期消费都提高 2%。这个指标比“稳态产出提高多少”更贴近福利，因为它同时考虑转移成本、时间偏好和消费平滑。

14.12 政策楔子一：资本税

考虑对资本净收入征税，税率为 τ_k。家庭看到的税后资本回报为

$$(1-\tau_k)\left[f'(k)-\delta\right]. \tag{14.29}$$

于是家庭 Euler 方程变成

$$\frac{\dot{c}}{c}=\frac{1}{\theta}\left\{(1-\tau_k)\left[f'(k)-\delta\right]-\rho\right\}. \tag{14.30}$$

资本税的关键作用，是让私人回报低于社会回报。社会多一单位资本带来的资源增加仍是 $f'(k)-\delta$，但家庭只获得其中的 $1-\tau_k$。因此，在没有其他外部性或再分配收益时，资本税会压低私人储蓄动机和长期资本。

若加入劳动增进型技术进步，稳态条件可写成

$$(1-\tau_k)\left[f'(k^*)-\delta\right]=\rho+\theta g. \tag{14.31}$$

税率越高，为了让税后回报达到家庭要求的回报，税前边际产出必须越高；由于边际产出递减，这意味着稳态资本越低。

14.13 一个政策校准表

表 14.4 使用与第 13 章相同的简单参数：$\alpha=0.33$、$\rho=0.02$、$\theta=2$、$g=0.02$、$n=0.01$、$\delta=0.06$。设生产函数为 $f(k)=k^{\alpha}$。这里的“资本税”和“投资补贴”只是模型实验，不是对任何国家政策效果的因果估计。

表 14.4: 资本回报楔子下的稳态比较

情形	τ_k	$f'(k^*)$	K/Y	k^*	c^*
无税基准	0.0	0.120	2.75	4.53	1.24
资本税	0.2	0.135	2.44	3.80	1.21
投资补贴	-0.2	0.110	3.00	5.15	1.25

这张表展示的是机制。资本税降低税后回报，稳态资本和资本产出比下降；投资补贴提高私人投资回报，稳态资本上升。可是福利判断不能只看 k^* 或 c^*。如果补贴需要

扭曲性税收融资，或者推动低效率投资，福利可能下降；如果资本税收入用于高价值公共品或再分配，福利效果也不能只靠这一张表判断。模型实验告诉我们楔子方向，真实政策评价还需要财政约束、分配和执行成本。

14.14　转移路径例子：稳态更高也可能福利更低

为了把消费等价变化变得更直观，考虑一个六期离散近似。基准路径把每期消费标准化为 1。政策 A 代表温和投资提升：前两期消费略低，之后消费略高。政策 B 代表激进投资推动：前期消费压得很低，后期消费较高。设折现因子为 $\beta = 0.96$，效用为 $\log c_t$，有限期福利为

$$W = \sum_{t=0}^{5} \beta^t \log c_t. \tag{14.32}$$

消费等价变化 χ 定义为

$$\sum_{t=0}^{5} \beta^t \log\left[(1+\chi)c_t^0\right] = \sum_{t=0}^{5} \beta^t \log c_t^1. \tag{14.33}$$

表 14.5: 转移期消费损失如何改变福利判断

路径	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	χ
基准	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.00%
政策 A	0.92	0.96	1.01	1.04	1.06	1.07	0.48%
政策 B	0.80	0.88	0.95	1.03	1.08	1.10	-4.04%

表 14.5 的重点不是这些数字本身，而是排序逻辑。政策 B 的后期消费高于基准，也高于政策 A，但它在前两期压低消费太多；在 $\beta = 0.96$ 和对数效用下，整个路径的福利反而低于基准。政策 A 的稳态提升较小，却因为转移成本温和而带来正的消费等价收益。

这说明为什么增长政策不能只用“长期产出更高”来评价。若政策要求一代人承担很大牺牲，而收益很晚才到来，贴现福利和代际分配都可能使政策不再有吸引力。研究生层面的福利分析必须同时看稳态、转移路径、折现、风险和分配。

14.15　政策楔子二：外部性和公共资本

资本税是私人回报低于社会回报的例子。外部性则可能让私人回报也偏离社会回报。设总生产率受到平均资本或公共基础设施影响：

$$y_i = A(\bar{k}) f(k_i), \qquad A'(\bar{k}) > 0. \tag{14.34}$$

单个企业把 $\bar{k}$ 当作给定，只看到私人边际产出 $A(\bar{k})f'(k_i)$。社会计划者还会考虑更多投资对 $A(\bar{k})$ 的影响，因此社会边际回报可能高于私人边际回报。

这类机制常用于讨论基础设施、知识扩散、产业集聚和学习效应。若一个企业投资新技术会训练工人、改善供应链、促进其他企业模仿，那么私人投资可能低于社会最优。相反，如果投资依赖隐性担保、土地财政或信贷扭曲，私人投资也可能高于社会最优。重点不是先验地说“投资越多越好”，而是比较私人回报和社会回报。

14.16 中国与发展延伸：高投资、资本效率与福利

用本章语言看中国增长，高投资不能只被理解为“储蓄率高”。它还涉及市场回报、政策回报和社会回报之间是否一致。改革开放早期，基础设施短缺、制造业资本稀缺、城市化空间大，许多投资的社会回报可能很高。此时，高储蓄和高投资可以与计划者路径比较接近。

随着资本存量上升，问题会变得更复杂。若部分投资流向低回报项目，私人融资成本又被隐性担保、地方政府目标或金融摩擦扭曲，观察到的投资就可能高于社会最优。此时，高产出增长不一定等于高福利增长，因为居民消费、公共服务、债务风险和资源配置效率都进入福利判断。

因此，RCK 的福利框架给中国增长分析一个很有用的提问方式：第一，资本的社会边际回报是否仍高？第二，家庭和企业面对的私人回报是否真实反映社会回报？第三，政策推动的投资是否考虑了转移成本和消费福利？第四，若降低低效投资，释放出来的资源能否转向消费、人力资本、公共服务和创新？

14.17 常见误区

1. **以为计划者问题只是计算技巧。**它确实方便求解，但背后依赖福利定理和完整市场假设。
2. **把竞争均衡有效理解为现实市场永远有效。**有效性只在无税收、无外部性、无约束等强假设下成立。
3. **只比较稳态产出。**福利比较必须看整条消费路径，转移期牺牲也是真实成本。
4. **把资本税一定视为坏政策。**在基准模型中资本税扭曲储蓄，但若存在再分配、公共品融资或其他楔子，福利判断需要完整模型。
5. **把投资补贴一定视为好政策。**补贴可能纠正正外部性，也可能放大低效投资和财政风险。
6. **只说“有市场失灵”但不写楔子。**研究生层面的说法必须指出私人回报和社会回报在哪个边际条件上不同，以及 $\Delta(t)$ 的方向。

14.18　英文术语表

英文术语	中文含义与说明
Social planner problem	社会计划者问题，直接选择资源配置以最大化社会福利。
Decentralized equilibrium	分散竞争均衡，家庭和企业在价格下分别最优化并由市场清算协调。
Welfare theorem	福利定理，说明竞争均衡和 Pareto 有效配置之间的关系。
Implementation	实施，用价格和市场机制支持某个配置成为竞争均衡。
Wedge	楔子，使私人边际条件和社会边际条件分离的税收、外部性或约束。
Dynamic wedge	动态楔子，使私人跨期回报和社会跨期回报分离，从而让市场 Euler 方程偏离计划者 Euler 方程。
Capital income tax	资本收入税，对资本回报征税，通常降低私人储蓄激励。
Consumption-equivalent variation	消费等价变化，把福利差异换算成每期消费比例变化。
Externality	外部性，个体选择影响他人或总体生产率但未被私人回报完全反映。
Public capital	公共资本，基础设施、公共服务和制度能力等影响生产率的公共投入。

14.19　本章 Review

如果我来 review 你对本章的理解，第一条标准是你是否能说明为什么计划者问题和竞争均衡在基准 RCK 中会重合。你应该能写出计划者 Euler 方程，也能写出家庭 Euler 方程和企业定价条件，并说明 $\bar{r} = f'(k) - \delta$ 如何把两者连接起来。

第二，我会检查你是否能说清福利定理的条件。代表性家庭、完全竞争、无税收、无外部性和完全市场不是装饰性假设；它们保证私人回报等于社会回报。一旦这些条件破裂，计划者配置和市场配置就可能分开。

第三，你应该能写出动态楔子

$$\Delta(t) = R^S(t) - R^P(t)$$

并解释它为什么导致福利定理失效。若 $\Delta(t) > 0$，社会回报高于私人回报，市场投资偏少；若 $\Delta(t) < 0$，私人回报高于社会回报，市场可能投资偏多。

第四，我会检查你的福利判断是否只看稳态产出。消费等价变化要求比较整条消费路径；资本税、投资补贴、公共资本和知识外部性的福利效果，都要同时看转移成本、融资方式、分配和社会回报。

最后，对中国和发展经济体，一个合格理解应该能把“高投资”翻译成私人回报、社会回报和政策目标是否一致的问题，而不是简单判断投资多就是好或坏。

14.20 核心文献

本章的增长模型背景仍来自 [Ramsey, 1928]、[Cass, 1965] 和 [Koopmans, 1965]。福利定理和一般均衡基础可参考 [Arrow and Debreu, 1954]、[Debreu, 1959] 和 [Mas-Colell et al., 1995]。增长教材中的系统处理可读 [Barro and Sala-i Martin, 2004]、[Romer, 2019] 和 [Acemoglu, 2009]；递归方法和动态最优化的更深基础可参考 [Stokey et al., 1989]。

第十五章　世代交叠模型 OLG

15.1　本章导读

第 13–14 章的 RCK 模型有一个强大但也很强的假设：经济可以用一个无限期代表性家庭来描述。这个家庭既代表今天的劳动者，也代表未来的退休者；既储蓄，也继承自己的资产；既关心当前消费，也关心所有未来消费。在很多增长问题上，这个假设很有用。但一旦问题涉及养老金、人口老龄化、代际债务、年轻人住房负担或教育成本，代表性家庭就会显得太平滑。

世代交叠模型，也就是 OLG 模型，保留动态一般均衡的核心，却把人口结构放进模型。每一期都有年轻人和老年人同时存在。年轻人工作、消费和储蓄；老年人不工作，依靠年轻时的储蓄或养老金消费。这样一来，储蓄不再只是“同一个家庭把资源从今天搬到明天”，而是不同代人之间通过资本市场、家庭转移和政府制度发生联系。

本章的基准模型是 Diamond OLG。它看起来比 RCK 简单，因为每个人只活两期；但它在经济含义上更丰富。它能解释为什么人口增长影响资本积累，为什么竞争均衡可能动态无效率，为什么 pay-as-you-go 养老金不是普通税收，为什么老龄化会同时影响储蓄、利率、工资和代际福利。

15.2　学习目标

学完本章，你应该能够：

1. 写出两期生命 OLG 模型中的家庭、企业和市场清算条件。
2. 从年轻人的跨期预算约束推导储蓄函数。
3. 推导 Diamond OLG 的资本动态方程。
4. 求出 Cobb–Douglas 和对数效用下的稳态资本。
5. 理解动态无效率的含义和判别条件。
6. 解释 pay-as-you-go 养老金的隐含回报率为什么等于人口和工资增长。
7. 用老年抚养比数据理解中国、韩国、美国和印度的人口结构差异。

8. 讨论中国老龄化、储蓄率、养老制度和资本积累之间的联系。

15.3 核心问题

本章的核心问题是：

> 当不同世代同时存在、年轻人和老年人的收入来源不同、人口增长改变代际规模时，储蓄、资本积累、利率和福利会如何变化？

这个问题是 RCK 模型无法直接回答的。代表性家庭模型可以讨论总储蓄，但很难讨论“谁为谁储蓄”；可以讨论资本税，但很难讨论养老金对年轻人和老年人的不同影响；可以讨论福利，但很难区分代际福利。OLG 模型正是为了补上这些空白。

15.4 模型环境：两期生命

时间离散，$t = 0, 1, 2, \ldots$。每一代人活两期：年轻期和老年期。第 t 期出生的年轻人在 t 期工作，获得工资 w_t；他们消费 $c_{1,t}$，储蓄 s_t；到第 $t+1$ 期变老，获得储蓄回报并消费 $c_{2,t+1}$。

人口按固定速度增长：

$$L_{t+1} = (1+n)L_t. \tag{15.1}$$

生产由竞争性企业完成。总量生产函数为 Cobb–Douglas：

$$Y_t = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{15.2}$$

定义每个年轻劳动者对应的资本

$$k_t \equiv \frac{K_t}{L_t}. \tag{15.3}$$

则人均生产函数为

$$y_t = f(k_t) = k_t^{\alpha}. \tag{15.4}$$

竞争性要素价格为

$$w_t = (1-\alpha)k_t^{\alpha}, \tag{15.5}$$

$$R_{t+1} = 1 + r_{t+1} = 1 - \delta + \alpha k_{t+1}^{\alpha-1}. \tag{15.6}$$

这里 R_{t+1} 是从 t 期储蓄到 $t+1$ 期的总回报率。

15.5　年轻人的问题

第 t 代年轻人的效用为

$$U_t = u(c_{1,t}) + \beta u(c_{2,t+1}), \qquad 0 < \beta < 1. \tag{15.7}$$

预算约束为

$$c_{1,t} + s_t = w_t, \tag{15.8}$$

$$c_{2,t+1} = R_{t+1} s_t. \tag{15.9}$$

合并两期预算约束：

$$c_{1,t} + \frac{c_{2,t+1}}{R_{t+1}} = w_t. \tag{15.10}$$

一阶条件为

$$u'(c_{1,t}) = \beta R_{t+1} u'(c_{2,t+1}). \tag{15.11}$$

它和 RCK 的 Euler 方程很像，但含义不同。RCK 是同一个无限期家庭连续调整消费；OLG 是一个年轻人在年轻消费和老年消费之间选择，并通过资本市场把资源带到未来。

命题 15.1 (对数效用下的储蓄函数)**.** *若 $u(c) = \log c$，则年轻人的最优储蓄为*

$$s_t = \frac{\beta}{1+\beta} w_t. \tag{15.12}$$

证明. 对数效用下，Euler 方程 (15.11) 为

$$\frac{1}{c_{1,t}} = \beta R_{t+1} \frac{1}{c_{2,t+1}}. \tag{15.13}$$

利用 $c_{2,t+1} = R_{t+1} s_t$，可得

$$\frac{1}{c_{1,t}} = \frac{\beta}{s_t}, \qquad \text{所以} \qquad s_t = \beta c_{1,t}. \tag{15.14}$$

又由 $c_{1,t} + s_t = w_t$，得到 $(1+\beta) c_{1,t} = w_t$，因此

$$s_t = \frac{\beta}{1+\beta} w_t. \tag{15.15}$$

□

这个结果很适合教学。对数效用下，储蓄是工资的固定比例。注意它不是外生储蓄率，而是由偏好参数 β 推导出来的储蓄比例。更耐心的年轻人，即 β 更高，会储蓄更大工资份额。

15.6 资本市场清算与资本动态

OLG 的资本市场清算非常直观：第 t 期年轻人的总储蓄，成为第 $t+1$ 期的资本。总储蓄为 $s_t L_t$，下一期资本为 K_{t+1}，所以

$$K_{t+1} = s_t L_t. \tag{15.16}$$

除以 $L_{t+1} = (1+n)L_t$，得到

$$k_{t+1} = \frac{s_t}{1+n}. \tag{15.17}$$

代入对数效用下的储蓄函数和工资 (15.5)：

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha)k_t^{\alpha}. \tag{15.18}$$

这就是 Diamond OLG 的核心动态方程。它和 Solow 模型相似，因为资本由储蓄形成；但它和 Solow 不同，因为储蓄来自年轻人的最优选择，而且人口增长直接稀释年轻人储蓄形成的下一期人均资本。

15.7 稳态资本

稳态满足 $k_{t+1} = k_t = k^*$。由 (15.18)，

$$k^* = \frac{\beta}{1+\beta}\frac{1-\alpha}{1+n}(k^*)^{\alpha}. \tag{15.19}$$

因此

$$k^* = \left[\frac{\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+n)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{15.20}$$

命题 15.2 (Diamond OLG 稳态的比较静态). *在对数效用和 Cobb–Douglas 生产下，稳态资本 k^* 随耐心程度 β 上升而上升，随人口增长率 n 上升而下降。*

证明. 由 (15.20)，稳态资本是

$$k^* = B^{1/(1-\alpha)}, \qquad B = \frac{\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+n)}.$$

因为 $1/(1-\alpha) > 0$，只需判断 B 的变化。对 β 而言，$\beta/(1+\beta)$ 严格递增，所以 B 随 β 上升而上升。对 n 而言，$1/(1+n)$ 严格递减，所以 B 随 n 上升而下降。因此 k^* 随 β 上升而上升，随 n 上升而下降。 □

人口增长降低人均资本的直觉很清楚。年轻人总储蓄形成下一期总资本，但下一期年轻人口更多，给定总资本要分给更多劳动者，人均资本就下降。这是 OLG 与养老金讨论之间的第一条桥：人口结构改变储蓄形成资本的方式。

15.8　相图：离散时间资本映射

图 15.1 画出资本动态

$$k_{t+1} = G(k_t)$$

和 45 度线。交点就是稳态。若初始资本低于稳态，下一期资本高于当前资本；若初始资本高于稳态，下一期资本低于当前资本。因为 Cobb–Douglas 函数凹，路径会逐步收敛到稳态。

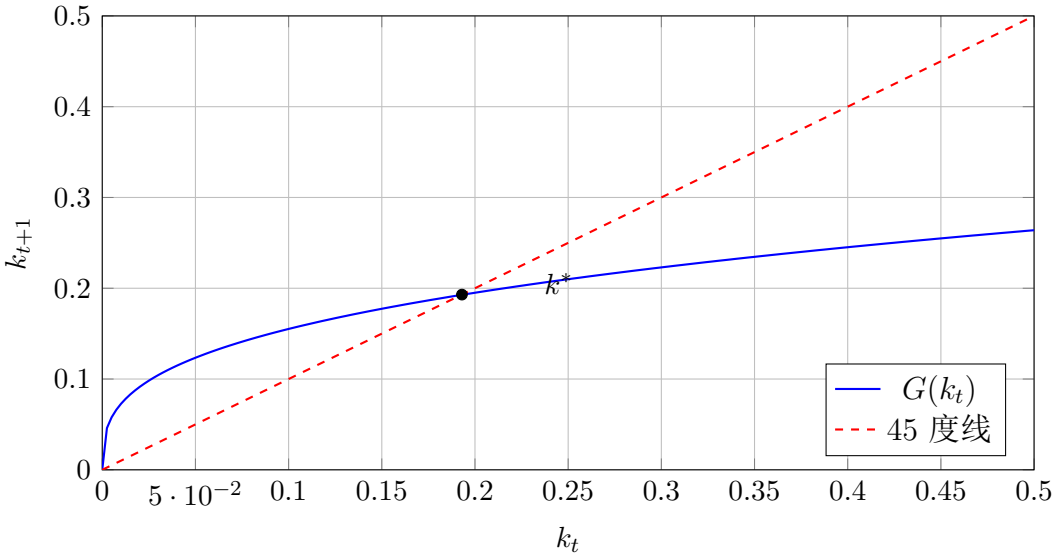

图 15.1: Diamond OLG 的资本动态映射

这张图也说明，OLG 的动态和 RCK 不同。RCK 中消费是跳变量，资本是状态变量，均衡路径是鞍路径；基本 Diamond OLG 中，年轻人的储蓄函数直接决定下一期资本，所以资本动态是一维差分方程。模型更简单，但能处理代表性家庭不能处理的代际问题。

15.9　动态无效率

OLG 模型最重要的研究生级结论，是竞争均衡可能动态无效率。动态无效率指的是：经济中资本过多，以至于减少资本不仅能提高当前消费，也能不降低未来各代消费。换句话说，经济把太多资源投入低回报资本，所有世代本可以通过减少储蓄而变得更好。

在稳态附近，判别条件可以写成

$$r^* < n, \tag{15.21}$$

其中 $r^* = f'(k^*) - \delta$ 是资本净回报率，n 是人口增长率。若资本净回报低于人口增长

率，pay-as-you-go 式代际转移的隐含回报高于资本回报，资本积累可能超过黄金律水平。

黄金律资本满足

$$f'(k^{GR}) = n + \delta. \tag{15.22}$$

若 $k^* > k^{GR}$，则 $f'(k^*) < n + \delta$，也就是 $r^* < n$，经济动态无效率。

命题 15.3 (动态无效率的黄金律判别). *在标准 OLG 稳态中，若 $k^* > k^{GR}$，则稳态动态无效率；若 $k^* < k^{GR}$，则稳态动态有效。*

证明. 稳态总消费可写成

$$c = f(k) - (n + \delta)k.$$

对 k 求导，得

$$\frac{dc}{dk} = f'(k) - (n + \delta).$$

黄金律资本由 $f'(k^{GR}) = n + \delta$ 定义。若 $k^* > k^{GR}$，由于 $f''(k) < 0$，有 $f'(k^*) < f'(k^{GR}) = n + \delta$，所以在 k^* 附近减少资本会提高稳态消费。这说明经济资本过度积累，存在提高各代消费的可行调整。若 $k^* < k^{GR}$，则资本低于消费最大化水平，增加资本仍可提高稳态消费，不能用减少资本实现 Pareto 改善。 □

这个结论是 OLG 模型和 RCK 模型的根本差异之一。RCK 代表性家庭拥有无限期视野和横截条件，通常排除过度积累；OLG 中每一代只关心自己年轻和老年两期，市场均衡未必自动实现跨代 Pareto 效率。

15.10 动态无效率的 Pareto 改善构造

上一节用稳态消费导数解释了动态无效率。研究生课还会进一步问：为什么这不仅是“稳态消费更高”，而是真正的 Pareto 改善？下面给出一个局部构造。

命题 15.4 (过度积累稳态附近存在 Pareto 改善). *设经济处于 Diamond OLG 的稳态，且 $k^* > k^{GR}$。则存在一个足够小的 $\varepsilon > 0$，使得把未来资本从 k^* 降到 $k^* - \varepsilon$，并把释放出来的资源在各代之间适当转移，可以使没有任何一代变差，且至少一代变好。*

证明. 稳态可分配给两期消费的资源可写成

$$c(k) = f(k) - (n + \delta)k. \tag{15.23}$$

因为 $k^* > k^{GR}$，且 k^{GR} 满足 $f'(k^{GR}) = n + \delta$，由凹性可知

$$c'(k^*) = f'(k^*) - (n + \delta) < 0. \tag{15.24}$$

因此存在足够小的 $\varepsilon > 0$，使得

$$c(k^* - \varepsilon) > c(k^*). \tag{15.25}$$

也就是说，在稳态附近少持有一点资本，反而释放出更多可用于消费的资源。

构造如下。第 0 期资本已经由过去储蓄决定，所以不降低第 0 期老年人的资本回报消费。让第 0 期年轻人少储蓄，使第 1 期人均资本降为 $k^* - \varepsilon$；少储蓄释放的资源可以提高第 0 期年轻人的当前消费。此后维持较低资本 $k^* - \varepsilon$。由于新的稳态消费资源严格高于原稳态，额外资源可以用于补偿未来各代的老年消费，使其不低于原路径，同时仍留下正剩余分配给某些世代。因此，存在一个可行配置使所有世代至少不变差，且至少一代变好。证毕。 □

这段构造揭示了动态无效率的经济含义。资本不是越多越好；当资本回报低于维持资本所需的人口和折旧成本时，社会把过多年轻期资源锁进低回报资本。适度减少资本积累，可以同时释放当前资源并提高未来可消费资源。PAYG 养老金、政府债务和代际转移之所以会在 OLG 中产生特殊作用，正是因为它们可以在某些条件下帮助经济减少过度资本积累。

15.11　PAYG 养老金

pay-as-you-go 养老金制度的基本结构是：政府向年轻人征收工资税，用当期税收支付给当期老年人。设工资税率为 τ。年轻人的预算约束变为

$$c_{1,t} + s_t = (1 - \tau) w_t. \tag{15.26}$$

当这代年轻人老年时，他们获得下一代年轻人的缴费。若每个年轻人缴纳 τw_{t+1}，且下一代年轻人数是本代的 $1 + n$ 倍，则每位老年人得到

$$b_{t+1} = (1 + n) \tau w_{t+1}. \tag{15.27}$$

老年预算约束为

$$c_{2,t+1} = R_{t+1} s_t + b_{t+1}. \tag{15.28}$$

PAYG 的隐含回报来自下一代的规模和工资增长。若工资增长率为 g_w，则缴费的一单位资源在下一期通过养老金制度大致获得

$$(1 + n)(1 + g_w) \tag{15.29}$$

的总回报。与资本储蓄的总回报 R 相比，若 $R > (1 + n)(1 + g_w)$，资本化储蓄回报更高；若 $R < (1 + n)(1 + g_w)$，PAYG 可能提供更高代际回报，尤其是在动态无效率环境中。

这解释了为什么养老金不是普通税收。它既改变年轻人的可支配工资和储蓄，也把资源从年轻一代转给老年一代，还改变不同代人之间承担人口风险和资本回报风险的方式。

15.12　参数例子：耐心、人口增长与资本积累

表 15.1 使用对数效用、Cobb–Douglas 生产和式 (15.18)，展示耐心程度和人口增长如何影响稳态资本。这里的数值是模型模拟，不是对现实经济的校准估计。

表 15.1: Diamond OLG 稳态的简单模拟

情形	β	n	k^*	经济含义
较不耐心	0.5	0.01	0.105	储蓄低，稳态资本低
基准	1.0	0.01	0.193	工资一半左右用于储蓄
较耐心	2.0	0.01	0.296	储蓄高，稳态资本高
高人口增长	1.0	0.03	0.187	同样储蓄被更多年轻人稀释

这张表的教学意义在于方向，而不是数值本身。耐心程度越高，年轻人越愿意把工资转移到老年消费，资本积累越高。人口增长越快，同样的总储蓄要分给更多下一期劳动者，人均资本越低。若把技术进步、人力资本和寿命延长纳入模型，结论会更复杂，但这条基本机制仍然存在。

15.13　数据例子：老年抚养比

OLG 模型的现实入口是人口结构。表 15.2 使用 World Bank WDI 指标“老年抚养比”，即 65 岁及以上人口相对于 15–64 岁工作年龄人口的百分比。数据说明，老龄化不是抽象背景，而是直接改变代际转移和储蓄结构的事实。

表 15.2: 老年抚养比：65 岁及以上人口占工作年龄人口百分比

经济体	2000	2010	2024
中国	10.3	11.9	21.2
美国	18.3	19.0	27.7
韩国	9.9	15.1	27.5
印度	7.3	7.8	10.5

注：World Bank WDI 指标 SP.POP.DPND.OL，定义为 65 岁及以上人口相对 15–64 岁工作年龄人口的百分比。2024 为当前表中最近年份。

这张表有三点含义。第一，中国的老年抚养比从 2000 年的约 10.3 上升到 2024 年的约 21.2，说明养老、医疗、家庭储蓄和财政压力都在快速变化。第二，韩国的上升更

快，2024 年已经接近美国水平，显示东亚追赶经济体会在较短时间内从人口红利转向老龄化压力。第三，印度仍然较年轻，这意味着其储蓄、教育、就业和资本深化问题处在不同阶段。

对 OLG 模型而言，老年抚养比上升意味着每个年轻人需要支持更多老年消费。如果养老金靠 PAYG 融资，缴费压力会上升；如果主要靠私人储蓄，年轻期储蓄动机和资产需求会变化；如果老年劳动参与率提高，模型中的“两期生命”假设也需要扩展。

15.14　中国与发展延伸：老龄化、储蓄和养老金

中国增长长期伴随高储蓄。RCK 模型可以把高储蓄解释为跨期最优选择，OLG 模型则进一步拆开：储蓄是谁做的？为谁做？通过什么制度从年轻期转到老年期？

第一，人口结构影响家庭储蓄。预期寿命上升、养老不确定性、医疗支出风险和家庭代际支持变化，都会提高或改变储蓄需求。若年轻人预期未来公共养老金不足，可能增加私人储蓄；若养老保障更完善，私人预防性储蓄可能下降。

第二，人口结构影响资本回报。老龄化可能降低劳动供给增长，使资本相对劳动更充裕，从而压低资本边际产出和利率。但如果老龄化同时推动自动化、健康产业、人力资本投资和延迟退休，实际效果会更复杂。

第三，养老金制度影响代际分配。PAYG 制度把资源从年轻一代转给老年一代，隐含回报取决于人口和工资增长。人口增长放缓时，PAYG 的隐含回报下降，缴费率或财政补贴压力上升。完全积累制则更依赖资本市场回报，暴露于金融风险。现实制度通常是二者混合。

因此，中国老龄化问题不能只用“储蓄率会升还是降”来概括。更好的 OLG 问法是：不同世代的预算约束如何变化？养老制度的隐含回报和资本市场回报如何比较？家庭、企业和政府之间如何分担长寿风险？这些问题都需要 OLG 框架，而不是单一代表性家庭。

15.15　常见误区

1. **把 OLG 当成 RCK 的简化版。** OLG 个体寿命更短，但代际结构更丰富，能讨论代表性家庭无法讨论的问题。

2. **以为年轻人储蓄就是社会总福利最优。** OLG 竞争均衡可能动态无效率，储蓄过多并非不可能。

3. **把 PAYG 养老金当作普通税收。**它同时是税、转移和代际资产，隐含回报取决于人口和工资增长。

4. **只看老年人口比例，不看制度。**同样的老龄化，在不同养老金、医疗、住房和家庭支持制度下，对储蓄和福利影响不同。

5. **把动态无效率当作现实常态。**它是理论上重要的可能性，现实判断需要比较资本回报、人口增长和风险调整后的社会回报。

15.16 英文术语表

英文术语	中文含义与说明
Overlapping generations model	世代交叠模型，不同代人在同一期共存的动态一般均衡模型。
Diamond OLG model	Diamond 两期 OLG 模型，年轻工作储蓄、老年退休消费。
Young-age consumption	年轻期消费，工作期消费。
Old-age consumption	老年期消费，退休期消费。
Dynamic inefficiency	动态无效率，资本过度积累，使减少资本可带来 Pareto 改善。
Golden-rule capital	黄金律资本，最大化稳态消费的资本水平。
Pay-as-you-go pension	现收现付养老金，用当期年轻人缴费支付当期老年人。
Funded pension	积累制养老金，个人或基金投资资产以支付未来养老金。
Old-age dependency ratio	老年抚养比，老年人口相对工作年龄人口的比例。
Intergenerational transfer	代际转移，不同世代之间的资源转移。

15.17 本章 Review

如果我来 review 你对本章的理解，第一条标准是你是否能说明 OLG 为什么不是 Ramsey 的简化版。OLG 的关键是不同世代同时存在，年轻人和老年人目标不同，因此福利和资本积累不再能用一个永生代表性家庭完全概括。

第二，我会检查你是否能推导 Diamond 模型的储蓄和资本动态。你应该能从年轻人的两期预算和效用最大化得到储蓄函数，并说明工资、利率、人口增长如何决定下一期资本。

第三，你应该能解释动态无效率。若稳态资本超过黄金律资本，或资本净回报低于人口增长率，竞争均衡可能储蓄过多；减少资本反而能提高各代消费。这一点是 OLG 相对 RCK 的核心增量。

第四，我会看你是否能用 OLG 分析养老金和老龄化。PAYG 的隐含回报来自人口和工资增长，积累制依赖资本回报；老龄化改变两者，也改变代际分配和公共财政压力。

15.18　核心文献

OLG 模型的经典起点是 [Samuelson, 1958] 和 [Diamond, 1965]。[Diamond, 1965] 将世代交叠结构与新古典生产和资本积累结合起来，是本章基准模型的来源。教材层面可参考 [Barro and Sala-i Martin, 2004]、[Romer, 2019] 和 [Acemoglu, 2009] 对 OLG、动态无效率和养老金的处理。递归方法和更一般动态经济学背景可继续参考 [Stokey et al., 1989]。

第十六章　异质性、约束与动态宏观扩展

16.1　本章导读

到目前为止，我们已经有了三种动态增长语言。Solow 模型告诉我们资本积累和技术进步如何决定长期产出；Ramsey–Cass–Koopmans 模型把储蓄内生化，说明消费和资本路径如何由跨期最优化决定；OLG 模型进一步把不同世代分开，解释养老金、人口结构和动态无效率。

但这些模型仍然共享一个强假设：经济中可以用一个代表性家庭来描述所有家庭的储蓄和消费决策，或者至少可以把一代人压缩成一个平均年轻人和一个平均老年人。这个假设在很多问题上很有用，但它会遮住一个非常关键的事实：现实经济中的家庭、企业和地区并不相同。

有些家庭资产很多，可以平滑失业、疾病和教育支出；有些家庭没有足够抵押品，只能在收入低的时候削减消费。有些企业生产率高、订单充足，却拿不到长期贷款；有些企业生产率较低，但因为抵押品、关系网络或预算软约束而能获得更多资源。有些年轻人有能力进入高收益职业或创业，有些人即使能力相同，也因为初始财富不足而被挡在门外。

本章的任务，是把增长理论从“代表性主体”推进到“分布、约束和配置”。这不是在否定前面的模型，而是在说明它们的边界。RCK 模型中的 Euler 方程是一个漂亮的基准；本章会展示，当借贷约束存在时，Euler 方程会变成一个不等式。第 14 章的福利定理是一个强有力的基准；本章会展示，当市场不完全时，竞争均衡不再等同于计划者配置。OLG 模型把世代分开；本章会进一步把同一世代内部的人也分开。

本章会先从一个两期家庭的借贷约束例子开始，再进入无限期不完全市场模型，也就是 Aiyagari 型模型的核心思想。然后我们会讨论财富分布如何影响总储蓄、利率和资本积累，并用一个职业选择模型解释为什么融资约束会影响长期发展。最后，我们把这些模型和中国及发展经济体中的金融深化、民营企业融资、住房抵押、教育机会和资源配置联系起来。

本章只是把异质性主体模型放入正文主线。若你想看到更完整的递归均衡定义、分布不动点、Aiyagari 模型算法和 Krusell–Smith 思路，应直接接上附录 C；若想实际计算不完全市场模型，再回到附录 F 的一般均衡外循环和误差诊断。

16.2　学习目标

学完本章，你应该能够：

1. 解释为什么代表性家庭模型不能直接处理借贷约束和财富分布。
2. 从带借贷下限的家庭问题推导 Euler 不等式。
3. 区分“想储蓄”和“被迫储蓄”、“高储蓄”和“金融有效配置”。
4. 写出 Aiyagari 型不完全市场模型的家庭问题、企业问题、价格条件和分布不动点。
5. 理解预防性储蓄如何改变均衡资本和利率。
6. 用简单职业选择模型说明财富分布为什么会影响总量生产率和发展路径。
7. 阅读金融深化数据时区分总量信贷规模、信贷配置效率和个体融资约束。
8. 将本章模型用于理解中国的民营企业融资、住房抵押、教育投资和地区发展差异。

16.3　核心问题

本章的核心问题是：

> 当家庭和企业存在异质性、风险无法完全保险、借贷受到抵押品或制度约束时，储蓄、资本积累、利率、职业选择和长期增长会如何改变？

这个问题之所以重要，是因为许多发展经济学和中国增长问题都不是“平均家庭是否愿意储蓄”能回答的。一个国家可以有很高的总储蓄率，同时仍有大量家庭无法为教育和创业融资；可以有很高的信贷占 GDP 比重，同时高生产率民营企业仍然面临融资困难；可以有很快的资本积累，同时资本在企业、行业和地区之间配置并不高效。

因此，本章的关键不是简单地说“有摩擦所以市场失灵”，而是要看清楚摩擦如何进入模型：它改变的是家庭预算集、企业投资集、职业选择集，还是资产市场清算条件？它影响的是总资本水平，还是资本在不同主体之间的配置？它导致的是储蓄不足、储蓄过多，还是储蓄很多但用错了地方？

16.4　为什么代表性家庭不够

代表性家庭模型有一个隐含逻辑：如果所有家庭都相同，或者可以通过完全市场彼此保险，那么我们只需要追踪总消费和总资本。个体风险会被分散掉，家庭之间的财富分布不会影响总量动态。这个时候，家庭 Euler 方程

$$u'(c_t) = \beta R_{t+1} u'(c_{t+1}) \tag{16.1}$$

就足以描述跨期选择。

但现实中，收入风险、失业风险、健康风险和企业经营风险通常不能完全保险。家庭可以储蓄，但未必能自由借款；企业可以投资，但未必能按其生产率获得资金。此时同一个平均消费水平背后，可能对应很不同的分布。

考虑两个经济体。经济体 A 中，每个家庭都有 10 单位资产；经济体 B 中，一半家庭有 0 单位资产，另一半家庭有 20 单位资产。二者平均资产都是 10，但动态含义完全不同。在经济体 A 中，几乎所有家庭都有缓冲资产；在经济体 B 中，一半家庭只要遇到收入下降就会受到借贷约束。平均数相同，边际行为不同。

这就是异质性模型的基本动机。增长理论不只关心总量资本 K，还要关心资产分布 Γ。在代表性家庭模型中，状态变量是 k_t；在异质性主体模型中，状态变量可能是整个分布 Γ_t。这会显著提高模型难度，但也让模型更接近发展问题。

16.5 两期借贷约束：从 Euler 等式到 Euler 不等式

先从最简单的两期家庭开始。家庭第一期收入为 y_1，第二期收入为 y_2，可以选择资产 a。若 $a>0$ 表示储蓄，若 $a<0$ 表示借款。总回报率为 $R=1+r$。家庭效用为

$$U=u(c_1)+\beta u(c_2),\qquad 0<\beta<1, \tag{16.2}$$

其中 $u'>0, u''<0$。预算约束为

$$c_1+a=y_1, \tag{16.3}$$

$$c_2=y_2+Ra. \tag{16.4}$$

若可以自由借贷，家庭选择 a 使得

$$u'(c_1)=\beta R u'(c_2). \tag{16.5}$$

这就是标准 Euler 方程。它说的是：把 1 单位资源从今天转移到明天，今天损失的边际效用等于明天得到的折现边际效用。

现在加入借贷约束：

$$a\geq -b,\qquad b\geq 0. \tag{16.6}$$

这里 b 可以理解为抵押品、信用额度或制度允许的最大借款。若 $b=0$，家庭不能借款；若 b 很大，约束几乎不起作用。

命题 16.1 (带借贷约束的 Euler 不等式). *在问题 (16.2)–(16.6) 中，最优选择满足*

$$u'(c_1)\geq \beta R u'(c_2), \tag{16.7}$$

且若 $a>-b$，则等号成立；若 $a=-b$ 且约束绑定，则通常有严格不等式。

证明. 构造拉格朗日函数

$$\mathcal{L} = u(y_1 - a) + \beta u(y_2 + Ra) + \mu(a + b), \qquad \mu \geq 0. \tag{16.8}$$

对 a 的一阶条件为

$$-u'(c_1) + \beta R u'(c_2) + \mu = 0. \tag{16.9}$$

因此

$$u'(c_1) = \beta R u'(c_2) + \mu. \tag{16.10}$$

由于 $\mu \geq 0$，得到

$$u'(c_1) \geq \beta R u'(c_2). \tag{16.11}$$

互补松弛条件为

$$\mu(a + b) = 0. \tag{16.12}$$

若 $a > -b$，则 $a + b > 0$，所以 $\mu = 0$，Euler 等式成立。若 $a = -b$ 且约束绑定，则 $\mu > 0$，Euler 条件变成严格不等式。证毕。 □

这个不等式非常重要。它说明受约束家庭的当前消费太低，当前边际效用太高；如果可以，它愿意把未来资源更多地挪到今天，但借贷约束阻止了它。于是，家庭并不是因为“不耐心”才消费少，而是因为预算集不允许它把未来收入变成当前消费。

16.6　一个数字例子：同样收入，不同约束

设 $u(c) = \log c$，$\beta = 0.96$，$R = 1.04$，第一期收入 $y_1 = 1$，第二期收入 $y_2 = 2$。这个家庭年轻时收入低，未来收入高，所以它自然想借款来平滑消费。

若没有借贷约束，现值财富为

$$W = y_1 + \frac{y_2}{R} = 1 + \frac{2}{1.04} \approx 2.923. \tag{16.13}$$

对数效用下 $c_2 = \beta R c_1$，代入现值预算约束

$$c_1 + \frac{c_2}{R} = W \tag{16.14}$$

可得

$$c_1^* = \frac{W}{1 + \beta} \approx 1.491, \qquad c_2^* \approx 1.489. \tag{16.15}$$

因此最优资产为

$$a^* = y_1 - c_1^* \approx -0.491. \tag{16.16}$$

也就是说，若允许自由借款，家庭会借约 0.491 单位。

表 16.1: 借贷约束如何改变同一个家庭的消费路径

情形	借贷下限	a	c_1	c_2
无约束	无	-0.491	1.491	1.489
有限借款	$a \geq -0.25$	-0.250	1.250	1.740
不能借款	$a \geq 0$	0.000	1.000	2.000

表 16.1 的含义很直接。这个家庭的生命周期收入并不低，第二期收入甚至较高；问题是第一期收入低而借款能力有限。若完全不能借款，年轻期消费只能等于当期收入 1，远低于无约束时的 1.491。此时观察到的“低消费”不是偏好选择，而是约束结果。

这正是发展经济学中许多问题的微观基础。一个学生未来收入回报高，但家庭无力支付教育成本；一个创业者项目净现值为正，但没有抵押品；一个农户采用新技术能提高长期收入，但短期要承担投资成本和风险。只看平均回报不够，关键是能否跨期转移资源。

16.7　约束楔子：把市场不完全写成可测对象

为了把约束强度写得更清楚，可以定义 Euler 楔子

$$\tau \equiv \frac{u'(c_1)}{\beta R u'(c_2)} - 1. \tag{16.17}$$

若家庭不受约束，Euler 等式成立，$\tau = 0$。若家庭受约束，则 $u'(c_1) > \beta R u'(c_2)$，所以 $\tau > 0$。这个楔子可以理解为家庭面对的“影子借款税”：不是政府真的征税，而是约束让今天消费的机会成本高于市场利率所 implied 的成本。

这个写法很适合连接模型和实证。若低资产家庭的消费增长对收入冲击非常敏感，说明它们不能充分平滑消费；若小企业投资对内部现金流高度敏感，说明外部融资成本高于内部资金成本；若地区之间资本回报差异长期存在，说明资本不能自由流向高回报地点。所有这些都可以被理解为某种资源配置楔子。

16.8　从两期模型到无限期不完全市场

两期模型说明了一个家庭如何受到借贷约束。增长模型还需要回答：当许多家庭都面对收入风险和借贷约束时，均衡资本、工资、利率和财富分布如何共同决定？

考虑一个无限期经济。家庭无限寿命，面临 idiosyncratic 劳动效率冲击 e_t。冲击按 Markov 过程转移：

$$\Pr(e_{t+1} = e' \mid e_t = e) = \Pi(e, e'). \tag{16.18}$$

家庭持有资产 a_t，资产下限为

$$a_{t+1} \geq \underline{a}. \tag{16.19}$$

给定工资 w 和资产回报 $R = 1 + r$，家庭递归问题为

$$V(a, e) = \max_{c, a'} \left\{ u(c) + \beta \sum_{e'} \Pi(e, e') V(a', e') \right\} \tag{16.20}$$

subject to

$$c + a' = we + Ra, \tag{16.21}$$

$$a' \geq \underline{a}, \tag{16.22}$$

$$c \geq 0. \tag{16.23}$$

这个问题和 RCK 的代表性家庭问题形式很像，但状态变量多了 a 和 e。更重要的是，不同家庭有不同资产和不同劳动效率，所以它们不会选择同一消费和储蓄。

16.9　自然借贷限与制度性借贷限

借贷下限 $\underline{a}$ 有两种不同含义。第一种是自然借贷限，来自“家庭无论未来收入多低，都必须能偿还债务”的可行性要求。若最低劳动效率为 $e_{\min}$，工资为 w，资产总回报为 $R = 1 + r > 1$，则未来最低劳动收入的现值为

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{we_{\min}}{R^j} = \frac{we_{\min}}{R - 1} = \frac{we_{\min}}{r}. \tag{16.24}$$

因此自然借贷限可写为

$$\underline{a}^{nat} = -\frac{we_{\min}}{r}. \tag{16.25}$$

如果家庭借得比这个更多，即使永远处于最低收入状态，也无法偿还。

第二种是制度性或抵押性借贷限，例如

$$a' \geq \underline{a}^{adhoc}, \qquad \underline{a}^{adhoc} > \underline{a}^{nat}. \tag{16.26}$$

这表示银行、法律、抵押品或信用记录让家庭实际能借的金额小于自然可偿还上限。发展经济学和中国金融问题通常关心的是第二种约束：不是项目在现值上无法偿还，而是金融系统不愿意或不能把未来收入转化为当前资金。

若内点解存在，Euler 条件为

$$u'(c(a, e)) = \beta R \sum_{e'} \Pi(e, e') u'(c(a'(a, e), e')). \tag{16.27}$$

若借贷约束绑定，则变成

$$u'(c(a, e)) \geq \beta R \sum_{e'} \Pi(e, e') u'(c(a'(a, e), e')). \tag{16.28}$$

16.10 预防性储蓄：风险会让人多储蓄吗

在 RCK 模型中，储蓄主要来自跨期替代：利率高时，未来消费相对便宜，家庭愿意多储蓄。异质性主体模型还多了一个机制：预防性储蓄。即使利率不变，未来收入风险也会使家庭想持有更多资产作为缓冲。

命题 16.2 (预防性储蓄的基本方向). *若边际效用 $u'(c)$ 是凸函数，即 $u'''(c) > 0$，并且未来消费存在无法完全保险的风险，那么在给定当前消费和资产回报时，未来边际效用的期望会因风险上升而提高，从而提高当前储蓄动机。*

证明. 设未来消费为随机变量 $c' = \bar{c} + \varepsilon$，其中 $E[\varepsilon] = 0$。若 u' 是凸函数，则由 Jensen 不等式，

$$E[u'(c')] = E[u'(\bar{c} + \varepsilon)] \geq u'(E[c']) = u'(\bar{c}). \tag{16.29}$$

未来边际效用期望上升，会提高 Euler 方程右边的

$$\beta R E[u'(c')]. \tag{16.30}$$

为了重新满足最优条件，家庭需要提高当前边际效用 $u'(c)$，也就是降低当前消费、增加当前储蓄。证毕。 □

这个命题解释了为什么风险和约束会同时提高储蓄。一个没有保险、不能借款的家庭，会更担心未来收入低谷；为了避免未来消费过低，它今天会多储蓄。宏观上，这可能使总储蓄上升，甚至使均衡利率下降。这是 Aiyagari 模型的核心结果之一：不完全市场和 idiosyncratic 风险可以提高总资本积累。

但这并不意味着金融约束“有利于增长”。预防性储蓄提高的是缓冲资产需求；融资约束可能同时阻止高回报投资。一个经济体可能因为家庭风险高而储蓄很多，但这些储蓄没有流向最需要资金、生产率最高的企业。高储蓄和高配置效率不是同一回事。

16.11 Aiyagari 型均衡：价格、政策函数和分布

现在把家庭放入一般均衡。企业使用资本和有效劳动生产：

$$Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{16.31}$$

竞争性企业选择资本和劳动，因而要素价格满足

$$r = \alpha \left(\frac{K}{L} \right)^{\alpha - 1} - \delta, \tag{16.32}$$

$$w = (1 - \alpha) \left(\frac{K}{L} \right)^{\alpha}. \tag{16.33}$$

由于家庭资产分布会影响总资本，我们需要定义一个分布 $\Gamma(a,e)$。它表示资产为 a、劳动效率为 e 的家庭比例。给定价格 (r,w)，家庭问题 (16.20) 产生最优政策函数

$$a' = g(a,e), \qquad c = h(a,e). \tag{16.34}$$

定义 16.1 (不完全市场的递归稳态均衡). 一个递归稳态均衡由价格 (r,w)、家庭价值函数 $V(a,e)$、政策函数 $g(a,e)$、消费函数 $h(a,e)$、总资本 K 和不变分布 Γ 构成，满足：

1. 给定 (r,w)，V 解家庭 *Bellman* 方程，g,h 为最优政策。
2. 企业利润最大化给出要素价格 (16.32)–(16.33)。
3. 资产市场清算：
$$K = \int g(a,e)\, d\Gamma(a,e). \tag{16.35}$$
4. 劳动供给归一化或由效率分布给出：
$$L = \int e\, d\Gamma(a,e). \tag{16.36}$$
5. 分布不变：若本期分布为 Γ，家庭按 $g(a,e)$ 选择下期资产，劳动效率按 Π 转移，则下期分布仍为 Γ。

这一定义比 RCK 复杂得多。RCK 只需要找一条 k_t, c_t 路径；Aiyagari 型模型需要同时找到每个状态下的家庭政策函数和整个资产分布的不动点。正因为如此，这类模型通常需要数值方法。

16.12　分布转移算子：稳态分布到底是什么意思

为了让“不变分布”更精确，定义分布转移算子 $\mathcal{T}$。给定当前分布 Γ 和政策函数 $g(a,e)$，下一期分布 $\Gamma' = \mathcal{T}\Gamma$ 满足：对任意状态集合 B，

$$\Gamma'(B) = \int \sum_{e'} \mathbf{1}\{(g(a,e),e') \in B\} \Pi(e,e')\, d\Gamma(a,e). \tag{16.37}$$

其中 $\mathbf{1}\{\cdot\}$ 是示性函数。如果一个家庭今天处在 (a,e)，它明天的资产由政策函数 $g(a,e)$ 决定，明天的劳动效率按 $\Pi(e,e')$ 转移。把所有家庭的这种转移加总起来，就得到下一期总体分布。

稳态分布就是这个算子的不动点：

$$\Gamma = \mathcal{T}\Gamma. \tag{16.38}$$

这句话比“分布不变”更清楚：个体一直在移动，有人从低收入变高收入，有人从高资产变低资产；但总体上，各状态中的人口比例保持不变。异质性宏观的难点正是在这里：均衡对象不只是两个数 (K,L)，而是一个函数 V、一个政策函数 g 和一个分布 Γ。

16.13 数值求解步骤：Aiyagari 模型怎样被算出来

完整 Aiyagari 模型通常没有解析解。标准数值算法可以写成五步：

1. 猜一个总资本 K，由企业一阶条件得到价格 (r, w)。
2. 给定 (r, w)，在资产格点和收入状态上求解家庭 Bellman 方程，得到政策函数 $g(a, e)$。
3. 用政策函数和收入转移矩阵构造分布转移算子 $\mathcal{T}$，迭代直到分布收敛到 Γ。
4. 用稳态分布计算家庭总资产供给：

$$K^s = \int g(a, e)\, d\Gamma(a, e). \tag{16.39}$$

5. 比较 K^s 与最初猜测的 K。若二者不同，更新 K 并重复，直到资产市场清算。

这个算法背后的经济逻辑很清楚：价格影响家庭储蓄，家庭储蓄决定资产分布，资产分布加总成资本供给，资本供给又决定价格。代表性家庭模型把这个循环压缩成一个 Euler 方程；异质性主体模型必须把循环完整算出来。

16.14 一个简化数值表：分布如何改变总储蓄

为了理解分布不动点，不必一开始就写完整程序。我们可以看一个简化例子。设家庭只有两种收入状态：低收入 $e_L = 0.5$ 和高收入 $e_H = 1.5$。家庭不能借款，资产只能取三个格点：

$$a \in \{0, 1, 2\}. \tag{16.40}$$

低收入家庭更可能想使用资产缓冲消费，高收入家庭更可能增加资产。假设最优政策在某组价格下近似如表 16.2。

表 16.2: 一个离散资产格点上的示意性储蓄政策

当前收入	$a = 0$	$a = 1$	$a = 2$	经济含义
$e_L = 0.5$	0	0	1	低收入时动用缓冲资产
$e_H = 1.5$	1	2	2	高收入时补充或维持资产

这张表虽然简单，但已经包含了异质性模型的核心。低收入、低资产家庭被卡在 $a' = 0$，不能借款平滑消费；高收入家庭则把收入的一部分转成未来资产。随着时间推移，家庭在不同收入状态之间转换，资产分布也随之移动。稳态分布不是外生给定的，而是由收入风险、借贷约束、偏好和价格共同决定。

若经济中低资产家庭比例很高，总消费对收入冲击会更敏感；若高资产家庭比例提高，总储蓄供给会更大，均衡利率可能下降。于是，财富分布不只是公平问题，也是宏观动态问题。

16.15　图形直觉：借贷约束造成的折点

图 16.1 画的是两期家庭的预算集。无约束时，家庭可以沿着整条预算线选择最优点；有借贷下限时，预算集在 $a = -b$ 处被截断。若无约束最优点需要借款超过上限，家庭只能停在约束边界。

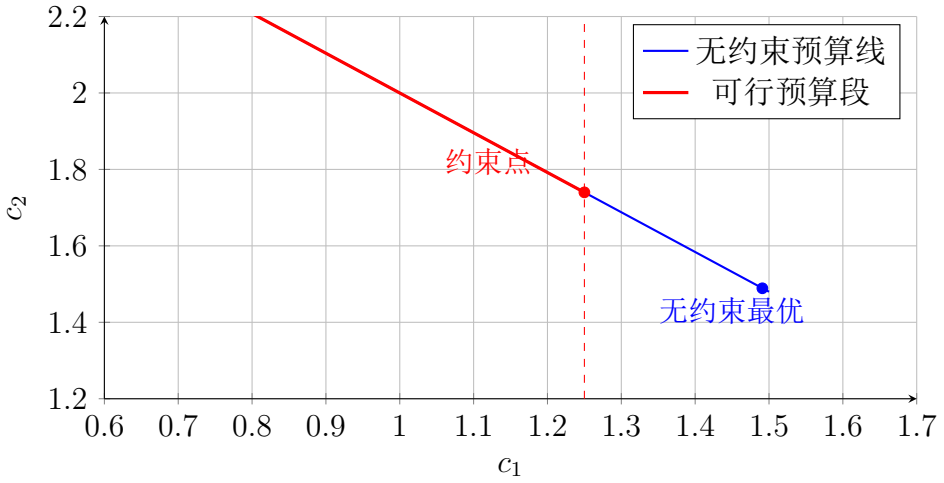

图 16.1: 借贷约束把预算线截断

这幅图给出的直觉很朴素：约束不是改变了家庭偏好，而是删掉了家庭想选但不能选的点。研究融资约束时，最重要的往往不是证明家庭或企业“想要更多钱”，而是证明它们缺少的是可行集，而不是项目回报或能力。

16.16　融资约束与职业选择：财富分布影响增长

家庭借贷约束影响消费平滑；企业和职业选择中的融资约束则会影响生产率和增长。Banerjee–Newman 型模型的核心思想是：成为企业家或进入高收益职业需要固定投资，但贫穷家庭缺乏初始财富和抵押品，因此不能选择高回报活动。

考虑一个非常简化的职业选择模型。每个年轻人有财富 a，可以选择当工人或创业。工人工资为 w。创业需要固定投资 I，若成功可得到产出 zI，其中 $z > 1$。但外部融资受抵押约束：

$$b \le \lambda a, \qquad \lambda \ge 0, \tag{16.41}$$

其中 b 是可借资金，λ 衡量金融市场能把个人财富放大成融资能力的程度。创业可行

条件为

$$a + b \geq I. \tag{16.42}$$

结合 (16.41) 得

$$(1 + \lambda)a \geq I. \tag{16.43}$$

因此创业财富门槛为

$$a \geq \bar{a} \equiv \frac{I}{1 + \lambda}. \tag{16.44}$$

这个公式很简单，但发展含义很深。若金融市场发达，λ 高，创业门槛 $\bar{a}$ 低，更多有能力的人可以进入高生产率活动。若金融市场不发达，λ 低，创业门槛高，职业选择主要由初始财富决定，而不是由能力或项目回报决定。

表 16.3: 金融发展如何降低创业财富门槛

融资能力 λ	门槛 $\bar{a} = I/(1+\lambda)$，设 $I = 1$	含义
0.0	1.00	完全靠自有财富
0.5	0.67	可借到自有财富的一半
1.0	0.50	可借到与自有财富等量资金
3.0	0.25	抵押和信用体系较强

表 16.3 说明，金融发展不是抽象地“让钱变多”，而是改变了谁能进入高回报活动。若高能力但低财富的人被挡在创业门外，总量生产率会下降。若资源更多流向有抵押品但低生产率的主体，经济可以有很高投资率，却没有相应的 TFP 增长。

16.17 金融深化数据：总量信贷不等于约束消失

为了把模型连接到现实，表 16.4 给出 World Bank WDI 指标“国内私人部门信贷占 GDP 比重”。该指标衡量金融机构向私人部门提供的信贷资源相对 GDP 的规模。它是金融深化的一个常用入口，但不能直接等同于“所有家庭和企业都不受约束”。

这张表有两个读法。第一，从总量看，中国私人部门信贷/GDP 已经非常高，接近美国，明显高于很多发展经济体。这说明中国不是一个“缺少信贷总量”的经济体。第二，从本章模型看，高总量信贷并不自动意味着融资约束消失。关键问题是信贷流向谁、以什么价格流向、是否基于生产率和项目回报、是否依赖抵押品、是否存在预算软约束。

这一区分对中国尤其重要。若信贷大量进入房地产、地方融资平台或低效率部门，同时中小民营企业仍然缺少长期资金，那么总量信贷指标会很高，但融资约束和资源错配仍然存在。本章模型提醒我们：金融发展有两个层面，一个是量，一个是配置。增长更关心后者。

表 16.4: 国内私人部门信贷占 GDP 比重，最近可得年份

经济体	年份	私人部门信贷/GDP（%）
美国	2024	201.2
中国	2024	194.2
韩国	2024	160.3
巴西	2024	75.6
印度	2024	40.0

注：World Bank WDI 指标 FS.AST.PRVT.GD.ZS，定义为金融机构向私人部门提供的国内信贷占 GDP 比重。表中使用各经济体 2024 年数值；横向比较时仍应注意统计口径和金融结构差异。

16.18　中国与发展延伸

中国增长经验非常适合用本章框架重新阅读。高储蓄、高投资和高信贷并不自动说明资源配置有效，也不说明家庭和企业没有约束。恰恰相反，中国很多增长问题都发生在“总量很大但分布不均、配置不均”的层面。

第一，家庭部门存在流动性约束和预防性储蓄。教育、医疗、住房和养老支出都会影响家庭储蓄行为。对低资产家庭而言，储蓄不仅是跨期优化，也是一种风险缓冲。若公共保险不足、收入波动较大、住房首付要求高，家庭可能在年轻期压低消费、增加储蓄。代表性家庭模型会把这解释成一个平均储蓄偏好；异质性模型则会问：哪些家庭在储蓄？为什么储蓄？储蓄是为了投资，还是为了防风险？

第二，企业部门存在融资约束和所有制差异。高生产率民营企业若缺乏抵押品或稳定信贷关系，可能无法扩张；低生产率但有隐性担保的企业可能获得更多资金。这会降低资本边际产出在企业之间的均等化程度，从而造成资源错配。第 12 章已经提到 Hsieh–Klenow 式错配问题；本章提供了微观基础：为什么资本没有自然流向高回报企业。

第三，住房资产会改变家庭资产分布和借贷能力。住房既是消费品，也是抵押品。拥有住房的家庭可以通过抵押提高融资能力，没有住房的家庭则更容易受到约束。于是，房地产价格变化不仅影响财富效应，也影响借贷约束、创业机会和代际流动。

第四，教育投资具有典型的前期成本和长期回报。若家庭不能为教育融资，能力相同的孩子会因为家庭财富不同而接受不同教育。这会把初始财富差异转化为人力资本差异，再转化为长期收入差异。增长理论中，人力资本不应只作为一个总量 H 出现，还要追问谁能投资人力资本。

第五，地区金融发展差异会影响结构转型。沿海地区金融机构、产业网络和抵押品市场更发达，企业更容易扩张；内陆或县域经济中，融资可能更依赖关系、担保和地方

财政。若高回报项目无法获得资金，地区间收入差距就不仅是技术差距，也可能是金融配置差距。

16.19 和前几章的关系

本章不是另起炉灶，而是把前几章的条件放松。

在 RCK 模型中，家庭 Euler 方程是等式；在本章中，借贷约束让 Euler 方程变成不等式。这个变化看似很小，却改变了福利和政策含义。

在第 14 章中，完全市场和凸性保证竞争均衡有效；在本章中，市场不完全使私人最优和社会最优分离。若一个家庭或企业因为缺少抵押品而不能投资高回报项目，市场价格并没有实现有效配置。

在 OLG 模型中，不同世代之间存在异质性；在本章中，同一世代内部也存在异质性。一个年轻人可能有资产、住房和家庭支持，另一个年轻人可能完全依赖工资收入。二者面对同一个利率，却有不同的可行集。

在后续内生增长和创新模型中，本章会继续发挥作用。创新需要前期投入和风险承担，若创新者受到融资约束，知识生产和技术扩散都会受影响。结构转型也需要劳动力和资本从低生产率部门流向高生产率部门，若金融市场和制度安排阻碍这种流动，增长会放慢。

16.20 常见误区

1. **把高信贷总量等同于没有融资约束。**总量信贷高只说明金融资产规模大，不说明信贷流向最有效率的主体。

2. **把高储蓄总是解释为耐心。**风险、保险不足和借贷约束也会提高储蓄。

3. **把异质性当作纯粹分配问题。**财富分布会影响总储蓄、利率、投资、职业选择和生产率，因此也是增长问题。

4. **只在企业端讨论融资约束。**家庭端的教育、住房、医疗和创业融资约束同样会影响长期增长。

5. **以为加入异质性只是模型更复杂。**异质性不是装饰，而是让模型能回答代表性主体无法回答的问题。

16.21 英文术语表

英文术语	中文含义与说明
Heterogeneous agents	异质性主体，家庭或企业在资产、收入、生产率、风险或约束上不同。
Borrowing constraint	借贷约束，主体不能自由借款，通常由抵押品、信用记录或制度限制决定。
Liquidity constraint	流动性约束，短期可用资金不足，不能把未来收入充分转化为当前支出。
Incomplete markets	不完全市场，风险不能被完全保险，资产集合不足以覆盖所有状态。
Euler inequality	Euler 不等式，借贷约束下跨期最优条件从等式变成不等式。
Precautionary saving	预防性储蓄，为应对未来风险而持有额外资产。
Stationary distribution	稳态分布，个体状态随时间转移但总体分布保持不变。
Aiyagari model	Aiyagari 不完全市场模型，用异质性家庭、收入风险和借贷约束研究总储蓄。
Collateral constraint	抵押约束，借款额度取决于可抵押资产或自有财富。
Occupational choice	职业选择，个体在工人、创业者或其他职业之间选择。
Financial deepening	金融深化，金融资产、信贷和金融服务相对经济规模的扩大。
Misallocation	资源错配，资源没有流向边际产出最高的主体或部门。

16.22　本章 Review

如果我来 review 你对本章的理解，第一条标准是你是否知道代表性家庭模型遗漏了什么。异质性不是“更现实”这么简单，而是让分布本身成为状态变量：谁有资产、谁受约束、谁能创业、谁承担风险，都会影响总量资本、生产率和福利。

第二，我会检查你是否能解释 Euler 不等式。面对借贷约束 $a \geq -b$ 时，受约束家庭满足

$$u'(c_1) \geq \beta R u'(c_2),$$

这说明它想把未来资源转到今天，但市场不允许。若你只记住不等号方向，却不能说出“当前边际效用过高”的经济含义，理解还不够稳。

第三，你应该能说明 Aiyagari 型模型为什么需要分布。家庭面对收入风险和借贷下限，会进行预防性储蓄；均衡不仅决定利率和工资，还决定资产和收入状态的稳态分布。金融约束可能提高预防性储蓄，但也可能阻止高回报投资，这两个效应不能混为一谈。

第四，我会看你能否把约束从家庭消费推到企业和职业选择。若创业需要固定投资 I，而借款受限于 $b \leq \lambda a$，创业门槛为 $\bar{a} = I/(1+\lambda)$。金融市场越不发达，职业选择越依赖初始财富，资源越可能离开高生产率用途。

最后，对中国与发展经济体而言，合格理解不能只看总储蓄、总投资和总信贷。真正的问题是资源是否流向高回报家庭、企业、行业和地区；异质性与约束不是主线模型的附录，而是理解现代增长和发展问题的核心工具。

16.23 核心文献

不完全市场和异质性主体宏观的经典起点包括 [Bewley, 1977]、[Huggett, 1993] 和 [Aiyagari, 1994]。其中 [Aiyagari, 1994] 是本章 Aiyagari 型模型的直接来源，说明未保险的个体风险和借贷约束如何影响总储蓄。职业选择、财富分布和发展路径的经典文献可参考 [Banerjee and Newman, 1993]。更一般的动态规划和递归均衡背景可继续参考 [Stokey et al., 1989]，增长教材层面的处理可参考 [Acemoglu, 2009] 和 [Romer, 2019]。

第五部分

内生增长

第十七章　AK 模型与资本广义化

17.1　本章导读

前四个部分建立了一条清楚的基准路线：Solow 模型告诉我们，若资本边际产出递减，单靠资本积累不能永久维持人均增长；RCK 模型把储蓄变成家庭的最优选择，但长期增长仍然来自外生技术进步；OLG 和异质性模型进一步说明，代际结构、借贷约束和财富分布会改变储蓄与资本配置。

现在进入内生增长。内生增长的核心问题很直接：如果长期增长不能只靠外生技术进步解释，那么经济内部有什么机制可以持续产生增长？第一种回答就是 AK 模型。它把生产函数写成

$$Y = AK, \tag{17.1}$$

也就是总产出与广义资本成比例。这里的 K 不一定只是机器、厂房和设备，也可以包括人力资本、公共基础设施、组织能力、知识资本、供应链能力和制度化的生产经验。只要这些可积累因素合在一起不呈现强烈递减报酬，资本积累本身就可能带来长期增长。

AK 模型看起来比 Solow 和 Ramsey 更简单，但它的含义更激进。Solow 模型中，提高储蓄率只能提高长期收入水平，不能提高长期增长率；AK 模型中，提高储蓄率、投资效率或广义资本回报，可以永久提高增长率。这个差异是内生增长理论的入口。

本章不是要把 AK 当成现实的完整模型。它太简洁，容易把技术进步、创新、资本质量和制度环境都压缩进一个参数 A。但正因为它简单，它能清楚地说明内生增长的第一个逻辑：若可积累因素的社会回报不随规模下降到零，长期增长就不必依赖外生技术进步。

17.2　学习目标

学完本章，你应该能够：

1. 解释为什么资本边际报酬递减会使 Solow 模型不能内生长期增长。
2. 推导 AK 模型中的人均资本、人均产出和消费增长率。

3. 比较 Solow 与 AK 中储蓄率、折旧率、人口增长率和生产率参数的长期作用。
4. 理解“广义资本”为什么可以包括人力资本、知识资本、公共资本和组织资本。
5. 用 Ramsey 形式推导 AK 模型中的最优消费增长率。
6. 区分私人回报和社会回报，理解资本外部性如何支持内生增长。
7. 识别 AK 模型的刀锋条件：广义资本回报不递减是强假设，不是政策结论本身。
8. 理解非凸性、基础设施外部性和门槛效应如何造成多稳态或政策协调问题。
9. 用投资率数据理解 AK 模型的启发和局限。
10. 将 AK 模型用于分析中国高投资、基础设施、人力资本和资本效率问题。

17.3　核心问题

本章的核心问题是：

> 什么样的资本积累可以产生长期增长？为什么在 Solow 模型中储蓄率只影响收入水平，而在 AK 模型中储蓄率可以影响长期增长率？

回答这个问题的关键，是资本边际产出的长期行为。若生产函数为 $y = k^{\alpha}$，且 $0 < \alpha < 1$，那么

$$f'(k) = \alpha k^{\alpha-1} \tag{17.2}$$

会随着 k 上升而下降。当资本越来越多时，新增一单位资本带来的产出越来越少。长期中，资本深化会被折旧、人口增长和技术稀释抵消，人均资本收敛到稳态。

若生产函数为 $y = Ak$，则

$$f'(k) = A \tag{17.3}$$

不随 k 下降。只要资本净积累率为正，人均资本和人均产出就能持续增长。AK 模型的所有力量，都来自这个看似小但非常关键的变化。

17.4　从 Solow 到 AK：递减报酬在哪里消失

先回到 Solow 模型。若人均生产函数为

$$y = k^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{17.4}$$

且储蓄率为 s，则人均资本动态为

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - (n + \delta)k. \tag{17.5}$$

两边除以 k，得到资本增长率

$$\frac{\dot{k}}{k} = sk^{\alpha-1} - (n+\delta). \tag{17.6}$$

因为 $\alpha - 1 < 0$，随着 k 增加，$sk^{\alpha-1}$ 会下降。最终它等于 $n+\delta$，资本增长停止。

AK 模型把人均生产函数改为

$$y = Ak, \qquad A > 0. \tag{17.7}$$

同样假设储蓄率为 s，资本动态为

$$\dot{k} = sAk - (n+\delta)k. \tag{17.8}$$

因此

$$\frac{\dot{k}}{k} = sA - (n+\delta). \tag{17.9}$$

右边不再随 k 下降。若 $sA > n+\delta$，人均资本永久增长；若 $sA = n+\delta$，人均资本保持不变；若 $sA < n+\delta$，人均资本下降。

命题 17.1 (Solow 与 AK 的长期差异). *在无外生技术进步时，若 $y = k^\alpha$ 且 $0 < \alpha < 1$，Solow 模型存在有限稳态资本；若 $y = Ak$，则只要 $sA > n+\delta$，人均资本和人均产出以常数率 $sA - (n+\delta)$ 持续增长。*

证明. Solow 情形下，稳态满足

$$s(k^*)^\alpha = (n+\delta)k^*. \tag{17.10}$$

整理得

$$k^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{1/(1-\alpha)}, \tag{17.11}$$

这是有限正数。AK 情形下，由 (17.9)，资本增长率恒为 $sA-(n+\delta)$。若该值为正，则 $k(t) = k(0)e^{[sA-(n+\delta)]t}$，产出 $y(t) = Ak(t)$ 以同一速度增长。证毕。 □

这个命题是内生增长的第一块砖。它告诉我们，长期增长能否内生化，取决于可积累因素是否最终遭遇强递减报酬。如果所有可积累资本都是单一物质资本，递减报酬很自然；如果资本被广义化为物质资本、人力资本、知识资本和公共资本的组合，长期边际回报就可能不那么快下降。

17.5 一个数值表：储蓄率为什么改变增长率

设 $A = 0.20$，折旧率 $\delta = 0.05$，人口增长率 $n = 0.01$。AK 模型的人均增长率为

$$g_y = sA - (n+\delta). \tag{17.12}$$

表 17.1: AK 模型中储蓄率对长期增长率的影响

储蓄率 s	sA	$n+\delta$	$g_y = sA-(n+\delta)$
0.20	0.040	0.060	-2.0%
0.30	0.060	0.060	0.0%
0.40	0.080	0.060	2.0%
0.50	0.100	0.060	4.0%

表 17.1 展示不同储蓄率下的增长率。

这张表和 Solow 模型的含义完全不同。在 Solow 模型中，较高储蓄率让经济达到更高的资本水平，但长期人均增长率仍然由外生技术进步决定。在 AK 模型中，储蓄率直接进入长期增长率。若把 s 理解为广义投资率，把 A 理解为广义资本效率，那么长期增长由“投资多少”和“投资效率多高”共同决定。

但这也提示了 AK 模型的危险：只要把 A 设得足够高、把 s 设得足够高，就能得到任意高的增长率。因此，AK 模型本身不是增长事实的充分解释。它更像一个理论放大镜：迫使我们问，哪些投资真的能形成高社会回报的广义资本？

17.6 Ramsey 版本的 AK 模型

现在把储蓄率内生化。这里有一个容易混淆但很重要的技术点：如果经济有人口增长，代表性家庭的目标函数通常不是简单地最大化“一个固定个人”的效用，而是最大化所有成员的贴现效用。令人口为 $L(t)=L_0e^{nt}$，总福利可以写成

$$\int_0^\infty e^{-\rho t}L(t)u(c(t))\,dt = L_0\int_0^\infty e^{-(\rho-n)t}u(c(t))\,dt. \tag{17.13}$$

忽略常数 L_0 后，家庭实际面对的贴现率是 $\rho-n$。这个写法会使人口增长在资源约束中造成资本稀释，但不会像资本的私人边际回报那样直接进入 Euler 回报项。设

$$U_0=\int_0^\infty e^{-(\rho-n)t}u(c(t))\,dt, \tag{17.14}$$

其中 $u(c)$ 为 CRRA：

$$u(c)=\frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta},\qquad \theta>0. \tag{17.15}$$

资源约束为

$$\dot{k}=Ak-c-(n+\delta)k. \tag{17.16}$$

当前值 Hamiltonian 为

$$\mathcal{H}=u(c)+\lambda\left[Ak-c-(n+\delta)k\right]. \tag{17.17}$$

命题 17.2 (Ramsey–AK 的消费增长率). 若内部最优路径存在，且社会福利按人口加总，则最优消费增长率为

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(A - \delta - \rho), \tag{17.18}$$

人口增长 n 出现在资源约束中，但在上述人口加总福利口径下，它会在协态方程中与有效贴现率的 $-n$ 相互抵消，因此不进入最终 *Euler* 方程。

证明. 一阶条件给出

$$u'(c) = \lambda. \tag{17.19}$$

协态方程为

$$\dot{\lambda} = (\rho - n)\lambda - \lambda(A - n - \delta) = (\rho + \delta - A)\lambda. \tag{17.20}$$

其中第一项 $(\rho - n)\lambda$ 来自人口加总福利对应的有效贴现率，第二项 $\lambda(A - n - \delta)$ 来自状态方程对 k 的边际影响。可以看到，人口增长导致的资本稀释 $-n$ 与有效贴现率中的 $-n$ 抵消。由 $u'(c) = \lambda$ 对时间求导，且 CRRA 满足

$$\frac{u''(c)c}{u'(c)} = -\theta, \tag{17.21}$$

得到

$$\dot{\lambda} = u''(c)\dot{c}, \qquad \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{u''(c)c}{u'(c)}\frac{\dot{c}}{c} = -\theta\frac{\dot{c}}{c}. \tag{17.22}$$

合并两式：

$$-\theta\frac{\dot{c}}{c} = \rho + \delta - A, \tag{17.23}$$

整理即得 (17.18)。 □

这个结果和 RCK 的 Euler 方程非常像：

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left[f'(k) - \delta - \rho\right]. \tag{17.24}$$

区别在于，AK 中 $f'(k) = A$ 是常数。因此消费增长率不随资本积累下降。只要 $A-\delta > \rho$，家庭愿意让消费持续增长；若 $A - \delta < \rho$，资本回报不足以补偿耐心成本，最优消费不会持续增长。

如果没有采用人口加总福利，而是直接最大化 $\int e^{-\rho t}u(c)dt$ 且状态方程仍写成 (17.16)，那么 Euler 方程会变成 $(A - n - \delta - \rho)/\theta$。这不是另一个经济结论，而是目标函数口径不同造成的数学差异。增长教材中通常采用人口加总福利，因此本书后续沿用 (17.18) 的口径。

为了使无限期福利有限，还需要满足通常的可积性条件。若消费以常数率 g_c 增长，人口加总 CRRA 效用下要求

$$\rho - n > (1 - \theta)g_c \tag{17.25}$$

或在对数效用下 $\rho > n$。这提醒我们：增长率不能脱离偏好、人口和福利条件随意设定。

17.7 广义资本：AK 的经济含义

若 K 只是机器设备，$Y = AK$ 很难令人信服。机器越多，劳动、土地、管理和市场需求不变时，边际产出通常会下降。AK 模型真正有解释力的地方，是把 K 理解为广义资本。

第一，人力资本可以抵消物质资本递减。更多机器需要更熟练的劳动者、更好的工程师、更有效的管理者。若教育、培训和经验也随资本积累增长，单个物质资本的递减可能被人力资本积累抵消。

第二，公共资本可以提高私人资本回报。道路、港口、电网、通信网络、法治和公共卫生系统，会让同样的私人投资产生更高产出。若公共资本随经济积累扩张，私人资本边际产出下降会慢一些。

第三，知识和组织资本具有非竞争性或部分非竞争性。一个管理流程、生产经验或技术知识被创造出来后，可以在多个生产单位中重复使用。学习、模仿和扩散使资本积累不仅增加机器数量，也改进生产方式。

第四，产业网络和供应链本身是一种资本。一个企业投资可能训练供应商、形成配套市场、降低其他企业进入成本。若这些外部性没有完全进入私人回报，社会回报可能高于私人回报。

因此，AK 模型中的 A 不是一个纯技术常数。它包含投资效率、资本质量、公共资本配套、人力资本吸收能力、制度环境和资源配置效率。高投资率只有在 A 足够高时才带来高增长；若 A 下降，高投资可能只是低效率资本堆积。

17.8 资本外部性：私人递减，社会不递减

AK 不一定要求每个企业的私人生产函数都是线性的。一个更有现实感的写法是：单个企业面临递减报酬，但总体资本带来外部性。

设企业 i 的生产函数为

$$y_i = A\bar{k}^{\eta}k_i^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1, \quad \eta \geq 0, \tag{17.26}$$

其中 k_i 是企业自身资本，$\bar{k}$ 是经济平均资本。单个企业把 $\bar{k}$ 当作给定，所以私人资本边际产出递减：

$$\frac{\partial y_i}{\partial k_i} = \alpha A\bar{k}^{\eta}k_i^{\alpha-1}. \tag{17.27}$$

在对称均衡中，$k_i = \bar{k} = k$，总量人均产出为

$$y = Ak^{\alpha+\eta}. \tag{17.28}$$

若

$$\alpha + \eta = 1, \tag{17.29}$$

则总量上得到 AK：

$$y = Ak. \tag{17.30}$$

这个模型说明，内生增长可以来自外部性。每个企业自己看，资本仍然递减；但当所有企业都投资时，平均资本提高带来学习、配套、市场厚度和知识扩散，使社会层面的资本回报不下降。这也是 Arrow learning-by-doing 和 Romer 早期资本外部性模型的核心思想。

17.9 社会回报与私人回报

外部性模型最重要的政策含义，是私人回报和社会回报分离。企业只看到

$$MPK^{private} = \alpha A \bar{k}^{\eta} k_i^{\alpha-1}. \tag{17.31}$$

社会计划者还会考虑单个投资对 $\bar{k}$ 的影响。在对称均衡中，总量生产函数为 $y = Ak^{\alpha+\eta}$，社会边际产出为

$$MPK^{social} = (\alpha + \eta) A k^{\alpha+\eta-1}. \tag{17.32}$$

当 $\eta > 0$ 时，社会回报高于私人回报。若市场没有补贴、公共投资或知识产权制度来内部化外部性，私人投资可能低于社会最优。

但这不是说所有投资都应该补贴。若投资外部性为正，补贴可能有用；若投资受到隐性担保、地方增长考核或金融错配推动，私人投资可能反而高于社会最优。AK 章节和上一部分福利章节连接起来，核心问题不是“投资多不多”，而是“私人回报是否反映社会回报”。

17.10 AK 的边界：线性回报是刀锋条件

AK 模型最容易被误用的地方，是把 $y = Ak$ 当作一个宽松假设。实际上，它非常强。为了看清这一点，把生产函数写成更一般的形式：

$$y = Bk^{\psi}, \qquad B > 0, \quad \psi > 0. \tag{17.33}$$

给定储蓄率 s，资本动态为

$$\dot{k} = sBk^{\psi} - (n + \delta)k, \tag{17.34}$$

两边除以 k：

$$\frac{\dot{k}}{k} = sBk^{\psi-1} - (n + \delta). \tag{17.35}$$

命题 17.3 (AK 是长期增长的刀锋情形). 在 (17.33) 中，若 $\psi < 1$，资本增长率随 k 上升而下降，经济收敛到有限稳态；若 $\psi = 1$，资本增长率为常数，得到 AK 式长期增长；若 $\psi > 1$，资本增长率随 k 上升而上升，模型一般会产生爆炸性增长或需要额外约束才能存在平衡增长路径。

证明. 由 (17.35)，资本增长率的关键项是 $sBk^{\psi-1}$。若 $\psi<1$，该项随 k 下降，并且稳态满足 $sBk^{\psi-1}=n+\delta$，即存在有限正稳态。若 $\psi=1$，该项等于常数 sB，增长率不随资本水平变化。若 $\psi>1$，该项随 k 上升，资本越多增长越快；在没有拥挤、有限资源、调整成本、政策约束或技术边界时，模型不会给出稳定的平衡增长路径。命题得证。 □

这个命题说明，AK 模型不是“只要投资就能永久增长”。它要求广义资本的社会回报恰好不随规模下降。若回报略微递减，模型就回到 Solow 型水平效应；若回报递增，模型会出现非凸性、门槛或爆炸，需要新的均衡选择机制。因此，AK 的正确用法不是直接推出“提高储蓄率可以永久提高增长率”，而是追问：哪些资本组合能让 ψ 接近 1？这种不递减回报是竞争、学习和基础设施配套带来的，还是被补贴、债务和统计口径人为抬高的？

17.11 非凸性、基础设施与门槛效应

很多真实发展问题不是平滑的 AK，而是带有非凸性。基础设施、产业链、人力资本和市场规模常常有互补性：没有电网，机器回报低；没有港口，制造业出口回报低；没有技能工人，先进设备利用率低；没有足够企业，供应商和专业服务也难形成。此时，资本回报可能在低水平时很低，跨过某个门槛后突然变高。

可以用一个极简模型表示。设广义资本效率依赖于资本是否跨过基础设施门槛 $\bar{k}$：

$$A(k)=\begin{cases}A_L, & k<\bar{k},\\ A_H, & k\geq\bar{k},\end{cases}\qquad A_H>A_L. \tag{17.36}$$

生产函数为 $y=A(k)k$，资本增长率为

$$\frac{\dot{k}}{k}=sA(k)-(n+\delta). \tag{17.37}$$

如果

$$sA_L<n+\delta<sA_H, \tag{17.38}$$

那么低于门槛时资本增长率为负，高于门槛时资本增长率为正。

命题 17.4 (基础设施门槛与多稳态). *在 (17.36)–(17.37) 中，若条件 (17.38) 成立，则 $k<\bar{k}$ 的经济会向低资本状态收缩，而 $k\geq\bar{k}$ 的经济会沿高回报区域增长。初始条件和能否跨过门槛会决定长期路径。*

证明. 当 $k<\bar{k}$ 时，$A(k)=A_L$，由 (17.38) 得 $sA_L-(n+\delta)<0$，所以 $\dot{k}/k<0$。资本下降使经济留在低回报区域。相反，当 $k\geq\bar{k}$ 时，$A(k)=A_H$，由 (17.38) 得 $sA_H-(n+\delta)>0$，所以 $\dot{k}/k>0$。资本增长使经济留在高回报区域。因而门槛两侧对应不同动态路径。 □

这个门槛模型比普通 AK 更接近许多发展经济学直觉。公共基础设施和产业集群可能不是连续地提高 A，而是在形成网络之后才显著提高资本回报。这为“大推动”、基础设施协调和产业集聚政策提供了理论入口。但它也带来一个危险：只要声称“跨过门槛后会高增长”，任何大规模投资都似乎有理由。研究生层面的分析必须继续问：门槛在哪里？A_H 是否真实高于 A_L？投资能否互补形成系统，还是只是堆出闲置资产？谁承担跨越门槛的成本？如果预测错误，退出机制是什么？

表 17.2: 门槛型 AK 例子

区域	$A(k)$	s	$n+\delta$	$\dot{k}/k$
低资本区 $k<\bar{k}$	0.12	0.40	0.06	-1.2%
高资本区 $k\geq\bar{k}$	0.20	0.40	0.06	2.0%

注：本表为教学数值例子。它展示同一储蓄率下，若基础设施和产业互补性使 $A(k)$ 跨过门槛后上升，增长路径可能发生离散变化。

17.12 政策含义的边界

AK 模型经常被用来支持高投资、基础设施、教育和产业政策。但从模型到政策，中间至少有四道关口。

第一，政策必须说明外部性或非凸性在哪里。若只是私人项目有利可图，市场本身就有投资激励；若项目私人回报低、社会回报也低，补贴只会制造错配。政策理由必须是社会回报高于私人回报，或存在协调失败导致私人主体无法同时投资。

第二，政策必须说明 A 会提高，而不是只提高 s。AK 增长率是 $sA-(n+\delta)$。如果政策只提高投资率 s，但因为错配、腐败、重复建设和低利用率使 A 下降，总效果可能很小甚至为负。

第三，政策必须考虑财政和金融约束。基础设施或产业补贴如果通过扭曲性税收、地方债务、金融抑制或隐性担保融资，就会把第 14 章的动态楔子带进来。投资项目本身可能提高生产率，但融资方式和风险承担可能降低福利。

第四，政策必须有评估和退出机制。AK 的线性回报使模型对参数非常敏感：A 从 0.20 降到 0.14，长期增长结论就可能完全改变。若政策无法识别哪些项目真正提高 A，也没有失败退出机制，就容易把“内生增长”变成低效投资的理论包装。

表 17.3: 从 AK 机制到政策判断的检查表

政策对象	成立所需机制	主要风险	应检查的证据
基础设施	降低交易成本、形成网络外部性、提高私人资本回报	低利用率、重复建设、债务滚动	交通量、物流成本、企业进入、土地和债务成本
教育和技能	人力资本与物质资本互补，提高吸收能力	学历扩张但技能错配，回报下降	工资回报、岗位匹配、企业培训、技术采用
研发和产业政策	知识外部性、学习曲线、供应链协调	补贴低效率企业，保护租金	专利质量、TFP、出口质量、退出机制
金融支持	缓解高社会回报项目的融资约束	软预算约束、逆向选择、资本错配	MRPK 分散、违约处理、信贷流向和生产率关系
城市和产业集群	匹配、供应链厚度、知识溢出	房价拥挤、地方保护、空间错配	通勤成本、企业出生率、工资生产率、土地利用效率

这张表的精神和第 14 章一致：政策不是因为“AK 需要投资”而成立，而是因为它让私人回报更接近社会回报，或帮助经济跨过真实非凸性门槛。否则，提高 s 可能只是把更多资源送进低 A 的用途。

17.13 数据例子：投资率与 AK 的启发

AK 模型把长期增长率写成 $sA-(n+\delta)$，所以投资率 s 是自然的数据入口。表 17.4 使用 World Bank WDI 固定资本形成总额占 GDP 比重，展示几个经济体在不同时点的投资率差异。

这张表能解释为什么 AK 模型对东亚和中国增长很有吸引力。中国长期投资率显著高于美国和德国，2010 年前后达到很高水平；韩国、日本在高速增长或产业升级阶段也长期保持较高固定投资率。若这些投资进入高回报基础设施、制造业设备、人力资

表 17.4: 固定资本形成总额占 GDP 比重：AK 模型中的 s 的一个近似

经济体	1980	2000	2010	2024
中国	28.5	32.6	43.5	39.9
美国	23.5	23.1	18.3	21.7
韩国	32.6	31.5	30.5	30.0
日本	34.6	28.5	22.6	26.1
德国	25.9	22.9	19.2	20.5
印度	19.7	26.0	33.2	29.9

注：World Bank WDI 指标 `NE.GDI.FTOT.ZS`，固定资本形成总额占 GDP 比重，数据源更新时间为 2026 年 4 月 8 日。该指标衡量物质固定投资，不包括所有广义资本；因此只能作为 AK 机制的一个入口，而不是完整的广义资本投资率。

本配套和城市化网络，就可能形成广义资本，推动长期增长。

但表 17.4 也说明了 AK 的局限。日本 1980 年投资率很高，后来进入低增长；韩国研发和产业升级很强，但人口和市场结构也在变化；印度 2010 年投资率不低，但增长表现取决于基础设施、教育、制度和产业吸收能力。投资率高并不自动意味着增长率永久更高。关键在 A：投资是否有效？是否进入高生产率部门？是否与人力资本和技术吸收匹配？是否产生知识和网络外部性？是否导致债务风险和低效资本存量？若 A 下降，再高的 s 也可能只带来低回报资本积累。

17.14 中国与发展延伸：高投资之后的问题

用 AK 模型看中国，最自然的问题不是“中国为什么投资率高”，而是“高投资在多大程度上形成了高社会回报的广义资本”。

改革开放早期，基础设施短缺、制造业资本稀缺、农村劳动力向城市和工业部门转移，许多投资有很高社会回报。公路、港口、电力、工业园区、城市住房和基础教育改善，不只是增加当期需求，也提高了未来生产能力。此时，AK 直觉很强：投资积累的是一个更大的生产系统，而不只是单台机器。

随着资本深化推进，问题变得更难。若部分投资进入低回报房地产、重复建设、低利用率基础设施或受保护部门，广义资本效率 A 会下降。此时继续提高投资率，未必提高长期增长，反而可能挤出消费、人力资本、研发和社会保障。

因此，中国增长从 AK 角度看，有四个核心判断。第一，高投资能否持续转化为高 TFP，需要看资本配置效率。第二，广义资本不仅是物质资本，还包括教育、技能、管理、公共服务、数据基础设施和创新体系。第三，未来增长更可能依赖提高 A，而不

是单纯提高 s。第四，基础设施和产业政策是否有效，取决于它们是否跨过真实互补性门槛，而不是是否形成了更多投资额。

17.15 常见误区

1. **把 AK 理解成“机器越多增长越快”。** AK 的关键是广义资本，不是单一物质资本。
2. **以为高储蓄率必然带来高增长。**只有当广义资本回报 A 足够高时，高储蓄才会提高长期增长。
3. **忽视 AK 的强假设。**线性技术意味着资本边际产出不随规模下降，这是非常强的条件。
4. **把外部性当作万能政策理由。**有正外部性时私人投资偏低，但现实投资也可能因补贴和隐性担保而过高。
5. **把内生增长等同于没有技术进步。** AK 不是否定技术进步，而是把技术、学习和资本质量部分内生到资本积累过程。
6. **把非凸性当作所有大项目的理由。**门槛效应只有在互补性真实存在、跨过门槛后 A 明显提高、且失败能退出时才有政策含义。
7. **只提高 s，不检查 A。** AK 增长率取决于 sA，低效率投资可能让 s 上升但 A 下降。

17.16 英文术语表

英文术语	中文含义与说明
AK model	AK 模型，产出与广义资本成比例，资本边际产出不下降。
Broad capital	广义资本，包括物质、人力、公共、知识和组织资本。
Endogenous growth	内生增长，长期增长率由经济内部决策和结构决定。
Diminishing returns	边际报酬递减，资本增加时边际产出下降。
Learning by doing	干中学，通过生产和投资积累经验与知识。

Capital externality	资本外部性，个体投资提高总体生产率但未被私人完全获得。
Private return	私人回报，投资者自己获得的边际收益。
Social return	社会回报，投资对整个经济资源和生产率的边际贡献。
Investment efficiency	投资效率，给定投资率下形成有效资本和产出的能力。
Scale effect	规模效应，经济规模本身可能影响长期增长率的机制。
Knife-edge condition	刀锋条件，只有在特定参数关系下才成立的结论；AK 的 $\psi = 1$ 就是长期增长的刀锋情形。
Nonconvexity	非凸性，投入或规模跨过某个门槛后回报发生跳跃或递增，可能导致多稳态。
Coordination failure	协调失败，多个主体需要同时投资才有高回报，但单个主体独自投资无利可图。
Infrastructure externality	基础设施外部性，公共网络和市场可达性提高私人资本、人力资本和企业进入的回报。

17.17 本章 Review

如果我来 review 你对本章的理解，第一条标准是你是否能说清 AK 和 Solow 的分界。Solow 的资本边际产出递减使长期人均增长最终依赖外生技术；AK 则假设广义资本的社会边际回报不递减，因此可能得到 $g = sA - (n + \delta)$ 这样的内生长期增长率。

第二，我会检查你是否理解 AK 的刀锋条件。若生产函数为 $y = Bk^{\psi}$，$\psi < 1$ 会回到新古典收敛，$\psi = 1$ 才产生 AK，$\psi > 1$ 则可能导致爆炸路径。能否解释这个条件，比记住 AK 公式更重要。

第三，你应该能把“广义资本”具体化。人力资本、基础设施、城市网络、管理能力和制度能力只有在具有外部性、互补性或门槛效应时，才可能支撑类似 AK 的机制；不是所有投资都自动等于内生增长。

第四，我会看你是否能说明私人回报和社会回报为什么可能分离。若资本积累带来学习、网络或公共品外部性，私人主体看到的回报低于社会回报，投资可能偏少；若补贴保护低效率项目，私人回报又可能高于社会回报。

最后，对中国和发展经济体而言，合格理解应能把 AK 用作诊断工具，而不是口号。你需要判断经济是否处在基础设施、人力资本或产业网络门槛附近，政策是否真的

移动了生产函数，以及长期收益是否超过融资和错配成本。

17.18　核心文献

AK 模型的经典文献是 [Rebelo, 1991]。[Arrow, 1962] 提供 learning-by-doing 的早期思想，[Romer, 1986] 将外部性和长期增长联系起来，[Lucas, 1988] 强调人力资本和外部效应。非凸性、多稳态和贫困陷阱的综述可读 [Azariadis, 1996]。教材层面可参考 [Barro and Sala-i Martin, 2004]、[Acemoglu, 2009] 和 [Aghion and Howitt, 2009] 对 AK、资本外部性和内生增长的处理。

第十八章　外部性、人力资本与学习

18.1　本章导读

上一章用 AK 模型打开了内生增长理论的大门：如果可积累因素的社会边际回报不随规模迅速下降，长期增长就不必完全依赖外生技术进步。但 AK 只是一个高度压缩的表达。它把许多机制都放进 A 和广义资本 K 里：学习、教育、知识扩散、产业配套、组织能力、公共基础设施和制度质量。若不继续拆开这些机制，AK 很容易变成一句空话：只要假设资本不递减，就能得到增长。

本章要把这个黑箱打开。我们重点讨论两类机制。第一类是 Arrow 的 learning-by-doing：企业在投资和生产中积累经验，这些经验不仅提高本企业效率，也会通过劳动力流动、供应链模仿、工程标准和行业知识扩散影响其他企业。第二类是 Lucas 的人力资本外部性：个人教育提高自己的工资和生产率，但一个地区、城市或产业的平均技能水平也会提高所有人的生产率。

这两类机制的共同点是：单个家庭或企业看到的私人回报低于社会回报。市场会奖励工人多读书、企业多投资，但未必完全奖励它们给其他人带来的知识外溢。于是内生增长理论开始从“资本能不能持续积累”转向更深的问题：哪些活动会产生社会回报，哪些外部性能够支持长期增长，政策应当怎样区分真正的学习外部性和低效率投资扩张？

18.2　学习目标

学完本章，你应该能够：

1. 解释为什么 learning-by-doing 可以使私人生产函数递减、社会生产函数不递减。
2. 推导资本外部性模型中私人边际产出和社会边际产出的差异。
3. 理解 Lucas 人力资本模型中教育时间、当前产出和长期增长之间的取舍。
4. 区分“个人教育回报”和“平均人力资本外部性”。
5. 用简单模型说明为什么市场均衡可能低估教育、培训、研发和经验积累的社会价值。

6. 结合教育扩张数据判断人力资本模型的启发和局限。

7. 将中国教育扩张、产业学习和区域技能集聚放入内生增长框架中分析。

18.3　核心问题

本章的核心问题是：

> 如果物质资本本身存在边际报酬递减，经济为什么仍可能通过投资、教育和经验积累实现长期增长？更具体地说，什么样的外部性能够把个体层面的递减回报转化为社会层面的持续增长？

这个问题和上一章的 AK 模型直接相连。AK 模型说长期增长需要

$$y = Ak, \tag{18.1}$$

或者至少需要可积累因素的社会回报不下降得太快。本章则问：这样的社会回报从哪里来？一种答案是学习外部性，另一种答案是人力资本外部性。二者都不是说每个个体的回报永远不递减，而是说个体行为会改变整个经济的知识环境。

18.4　从 AK 到外部性：一个桥梁模型

考虑连续的企业集合。企业 i 的人均生产函数为

$$y_i = B\bar{k}^{\eta}k_i^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1, \quad \eta \geq 0, \tag{18.2}$$

其中 k_i 是企业自身资本，$\bar{k}$ 是经济中的平均资本或累计经验，$B > 0$ 是基础生产率。单个企业把 $\bar{k}$ 视为给定，因为它认为自己的投资很难显著改变全社会平均资本。于是企业看到的私人边际产出为

$$MPK_i^{private} = \frac{\partial y_i}{\partial k_i} = \alpha B\bar{k}^{\eta}k_i^{\alpha-1}. \tag{18.3}$$

由于 $\alpha - 1 < 0$，私人资本边际产出递减。

但是在对称均衡中，所有企业选择相同资本，$k_i = \bar{k} = k$。总量生产函数变为

$$y = Bk^{\alpha+\eta}. \tag{18.4}$$

如果 $\alpha + \eta = 1$，总量层面就是 AK：

$$y = Bk. \tag{18.5}$$

如果 $\alpha + \eta < 1$，外部性不足以完全抵消递减回报；如果 $\alpha + \eta > 1$，模型会出现规模回报过强的问题，通常需要加入拥挤、资源约束或政策扭曲来避免爆炸式路径。

命题 18.1 (私人递减与社会不递减可以同时成立). *在生产函数 (18.2) 下，单个企业面对递减私人资本回报；但在对称均衡中，如果 $\alpha+\eta=1$，总量生产函数对资本呈线性，从而可以支持 AK 型长期增长。*

证明. 给定 $\bar{k}$，企业 i 的私人边际产出由 (18.3) 给出。因为 $0<\alpha<1$，当 k_i 上升时，$k_i^{\alpha-1}$ 下降，因此私人资本回报递减。

在对称均衡中，$k_i=\bar{k}=k$。代入 (18.2)，得到总量人均产出

$$y = Bk^{\eta}k^{\alpha} = Bk^{\alpha+\eta}.$$

若 $\alpha+\eta=1$，则 $y=Bk$，总量边际产出为常数 B。因此，个体层面的递减回报与社会层面的线性技术可以同时成立。 □

这就是 learning-by-doing 模型最重要的直觉：每个企业只觉得自己多买一台机器的回报会下降，但所有企业在生产、调试、维修、组织和供应链协作中积累的经验，会抬高整个行业的生产率。社会不是在重复堆机器，而是在把生产经验变成可扩散的知识。

18.5 Arrow 的 learning-by-doing

Arrow (1962) 的核心思想是：知识增长可以是生产活动的副产品。企业不是先在实验室里完整发明一种技术，然后才进入生产；很多技术改进来自生产过程本身。工人知道怎样减少废品，工程师知道怎样调整设备，管理者知道怎样安排流程，供应商知道怎样配合质量标准。这些经验往往不能完全由单个企业私有化。

可以把累计经验写成累计投资或累计产出：

$$E(t) = \int_0^t I(s)\,ds, \tag{18.6}$$

并令生产率依赖经验：

$$A(t) = A_0 E(t)^{\eta}, \qquad \eta > 0. \tag{18.7}$$

如果投资越多，经验积累越多，经验又提高未来生产率，那么投资就不仅增加资本存量，还提高社会知识水平。

为了和上一节连接，令经验由平均资本近似表示，得到

$$y_i = BE^{\eta}k_i^{\alpha}, \qquad E=\bar{k}. \tag{18.8}$$

这不是说资本本身神奇地不递减，而是说资本积累伴随学习积累。若一个经济只是重复建设低效率项目，没有形成可扩散经验，η 就很小；若投资带来工程能力、工艺改进、供应链升级和人才训练，η 就可能显著为正。

18.5.1　一个数值例子

设 $\alpha = 0.35$。如果没有学习外部性，社会生产函数为 $y = Bk^{0.35}$，资本边际回报下降很快。若学习外部性 $\eta = 0.65$，则 $\alpha + \eta = 1$，总量生产函数变为 AK。表 18.1 展示不同 η 下总量资本弹性的含义。

表 18.1: 学习外部性与总量资本弹性

私人资本弹性 α	学习外部性 η	总量弹性 $\alpha+\eta$	增长含义
0.35	0.00	0.35	标准递减回报，不能单靠资本维持增长
0.35	0.30	0.65	递减回报变弱，转型动态更长
0.35	0.65	1.00	AK 型边界，可能持续内生增长
0.35	0.80	1.15	社会回报过强，需要额外约束稳定模型

这个表有一个重要提醒：内生增长不是“外部性越大越好”的口号。若模型估计出很强的外部性，必须解释为什么经济没有无限爆炸式增长。真实世界中，拥挤、土地、组织复杂性、财政约束、金融风险和资源错配都会限制学习外部性的增长效应。

18.6　私人回报、社会回报与政策楔子

外部性模型最直接的含义，是私人回报和社会回报不一致。在对称均衡下，总量生产函数为

$$y = Bk^{\alpha+\eta}.$$

记社会边际产出为 $M_K^S = (\alpha+\eta)Bk^{\alpha+\eta-1}$，私人边际产出为 $M_K^P = \alpha Bk^{\alpha+\eta-1}$。二者的比率为 $(\alpha+\eta)/\alpha$，也就是 $1+\eta/\alpha$。只要 $\eta > 0$，社会回报就高于私人回报。

若政府想用投资补贴 τ 让企业内部化外部性，一个简单的一阶条件是让企业感受到的补贴后回报等于社会回报：

$$(1+\tau)M_K^P = M_K^S. \tag{18.9}$$

代入上述回报比率，得到

$$\tau^* = \frac{\eta}{\alpha}. \tag{18.10}$$

这个公式非常简洁，也非常危险。它说明如果学习外部性很大，理论上需要补贴投资、教育或培训；但它也说明政策判断的关键是外部性参数 η，而不是投资项目的名义

规模。没有正外部性的投资补贴只是把资源从一个地方搬到另一个地方，甚至会强化低效率项目。

18.7 Lucas 人力资本模型

Arrow 把学习放在生产和投资经验中，Lucas (1988) 则把人力资本放在增长理论中心。最简单的 Lucas 模型可以这样写。代表性家庭拥有物质资本 k 和人力资本 h。每期将比例 u 的时间用于生产，将比例 $1-u$ 的时间用于学习或教育。生产函数为

$$\begin{aligned} y_i &= k_i^{\alpha} q_i^{1-\alpha} \bar{h}^{\gamma}, \\ q_i &\equiv u_i h_i, \\ 0 &< \alpha < 1, \qquad \gamma \geq 0. \end{aligned} \tag{18.11}$$

其中 q_i 是个人投入生产的有效人力资本，$\bar{h}$ 是经济平均人力资本。个人把 $\bar{h}$ 当作给定，但社会层面平均技能会影响所有人的生产率。

人力资本积累方程为

$$\dot{h}_i = \varphi(1-u_i)h_i, \qquad \varphi > 0. \tag{18.12}$$

因此

$$g_h \equiv \frac{\dot{h}}{h} = \varphi(1-u). \tag{18.13}$$

教育时间越多，即 u 越低，人力资本增长越快；但当期用于生产的有效劳动 uh 越少，当前产出越低。这就是教育投资的核心取舍。

在对称均衡中，$h_i = \bar{h} = h$，生产函数变为

$$y = k^{\alpha} u^{1-\alpha} h^{1-\alpha+\gamma}. \tag{18.14}$$

如果平衡增长路径上 k/h 保持常数，且 u 不变，那么 k 和 h 以同一速度增长，产出增长率为

$$g_y = (1+\gamma)g_h = (1+\gamma)\varphi(1-u). \tag{18.15}$$

当 $\gamma = 0$ 时，产出随人力资本增长；当 $\gamma > 0$ 时，平均人力资本外部性进一步放大增长。

18.7.1 教育时间的数值例子

设人力资本学习效率 $\varphi = 0.08$，平均人力资本外部性 $\gamma = 0.20$。表 18.2 展示不同时间分配下的人力资本增长率和长期产出增长率。

这张表不能被理解为“学生越不上班越好”或“教育时间越多越好”。因为 (18.14) 中当前产出含有 $u^{1-\alpha}$，学习时间增加会降低当期产出。真正的最优选择要比较当前产

表 18.2: Lucas 模型中的教育时间与长期增长

生产时间比例 u	学习时间比例 $1-u$	$g_h=\varphi(1-u)$	$g_y=(1+\gamma)g_h$
0.90	0.10	0.8%	1.0%
0.80	0.20	1.6%	1.9%
0.70	0.30	2.4%	2.9%

出损失和未来人力资本增长收益。低收入经济体尤其会面对这个张力：更长教育年限提高未来能力，但也减少短期劳动供给；家庭若受借贷约束，可能即使教育社会回报很高，也无法承担当前机会成本。

18.7.2　时间选择的一阶条件

为了把这个取舍写成真正的动态最优化，考虑代表性家庭选择消费、生产时间以及两类状态变量。给定平均人力资本外部性 $\bar{h}$，私人家庭的状态方程可以写成

$$\dot{k}=k^{\alpha}(uh)^{1-\alpha}\bar{h}^{\gamma}-c-(n+\delta)k, \tag{18.16}$$

$$\dot{h}=\varphi(1-u)h. \tag{18.17}$$

令 λ 是物质资本的影子价值，μ 是人力资本的影子价值。当前值 Hamiltonian 为

$$\mathcal{H}=u(c)+\lambda\left[k^{\alpha}(uh)^{1-\alpha}\bar{h}^{\gamma}-c-(n+\delta)k\right]+\mu\varphi(1-u)h. \tag{18.18}$$

消费的一阶条件仍然是

$$u'(c)=\lambda. \tag{18.19}$$

时间分配的一阶条件为

$$\lambda(1-\alpha)\frac{y}{u}=\mu\varphi h. \tag{18.20}$$

命题 18.2 (Lucas 模型中的教育时间选择). *在内部解下，家庭选择生产时间 u 时，会使增加一单位生产时间带来的当期产出价值，等于由减少学习时间造成的人力资本积累损失的影子价值。其一阶条件由 (18.20) 给出。*

证明. 生产时间 u 提高时，当期产出边际增加为

$$\frac{\partial y}{\partial u}=(1-\alpha)\frac{y}{u}.$$

这部分产出的当前价值为 $\lambda(1-\alpha)y/u$。与此同时，u 提高会减少学习时间 $1-u$，使人力资本积累 $\dot{h}=\varphi(1-u)h$ 下降，边际损失为 φh，其影子价值为 $\mu\varphi h$。内部最优要求二者相等，因此得到 (18.20)。 □

这个条件比表 18.2 更深一层。表里我们人为改变 u，看增长率如何变化；一阶条件则告诉我们，最优 u 不是随意给定的，而是由当前产出价值、学习效率 φ、人力资本影子价值 μ 和生产函数弹性共同决定。若家庭很贫困、当前消费的边际效用很高，则 λ 较高，家庭倾向于把更多时间放在生产上；若教育质量高、学习效率 φ 高，或者未来人力资本价值 μ 高，则更长学习时间更有吸引力。

社会计划者的一阶条件还要再加一层。私人家庭把 $\bar{h}$ 当作给定，因此只看到人力资本对自身有效劳动 $(uh)^{1-\alpha}$ 的贡献；计划者会把平均人力资本对所有人的外部性也算进去。在对称均衡中，私人对 h 的产出弹性是 $1-\alpha$，社会对 h 的产出弹性是 $1-\alpha+\gamma$。因此当 $\gamma>0$ 时，计划者眼中的 μ 更高，社会最优通常会选择更多学习时间、更高公共教育投入或更强的教育金融支持。

18.8 人力资本外部性：为什么市场可能投资不足

现在比较个人回报和社会回报。由 (18.11) 可知，个人选择 h_i 时把 $\bar{h}$ 当作给定。私人意义下，人力资本进入个人有效劳动项 $(u_ih_i)^{1-\alpha}$，其弹性为 $1-\alpha$。但在对称总量生产函数 (18.14) 中，人力资本总弹性为 $1-\alpha+\gamma$。

命题 18.3 (人力资本外部性导致私人回报低于社会回报). *在 Lucas 型生产函数 (18.11) 中，若 $\gamma>0$，个人教育或培训的私人边际回报没有包含平均人力资本 $\bar{h}$ 对其他人的正外部性。因此，在没有补贴、公共教育供给、借贷支持或其他内生化机制时，竞争均衡中的教育投资可能低于社会最优。*

证明. 给定 $\bar{h}$，个人人力资本对自身产出的弹性为

$$\frac{\partial \log y_i}{\partial \log h_i}=1-\alpha.$$

在对称均衡中，$h_i=\bar{h}=h$，总量生产函数为

$$y=k^{\alpha}u^{1-\alpha}h^{1-\alpha+\gamma}.$$

社会计划者考虑一个人的人力资本增加对平均人力资本环境的影响，因此总量人力资本弹性为

$$\frac{\partial \log y}{\partial \log h}=1-\alpha+\gamma.$$

当 $\gamma>0$ 时，社会弹性严格大于私人弹性。若个人决策只基于私人回报，且教育成本、机会成本和借贷约束存在，私人选择一般不会完全反映社会收益。 □

这个命题解释了为什么教育、基础研究、职业培训和城市技能集聚在增长理论中具有特殊地位。它们不仅提高个人收入，还可能提高周围人的生产率。一个高技能城市不只是把高技能者放在一起，而是形成更密集的信息流、更快的匹配、更高的服务质量、更强的创新网络和更好的企业组织能力。

18.9　数据例子：高等教育扩张

人力资本模型至少需要一个事实背景：许多经济体在工业化和服务业升级过程中经历了大规模教育扩张。表 18.3 使用 World Bank WDI 的高等教育毛入学率指标 `SE.TER.ENRR`。毛入学率可以超过 100%，因为它以官方高等教育年龄组人口为分母，而实际在校学生可能包括更大或更小年龄的人。

表 18.3: 高等教育毛入学率：教育扩张的一个切面（%）

经济体	2000	2010	2020	2023	2024
中国	7.6	25.3	61.6	74.6	76.9
印度	9.9	18.7	29.8	34.2	34.4
韩国	74.7	101.7	96.9	106.7	111.9
美国	–	–	87.6	–	–

注：数据为 World Bank WDI 指标 `SE.TER.ENRR`。美国部分年份在该接口下缺失；毛入学率可超过 100%。

这张表可以帮助我们把 Lucas 模型从抽象公式拉回现实。中国高等教育毛入学率从 2000 年的约 7.6% 上升到 2024 年的约 76.9%，这意味着人力资本积累的规模发生了巨大变化。印度也在扩张，但速度和水平不同。韩国长期处在非常高的高等教育普及水平，说明东亚增长经验中教育扩张和产业升级往往高度相关。

但这张表也提醒我们，不要把“入学率”直接等同于“有效人力资本”。Lucas 模型中的 h 是生产能力，而不是文凭数量。教育质量、专业结构、技能匹配、科研训练、职业教育、学校到工作转换、地区流动和企业吸收能力都会影响教育扩张是否转化为生产率增长。若大学扩招快于高质量岗位创造，个人教育回报可能下降；若产业升级能够吸收更高技能劳动力，教育扩张就可能形成更强的增长效应。

18.10　中国与发展延伸

中国经验很适合放入本章框架，但不能只用一句“人力资本提高增长”概括。至少有三条机制需要区分。

第一，教育扩张提高了劳动力平均技能。高等教育扩张、职业教育、工程师供给和管理人才培养，使企业更容易采用复杂设备、执行质量控制、进入更高技术含量的产业链环节。在 Lucas 模型中，这对应 h 的增长。

第二，平均技能水平可能产生地区外部性。一个城市或产业集群里受教育劳动力越多，企业匹配高级岗位越容易，知识交流越频繁，新企业进入成本越低。这对应 $\bar{h}^{\gamma}$。

因此，教育的增长效应不只取决于全国平均教育年限，也取决于人力资本在城市群、产业链和研发网络中的空间配置。

第三，生产过程中的学习影响产业升级。出口制造、基础设施建设、数字平台、供应链管理和新能源产业扩张都包含 learning-by-doing。早期企业可能通过大规模生产学会成本控制，随后把经验扩散给供应商和同行。若这种经验是可扩散的，投资就具有正外部性；若经验被封闭在低效率企业内部，或者投资主要进入重复产能，社会回报就会很低。

这也解释了为什么本章不支持简单的政策结论。教育补贴、产业政策、研发支持和基础设施投资都可能有理论依据，但它们的正当性来自可验证的外部性，而不是来自“增长需要投资”这句话。好的增长政策应当问：这项活动是否创造可扩散知识？是否缓解私人回报低于社会回报的问题？是否帮助企业吸收更复杂技术？是否会被地方竞争、金融软约束或文凭膨胀扭曲？

18.11 常见误区

1. **把外部性当作万能解释。**外部性可以解释社会回报高于私人回报，但必须说明外部性通过什么渠道发生，并解释为什么它没有被市场价格、工资、专利或合同完全内部化。

2. **把教育年限等同于人力资本。**教育年限和入学率是可观测指标，但 h 更接近有效技能。质量、匹配和吸收能力同样重要。

3. **忽略教育的机会成本。**Lucas 模型中，更多学习时间提高未来 h，但降低当期生产时间 u。贫困家庭和低收入国家尤其可能受当前收入约束。

4. **把学习外部性误读为所有投资都该补贴。**只有当投资确实创造不能完全私有化的知识、经验或网络效应时，补贴才有理论依据。

5. **忽略拥挤和错配。**高技能集聚可以提高生产率，也可能带来住房成本、教育竞争、地区不平等和岗位错配。

18.12 英文术语表

英文术语	含义
learning-by-doing	通过生产、投资和实践积累知识与经验。
human capital	个体通过教育、培训、健康和经验形成的生产能力。

spillover	一个主体的行为对其他主体产生、但未完全通过价格补偿的影响。
externality	外部性；私人收益或成本与社会收益或成本不一致。
private return	私人回报；个体或企业能够获得的回报。
social return	社会回报；包括外部性后的总回报。
time allocation	时间分配；Lucas 模型中生产时间和学习时间之间的选择。
gross tertiary enrollment ratio	高等教育毛入学率。

18.13　本章 Review

如果我来 review 你对本章的理解，第一条标准是你是否能把 learning-by-doing 和人力资本外部性分清。前者强调生产经验和累计活动提高未来效率，后者强调一个人的教育和技能会提高他人生产率；二者都可能让个体层面的递减回报在总量层面变弱。

第二，我会检查你是否能写出私人回报和社会回报的差异。企业自己的资本边际产出可以递减，但平均资本或经验进入所有企业生产函数时，社会边际产出包含外部收益。若你不能指出 wedge 出现在什么边际条件里，就很难做政策判断。

第三，你应该能解释 Lucas 时间分配。个体在生产时间和学习时间之间选择，学习会牺牲当前产出但提高未来人力资本；若平均人力资本提高所有人的生产率，私人教育回报低于社会教育回报，均衡学习时间可能偏低。

最后，我会看你是否能避免“教育越多越好”的粗糙结论。增长政策要问教育质量、岗位匹配、产业需求、城市集聚和外部性大小；只有当私人选择和社会收益系统性分离时，补贴或公共投入才有明确增长理由。

18.14　核心文献

- Arrow, K. J. (1962). The Economic Implications of Learning by Doing. [Arrow, 1962]
- Lucas, R. E. (1988). On the Mechanics of Economic Development. [Lucas, 1988]
- Becker, G. S. (1964). Human Capital. [Becker, 1964]
- Nelson, R. R. and Phelps, E. S. (1966). Investment in Humans, Technological Diffusion, and Economic Growth. [Nelson and Phelps, 1966]

- Benhabib, J. and Spiegel, M. M. (1994). The Role of Human Capital in Economic Development. [Benhabib and Spiegel, 1994]

第十九章　Romer 模型：品种扩张与知识生产

19.1　本章导读

前两章已经把内生增长的入口打开。第 17 章用 AK 模型说明，只要可积累因素的社会回报不快速递减，长期增长就可以来自经济内部；第 18 章进一步说明，学习和人力资本外部性可以让私人递减回报与社会层面的持续增长同时成立。但这些模型仍然有一个共同的压缩：它们把“知识”放在生产函数外面，或者把知识外部性写成一个参数。

Romer (1990) 的贡献，是把知识生产本身变成一个有市场结构、有利润激励、有资源配置的部门。企业为什么愿意研发？因为新知识可以被做成专利或设计图，带来垄断利润。知识为什么又能支持长期增长？因为知识具有非竞争性：一个设计、一套算法、一种工艺流程、一条化学配方，被一个企业使用时，并不必然阻止其他地方继续使用同一知识。知识可以被复制、传递、改造和嵌入产品。于是，知识和普通物品不同：普通机器用在这里，就不能同时用在那里；一个设计图被理解后，却可以在很多工厂、很多产品线、很多国家中反复使用。

本章的核心模型是“品种扩张”模型。最终品部门使用劳动和许多中间品生产。每一种中间品对应一种设计图。研发部门生产新的设计图，设计图越多，中间品种类越丰富，最终产出越高。这个框架把三个重要思想连在一起：第一，知识是非竞争性的，所以总量技术可以有递增回报；第二，知识又有部分排他性，所以专利和垄断利润可以激励私人研发；第三，研发人员和生产人员之间存在资源配置取舍，所以创新不是免费的。

这一章比 AK 模型更接近研究生增长课的核心。它不仅问“增长能不能内生”，还问“什么市场结构让创新成为私人可做的事情”。这也是为什么 Romer 模型会自然引向后面的规模效应争论、半内生增长、创造性破坏、知识产权政策和中国研发效率问题。

19.2 学习目标

学完本章，你应该能够：

1. 解释知识的非竞争性和部分排他性为什么会改变增长理论。
2. 写出 Dixit-Stiglitz 型品种聚合生产函数，并说明品种数 A 为什么提高总产出。
3. 推导中间品垄断厂商的需求、定价、加成率和利润。
4. 理解研发部门的知识生产函数 $\dot{A} = \chi L_A A$ 及其规模效应。
5. 写出研发无套利条件，并解释工资、专利价值、利润和利率之间的关系。
6. 区分“知识存量效应”和“研发资源配置效应”。
7. 用研发强度和研究人员数据理解 Romer 模型的经验启发与局限。
8. 将中国研发投入、产业升级、专利激励和创新效率放入内生增长框架中分析。

19.3 核心问题

本章的核心问题是：

> 如果知识可以被反复使用，为什么市场经济不会自动产生社会最优的知识积累？如果研发依赖垄断利润激励，为什么完全竞争模型不足以解释创新增长？

这个问题有两层。第一层是技术层面的：知识和普通资本不同。机器、厂房、土地和劳动通常具有竞争性；一个人使用某台机器，就排除了另一个人同时使用同一台机器。知识则不同。一项设计、一段代码、一种组织流程，可以在被复制之后同时服务于很多生产者。用经济学语言说，知识具有非竞争性。

第二层是制度层面的：如果知识完全不能排他，私人研发者就很难收回成本；如果知识完全排他，知识扩散又会被过度限制。Romer 模型站在这两者之间：知识在生产上非竞争，但通过专利、商业秘密、先发优势或互补资产获得部分排他性。正是这种“非竞争性加部分排他性”的组合，使得知识既能产生递增回报，又能被私人企业投资生产。

19.4 知识为什么不是普通资本

先区分两个概念：竞争性和排他性。

定义 19.1 (竞争性与排他性). 如果一个人使用某种物品会减少其他人同时使用该物品的可能性，这种物品具有竞争性。如果所有者可以阻止未付费者使用某种物品，这种物品具有排他性。

普通面包既竞争又排他。吃掉一块面包，别人就不能吃同一块；商店也可以不卖给未付款的人。公共路灯大致非竞争但不易排他。知识更复杂：一个公式、软件架构或药物分子结构在技术上非竞争，但可以通过专利、版权、商业秘密、数据壁垒或生产诀窍形成一定排他性。

这一区分对增长理论非常关键。若所有生产要素都是竞争性的，并且生产函数规模报酬不变，那么竞争均衡中所有要素都按边际产品支付报酬，产出刚好被分完。长期增长若来自某个外生 $A(t)$，模型可以保持完全竞争；但若 $A(t)$ 是由企业研发出来的，完全竞争就会遇到困难：研发成本需要被补偿，而知识的社会边际价值通常高于私人可获得收益。

Romer 模型的突破，是承认技术生产需要一种不同于完全竞争的市场结构。中间品企业拥有某种设计图的排他使用权，因此可以对中间品定价高于边际成本，获得利润。研发部门正是因为预期到这种利润，才愿意投入资源生产新设计。

19.5 最终品部门：品种为什么提高产出

考虑一个连续时间经济。最终品部门完全竞争，使用劳动 L_Y 和一组中间品 $x(j)$ 生产最终品。已存在的中间品种类位于区间 $j \in [0, A]$，其中 A 也是知识或设计图存量。最终品生产函数为

$$Y = L_Y^{1-\alpha} \int_0^A x(j)^\alpha \, dj, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{19.1}$$

这个式子看起来只是把很多中间品加总起来，但它包含一个深刻含义：品种数 A 本身是生产力来源。若所有中间品使用量相同，$x(j) = x$，则

$$Y = L_Y^{1-\alpha} A x^\alpha. \tag{19.2}$$

在给定每种中间品投入 x 和生产劳动 L_Y 时，品种数 A 翻倍，产出也翻倍。直觉是，更多品种意味着更细的分工、更专业的工具、更适配的零部件和更多可组合的生产方法。

这和“同一种机器多买一台”不一样。同一种机器越堆越多，可能很快遇到递减回报；新的中间品种类则可以打开新的生产用途。对于制造业，品种可以是新的机床、传感器、材料、控制系统、工业软件模块；对于服务业，品种可以是新的算法、支付系统、物流方案、数据库接口；对于医药，品种可以是新的分子、检测方法和治疗组合。

19.5.1 一个品种扩张的数值例子

设 $L_Y = 100$，每一种中间品投入 $x = 10$，最终品中间品弹性 $\alpha = 0.5$。根据 (19.2)，

$$Y = 100^{0.5} A 10^{0.5}.$$

表 19.1 展示品种扩张的机械含义。

表 19.1: 品种扩张如何提高产出：一个简单数值例子

品种数 A	生产劳动 L_Y	每种投入 x	最终产出 Y
50	100	10	1,581
100	100	10	3,162
200	100	10	6,325

这个例子不是说现实中只要品种翻倍，GDP 就机械翻倍。它的作用是帮助我们看清 Romer 模型的基本机制：新知识不是简单提高某个外生 A，而是创造新的可用投入类别。知识越多，经济可以使用的生产组合越丰富。

19.6 中间品企业：为什么需要垄断竞争

每一种中间品 j 由拥有相应设计图的企业生产。为了突出机制，假设生产一单位中间品需要一单位最终品作为成本，边际成本为 1。最终品企业在完全竞争下选择每种中间品投入，使边际产出等于价格。由 (19.1) 可得，对中间品 j 的需求满足

$$p(j) = \alpha L_Y^{1-\alpha} x(j)^{\alpha-1}. \tag{19.3}$$

由于 $\alpha - 1 < 0$，需求曲线向下倾斜。拥有设计图的中间品企业面对这条需求曲线选择 $x(j)$，最大化利润

$$\pi(j) = p(j)x(j) - x(j). \tag{19.4}$$

命题 19.1 (中间品垄断定价). *在需求函数 (19.3) 和单位边际成本下，中间品企业的最优价格为*

$$p^*(j) = \frac{1}{\alpha}, \tag{19.5}$$

即价格对边际成本的加成率为 $1/\alpha$。

证明. 把需求反函数写为

$$p(x) = \alpha L_Y^{1-\alpha} x^{\alpha-1}.$$

企业利润为 $\pi(x) = p(x)x - x$。一阶条件为

$$\frac{d[p(x)x]}{dx} - 1 = 0.$$

因为

$$\frac{d[p(x)x]}{dx} = p(x) + xp'(x),$$

且 $p'(x) = (\alpha - 1)p(x)/x$，所以边际收益为

$$p(x) + xp'(x) = p(x) + (\alpha - 1)p(x) = \alpha p(x).$$

一阶条件变为 $\alpha p(x) = 1$，因此 $p^* = 1/\alpha$。由于 $0 < \alpha < 1$，价格高于边际成本。 □

这个命题是 Romer 模型的关键。研发需要固定成本，完全竞争下价格等于边际成本，企业没有办法回收研发成本。垄断竞争让中间品企业获得利润，利润又让设计图有价值，设计图有价值才会激励研发。

但这也立刻带来一个政策张力。垄断价格提高了创新激励，却使中间品使用量低于静态效率水平。若只看当期生产，垄断加成是扭曲；若看动态创新，某种垄断利润又是研发激励来源。增长理论中的知识产权政策，就是在这个张力中寻找平衡。

19.7 知识生产部门

现在引入研发部门。研发部门使用研究人员或人力资本 L_A 生产新设计图。最简单的知识生产函数为

$$\dot{A} = \chi L_A A, \qquad \chi > 0. \tag{19.6}$$

其中 χ 表示研发效率，A 表示已有知识存量。

这个式子有两个含义。第一，研究人员越多，新知识增长越快。第二，已有知识越多，研发越有效，因为研究者可以站在既有知识基础上组合、改造和延伸。现代创新很少从零开始：芯片设计依赖过去的材料、架构和制造知识；新能源技术依赖化学、电力系统和控制工程；人工智能依赖算法、算力、数据和软件生态。已有知识越多，新的研究路径越多。

两边除以 A，得到知识增长率

$$g_A \equiv \frac{\dot{A}}{A} = \chi L_A. \tag{19.7}$$

这就是第一代研发型内生增长模型的强结论：长期技术增长率由投入研发的人力规模决定。若总劳动 L 固定，且研发劳动份额为 s_A，则 $L_A = s_A L$，于是

$$g_A = \chi s_A L. \tag{19.8}$$

更大的经济、更高的研发份额、更高的研发效率，都会带来更高的长期增长率。

说明 19.1 (规模效应的直觉与危险). 式 (19.8) 是 *Romer* 模型最强也最容易被质疑的地方。它说研究人员规模越大，长期增长率越高。直觉上，这抓住了知识生产的团队和市场规模效应；但经验上，*20* 世纪以来全球研发人员大幅增加，前沿国家 *TFP* 增长率并没有持续加速。这一张力会成为第 *20* 章 *Jones* 批判和半内生增长模型的主题。

19.8 研发无套利条件

设计图为什么有价值？因为拥有设计图的企业可以在中间品市场获得垄断利润。令 $V(t)$ 表示一张新设计图的市场价值，$\pi(t)$ 表示该设计图带来的当期利润。资产定价关系可以写为

$$r(t)V(t) = \pi(t) + \dot{V}(t), \tag{19.9}$$

或者等价地说，持有设计图的回报由当期利润和资本利得组成。

在平衡增长路径上，若利润增长率为 g_π，利率为常数 r，则

$$V = \frac{\pi}{r - g_\pi}, \qquad r > g_\pi. \tag{19.10}$$

这和股票估值公式很像：未来利润越高，设计图越值钱；利率越高，未来利润折现越厉害，设计图越不值钱。

研发部门雇用一单位研究人员，可以生产 χA 张新设计图。因此一单位研究人员的边际收益为 χAV。若研究人员工资为 w_A，自由进入研发部门给出无套利条件

$$w_A = \chi AV. \tag{19.11}$$

若左边大于右边，研发不赚钱，研究人员会流向生产部门；若右边大于左边，研发利润为正，更多资源会进入研发，直到工资和研发收益相等。

这个条件把本章所有机制连在一起：

$$\text{研发投入} \longrightarrow \text{新设计图} \longrightarrow \text{中间品垄断利润} \longrightarrow \text{设计图价值} \longrightarrow \text{研发激励}. \tag{19.12}$$

它也说明，创新政策不能只盯着“研发投入”。研发投入能否转化为增长，取决于 χ、市场规模、利润可得性、知识产权、融资条件、人才配置和生产部门能否吸收新设计。若 χ 很低，增加研发经费可能只产生低质量专利；若专利保护过强，知识扩散可能被阻碍；若产品市场缺乏竞争，企业可能用垄断地位保护旧技术而不是创造新技术。

19.9 完整均衡闭合：工资、利率与研发劳动份额

到这里，模型已经有了四块积木：最终品生产、中间品垄断定价、专利价值和知识生产。研究生增长课通常还会追问：这些条件如何闭合成一个一般均衡？关键是劳动在生产部门和研发部门之间可以流动，因此两个部门的工资必须相等。

最终品企业竞争性地雇用生产劳动 L_Y。由 (19.1) 可得生产劳动工资

$$w_Y = \frac{\partial Y}{\partial L_Y} = (1-\alpha)\frac{Y}{L_Y}. \tag{19.13}$$

在对称中间品投入下，$Y = L_Y^{1-\alpha} A x^\alpha$，所以

$$w_Y = (1-\alpha)A\left(\frac{x}{L_Y}\right)^\alpha. \tag{19.14}$$

再由垄断定价 $p = 1/\alpha$ 和需求函数 (19.3)，可以解出

$$x = \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} L_Y. \tag{19.15}$$

因此当研发劳动份额固定时，x/L_Y 固定，生产部门工资与知识存量 A 成比例增长。

研发部门的工资由无套利条件给出：

$$w_A = \chi A V. \tag{19.16}$$

如果劳动可以在两个部门之间自由流动，内部均衡要求

$$w_Y = w_A. \tag{19.17}$$

这条式子决定了研发劳动份额的方向：若 $\chi A V > w_Y$，研究人员流向研发，L_A 上升、L_Y 下降；若 $\chi A V < w_Y$，研究人员流向生产，L_A 下降。内部均衡处，两种用途的边际回报相等。

家庭方面，如果代表性家庭具有 CRRA 偏好，消费 Euler 方程仍然是

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - \rho), \tag{19.18}$$

其中 r 是金融资产回报率。资产定价式 (19.9) 又要求

$$r = \frac{\pi}{V} + \frac{\dot{V}}{V}. \tag{19.19}$$

于是，Romer 模型的一般均衡不是单独由“研发人员越多越好”决定的，而是由三组条件一起决定：家庭用 Euler 方程决定储蓄和利率，垄断企业用利润决定专利价值，劳动套利条件决定研发部门和生产部门之间的资源配置。

命题 19.2 (Romer 模型的平衡增长闭合). *在劳动总量固定、研发份额固定、对称中间品投入和内部劳动配置下，Romer 模型的平衡增长路径满足*

$$g_A = \chi L_A, \qquad g_Y = g_c = g_A, \qquad r = \rho + \theta g_A,$$

同时劳动套利条件 $w_Y = \chi A V$ 钉住研发劳动份额。

证明. 由知识生产函数 (19.6)，若 L_A 固定，则 $g_A = \chi L_A$。由 (19.2) 和 (19.15)，当 L_Y 和 x/L_Y 固定时，Y 与 A 成比例，因此 $g_Y = g_A$。平衡增长路径上消费与产出以相同速度增长，故 $g_c = g_Y$。把 $g_c = g_A$ 代入家庭 Euler 方程 (19.18)，得到 $r = \rho + \theta g_A$。最后，劳动在生产和研发之间自由流动，内部解要求 $w_Y = w_A = \chi A V$，该条件决定资源如何在 L_Y 与 L_A 之间分配。 □

这个闭合结果也说明 Romer 模型的深层政策含义。提高研发效率 χ 会提高研发部门边际回报，吸引更多劳动进入研发；扩大市场规模和利润机会会提高 V，也会增强研发激励；但更高利率 r 会降低专利价值，从而削弱研发激励。创新政策、金融条件、产品市场竞争和教育供给并不是彼此独立的，它们都通过 w_Y、V、r 和 χ 影响研发劳动份额。

19.10 平衡增长与资源配置

为了看清长期增长，假设劳动总量固定为

$$L = L_Y + L_A. \tag{19.20}$$

最终品部门使用 L_Y 生产当期产出，研发部门使用 L_A 生产新设计图。更多 L_A 提高未来 A 的增长率，但减少当前生产劳动；更多 L_Y 提高当前产出，但降低未来知识增长。这和 Lucas 模型中生产时间 u 与学习时间 $1-u$ 的取舍非常相似。

由 (19.2) 可知，在对称中间品投入下，产出与知识存量 A 正相关。若 L_Y 和每种中间品投入沿平衡路径保持稳定比例，则产出增长率与知识增长率相连：

$$g_Y \approx g_A. \tag{19.21}$$

这里用 $\approx$ 是为了保留教材直觉：在完整模型中，g_Y 与 g_A 的精确关系取决于中间品生产、资本品积累和变量归一化方式；在本章这个简化品种扩张框架中，当劳动配置和对称中间品投入比例稳定时，二者可以写成同一增长率。因此，长期增长来自知识品种扩张，而不是来自同一种资本品无限堆积。

表 19.2 用一个简单校准展示研发劳动配置的含义。设总劳动 $L = 100$，研发效率 $\chi = 0.001$，则不同研发劳动份额对应不同知识增长率。

表 19.2: 研发劳动配置与知识增长率：一个简单校准

研发劳动份额 s_A	研发劳动 L_A	生产劳动 L_Y	$g_A = \chi L_A$
5%	5	95	0.5%
10%	10	90	1.0%
20%	20	80	2.0%
30%	30	70	3.0%

这张表的重点不是参数本身，而是资源配置逻辑。长期增长需要研发，但研发占用真实资源。一个发展中经济体若基础教育不足、工程能力不足、制造体系薄弱，过早把大量高技能劳动放进形式化研发，未必最有效；一个接近技术前沿的经济体若研发投入不足，又可能无法维持创新驱动增长。Romer 模型给出的不是“研发越多越好”的口号，而是一个比较当前生产和未来知识积累的框架。

19.11 非竞争性、递增回报与市场结构

Romer 模型的深层含义，可以用一个命题概括。

命题 19.3 (非竞争性知识带来总量递增回报). *在最终品生产函数 (19.1) 中，给定设计图集合 A 时，最终品部门对竞争性投入 L_Y 和 $\{x(j)\}_{j\in[0,A]}$ 可以呈现规模报酬不变；但如果把非竞争性知识存量 A 也作为生产要素计入，经济在总量上可以呈现递增回报。*

证明. 给定 A，将竞争性投入 L_Y 和所有中间品 $x(j)$ 同时乘以 $\lambda>0$，产出变为

$$(\lambda L_Y)^{1-\alpha}\int_0^A(\lambda x(j))^\alpha\,dj=\lambda^{1-\alpha}\lambda^\alpha L_Y^{1-\alpha}\int_0^A x(j)^\alpha\,dj=\lambda Y.$$

因此，在给定知识品种集合时，竞争性投入规模报酬不变。

但若同时扩大知识品种 A，情况不同。若每个品种的投入保持为 x，则由 (19.2) 有 $Y=L_Y^{1-\alpha}Ax^\alpha$。增加 A 会在不要求同一知识被消耗掉的情况下提高产出。知识可以被反复使用，所以它不能像普通竞争性投入那样由边际产品完全定价并被一次性“用完”。这就是总量递增回报的来源。 □

这个命题解释了为什么内生技术变化模型必须离开最简单的完全竞争框架。如果知识生产有固定成本，而知识又非竞争，边际成本定价无法覆盖研发成本；若强行保持完全竞争，模型就没有私人研发激励。Romer 的垄断竞争不是装饰，而是让知识生产可以由私人部门承担的必要结构。

19.12 数据：研发强度和研究人员规模

Romer 模型预测研发资源和知识增长密切相关。现实中，我们至少可以先看两个粗略指标：研发支出占 GDP 比重，以及每百万人中的研究人员数量。表 19.3 和表 19.4 使用 World Bank WDI 数据，展示几个经济体的变化。最新可得年份并不完全一致；表中 2023 年为空的国家，用该指标最近可得年份替代并在表内标明。

表 19.3: 研发支出占 GDP 比重：R&D expenditure (% of GDP)

经济体	2000	2010	2020	最新可得
中国	0.88	1.68	2.36	2.58 (2023)
美国	2.62	2.71	3.42	3.45 (2023)
韩国	2.05	3.18	4.52	4.94 (2023)
日本	2.86	3.10	3.27	3.44 (2023)
德国	2.39	2.68	3.09	3.15 (2023)
印度	0.76	0.79	0.65	0.65 (2020)

数据来源：World Bank WDI，指标 GB.XPD.RSDV.GD.ZS。2024 年在本次 API 查询中尚无可用值。

表 19.4: 每百万人研究人员数量：Researchers in R&D

经济体	2000	2010	2020	最新可得
中国	550	899	1,600	2,107 (2023)
美国	3,556	3,644	4,568	4,937 (2022)
韩国	2,324	5,429	8,620	9,472 (2023)
日本	5,102	5,117	5,450	5,609 (2023)
德国	3,154	4,056	5,390	5,926 (2023)
印度	111	156	259	259 (2020)

数据来源：World Bank WDI，指标 SP.POP.SCIE.RD.P6。数值四舍五入为整数。

这两张表有几个直接启发。第一，中国研发强度从 2000 年的 0.88% 上升到 2023 年的 2.58%，每百万人研究人员从约 550 人上升到约 2,107 人。这说明中国已经从主要依靠资本深化、劳动力转移和技术引进，逐步转向更高研发投入的增长阶段。

第二，韩国是一个极端清楚的 Romer 型案例。韩国研发强度 2023 年接近 GDP 的 5%，研究人员密度也非常高。它说明小型开放经济体也可以通过高强度研发、出口市场、产业组织和教育体系，把有限国内人口转化为强创新能力。但韩国经验也提醒我们，Romer 模型中的“市场规模”不必只理解为本国人口，全球市场、供应链位置和技术标准都能扩大创新收益。

第三，美国、日本、德国保持较高研发强度和研究人员密度，但增长率并没有随着研究人员规模无限加速。这正是规模效应争论的经验入口。Romer 模型抓住了“研发资源重要”这一点，但如果模型预测研究人员越多长期增长率就持续越高，那么它需要被修正。第 20 章会说明，Jones 模型通过知识生产的“钓鱼效应”和人口增长机制，把强规模效应改造成半内生增长。

第四，印度的研发强度和研究人员密度在这组国家中较低。它提醒我们，人口大国不自动等于研发强国。式 (19.8) 中的 L 不是简单人口，而是能够进入研发部门、被制度和市场有效配置的人力资本。教育质量、科研组织、企业需求、金融体系、知识产权、基础设施和国际连接，都会影响人口能否变成有效研发力量。

19.13 中国与发展延伸

Romer 模型对中国增长特别有用，因为中国正在经历从模仿、引进、资本深化到自主创新和产业升级的转换。若用本章语言描述，中国过去几十年的增长不只是 K 增加，也包括 A 的扩张：更多中间品种类、更完整产业链、更复杂工程系统、更强制造工艺、更大的研发人员队伍。

第一，品种扩张可以解释产业链复杂化。一个国家刚进入工业化时，可能只能生产少数低复杂度产品；随着供应链、工程人才和企业组织能力积累，中间投入品种类增加，最终产品质量和复杂度提高。新能源汽车不是一辆车加一块电池那么简单，而是电池材料、电控系统、传感器、芯片、软件、热管理、充电网络和制造工艺的组合。每一种新中间品或新模块，都类似 Romer 模型中的一个新设计。

第二，研发激励取决于市场规模和利润预期。中国的巨大国内市场会提高新产品商业化回报，使企业更愿意投入研发。但市场规模并不自动变成创新效率。如果竞争环境鼓励重复补贴、低水平专利和地方保护，研发资源可能流向容易申报的项目，而不是高社会价值知识。Romer 模型中的 χ 就会偏低。

第三，知识产权政策需要动态权衡。太弱的知识产权保护会降低研发激励，因为企业难以获得设计图价值 V；太强的保护则可能阻碍扩散，使下游企业支付过高许可费，降低组合创新。对于追赶型经济体，这个权衡尤其复杂：早期技术扩散和模仿学习很重要；接近前沿后，原创研发和知识产权保护的重要性上升。

第四，大学、企业和政府实验室之间的连接影响知识生产效率。Romer 模型把研发部门写成一个简洁的 $\dot{A} = \chi L_A A$，但现实中的 χ 来自科研质量、企业需求、同行评议、风险资本、失败容忍、人才流动和国际交流。若研究成果不能进入产品和工艺，A 就只是论文和专利数量；若企业问题不能反馈到科研系统，研发也容易脱离生产。

第五，开放经济会改变模型中的市场规模和知识扩散。加入全球贸易后，企业研发面对的不只是国内需求，还可能面对全球市场；同时，外国知识也会通过进口设备、跨国企业、留学、标准和供应链扩散进入国内。对中国这样的经济体，内生增长不是封闭经济中的自我循环，而是“国内研发能力”和“全球知识吸收能力”的共同结果。

19.14 常见误区

1. **把知识当作普通资本。**知识的非竞争性是模型关键。如果把知识看成一台机器，就无法解释为什么同一设计能在多个地方使用，也无法解释递增回报。

2. **以为垄断一定坏。**静态看，垄断定价降低中间品使用量；动态看，预期垄断利润激励研发。关键问题不是“要不要垄断”，而是多强、多久、以什么形式保护创新收益。

3. **把研发支出等同于创新。**研发支出是投入，不是结果。真正进入增长的是有效知识、可商业化设计和生产率提升。

4. **忽略规模效应争论。** Romer 模型的强规模效应非常重要，但不能无条件接受。现实中研发人员大幅增加并没有使前沿增长率无限提高。

5. **只看专利数量。**专利数量可能受补贴和考核影响，不能直接代表知识质量。更重要的是专利是否被引用、是否进入产品、是否提高生产率。

6. **忽略吸收能力。**对追赶经济体，增长不仅来自原创研发，也来自吸收、改造和扩散已有技术。人力资本和产业组织能力决定吸收效率。

19.15 英文术语表

英文术语	中文解释
nonrivalry	非竞争性；一个人使用知识不必减少他人使用同一知识的可能性。
excludability	排他性；所有者阻止未付费者使用某种物品的能力。
variety expansion	品种扩张；通过增加中间品或设计种类提高生产率。
Dixit-Stiglitz aggregator	Dixit-Stiglitz 聚合器；常用于表示多品种产品或中间品的聚合结构。
monopolistic competition	垄断竞争；企业面对向下倾斜需求曲线并有一定定价权，但存在多个差异化品种。
markup	加成率；价格相对边际成本的比例。
blueprint	设计图；Romer 模型中可用于生产一种新中间品的知识资产。
R&D sector	研发部门；使用研究人员或人力资本生产新知识的部门。
patent value	专利价值；未来垄断利润的折现价值。
free-entry condition	自由进入条件；研发部门利润被进入耗散后的无套利条件。
scale effect	规模效应；经济或研发人员规模越大，模型预测长期增长率越高的机制。
knowledge spillover	知识溢出；一方知识积累提高其他人研发或生产效率的现象。

19.16 本章 Review

如果我来 review 你对本章的理解，第一条标准是你是否能说明 Romer 模型怎样把知识生产市场化。最终品部门使用越来越多的中间品种类，中间品企业因为设计图获得垄断利润，研发部门因为设计图有价值而投入资源生产新知识。

第二，我会检查你是否能推导模型的关键链条。你应该能从 Dixit–Stiglitz 型品种聚合得到中间品需求，进而得到垄断定价、利润、专利价值、研发无套利条件和知识生产函数。若只说“研发带来增长”，还没有进入这一章的核心。

第三，你应该能解释非竞争性和部分排他性的区别。知识非竞争性带来总量递增回报，部分排他性让私人企业有研发激励；这两个性质同时存在，才使创新增长模型既有市场激励又有外部性。

最后，我会看你是否能提出规模效应问题。如果研发人员越来越多而长期增长率没有持续加速，第一代 Romer 模型就需要修正；这正是下一章半内生增长模型的入口。

19.17 核心文献

文献	阅读用途
Romer (1990)	品种扩张、知识非竞争性、研发部门和第一代研发型内生增长模型。[Romer, 1990]
Dixit-Stiglitz	垄断竞争和产品多样性聚合器，是理解 Romer 中间品结构的微观基础。[Dixit and Stiglitz, 1977]
Grossman-Helpman	将创新、贸易和增长系统结合，是开放经济创新增长的重要入口。[Grossman and Helpman, 1991]
Aghion-Howitt	研究生层面的增长教材，对 Romer 模型、质量阶梯和政策问题有系统处理。[Aghion and Howitt, 2009]
Jones (1995)	对研发型增长模型规模效应的经典批判，也是下一章的核心文献。[Jones, 1995]

第二十章　半内生增长与规模效应争论

20.1　本章导读

上一章的 Romer 模型给出了一个非常漂亮的内生增长机制：研发人员生产新设计图，设计图带来中间品垄断利润，利润激励更多研发，知识品种扩张推动长期增长。它把“技术进步”从外生参数变成了经济内部资源配置的结果。

但漂亮模型往往会留下一个尖锐问题。Romer 型知识生产函数

$$\dot{A} = \chi L_A A$$

推出

$$g_A = \frac{\dot{A}}{A} = \chi L_A.$$

这意味着：只要研发人员 L_A 增加，长期技术增长率就应该提高。一个拥有更多研究人员的经济体，或者一个随着时间把越来越多人投入研发的世界，应该出现越来越快的技术进步。这就是所谓的强规模效应。

Jones (1995) 的批判正是从这里切入。20 世纪以来，美国和其他前沿经济体的科学家、工程师、研发支出和研究组织规模都大幅扩张，但长期 TFP 增长率并没有随之持续加速。现实世界更像是：我们投入了越来越多研究努力，才维持住大致相近的增长率。这不是说研发不重要，而是说“想法越来越难找”（ideas getting harder to find）。知识前沿越高，继续推进它所需要的研究努力越多。

本章要把这个争论讲清楚。我们先回顾 Romer 模型的强规模效应；再引入 Jones 型半内生增长模型，说明为什么长期增长率不再由研发份额永久决定，而由人口增长、研究效率和知识生产递减参数共同约束；最后用研发强度、研究人员和人口增长数据说明，中国和其他经济体面对的问题不是“要不要研发”，而是“在低人口增长和更难创新的环境下，怎样提高研发效率”。

20.2　学习目标

学完本章，你应该能够：

1. 解释第一代研发型内生增长模型中的强规模效应。

2. 理解 Jones (1995) 为什么认为强规模效应与长期事实不完全一致。
3. 推导半内生增长模型 $\dot{A} = \chi L_A^{\lambda} A^{\phi}$ 的平衡增长率。
4. 区分“研发份额影响水平”与“研发份额影响长期增长率”。
5. 理解“ideas getting harder to find”的经济含义。
6. 用研发人员、研发强度、人口增长和人均 GDP 增长数据判断模型启发。
7. 分析中国人口放缓背景下创新驱动增长的条件和限制。

20.3 核心问题

本章的核心问题是：

> 如果研发人员越来越多，为什么长期增长率没有持续加速？内生增长理论应当怎样同时承认研发重要，又避免“人口越多增长率越高”的过强结论？

这个问题并不否定 Romer 模型。相反，它是在 Romer 模型基础上向前推进。Romer 模型告诉我们，知识是由研发活动生产出来的；Jones 模型追问，知识生产本身是否也存在递减回报。若一个研究者面对的是低垂果实，他可能很容易发现新技术；若他面对的是已经高度开发的知识前沿，他可能需要更昂贵设备、更大团队、更长训练和更复杂组织，才能取得同样的技术进步。

因此，本章的关键词不是“研发无效”，而是“研发努力的边际产出可能下降”。这一区分很重要。若误读 Jones 批判，就会以为既然研发人员增加没有让增长率无限上升，研发就不重要。正确理解是：正因为想法越来越难找，现代经济需要越来越多、更高质量、更有效组织的研发，才能维持增长。

20.4 Romer 模型的强规模效应

先把上一章的机制压缩成最简单形式。知识生产函数为

$$\dot{A} = \chi L_A A, \qquad \chi > 0. \tag{20.1}$$

其中 A 是知识存量或设计图数量，L_A 是研发人员，χ 是研发效率。两边除以 A，得到

$$g_A = \chi L_A. \tag{20.2}$$

如果总人口或劳动 L 固定，且研发人员份额为 s_A，那么 $L_A = s_A L$，于是

$$g_A = \chi s_A L. \tag{20.3}$$

这有两个含义。第一，提高研发份额 s_A 会永久提高知识增长率。第二，经济规模 L 越大，长期增长率越高。

第二个含义尤其强。若两个经济体研发份额和研发效率相同，但一个经济体人口是另一个的十倍，模型会预测前者长期增长率十倍于后者。若世界研发人员随着时间增加，世界技术增长率也应随时间上升。这个结论就是强规模效应。

命题 20.1 (Romer 型知识生产的强规模效应). *在知识生产函数 (20.1) 下，若研发人员 L_A 永久上升，则知识增长率 g_A 按比例永久上升。*

证明. 由 (20.1)，

$$g_A = \frac{\dot{A}}{A} = \chi L_A.$$

令研发人员从 L_A 永久上升到 $\tilde{L}_A > L_A$，新的知识增长率为 $\tilde{g}_A = \chi \tilde{L}_A$。因此

$$\tilde{g}_A - g_A = \chi(\tilde{L}_A - L_A) > 0.$$

只要 χ 不变，研发人员的永久上升会永久提高知识增长率。 □

这个命题逻辑很清楚，但经验含义太强。现实中，研究人员规模确实上升了很多；可是长期增长率没有表现出同等比例的持续加速。于是我们需要修改知识生产函数，而不是放弃知识生产模型。

20.5 想法为什么会越来越难找

“想法越来越难找”不是一句悲观口号，而是知识生产中的递减回报假说。它至少有四个来源。

第一，低垂果实会先被摘走。早期工业化中的许多改进来自较容易识别的机械化、电气化、标准化和流程改造。当前沿被推进后，下一步创新往往需要更复杂科学基础和更大团队。

第二，研究对象本身更复杂。制药研发、先进半导体、航空发动机、人工智能大模型和新能源系统，都需要跨学科知识、昂贵设备、长周期试验和严格监管。单个研究人员难以像早期发明家那样独立完成突破。

第三，知识重复和拥挤增加。更多研究人员进入同一方向，会带来重复研究、优先权竞争、论文发表拥挤和专利围栏。研究人数增加并不等于有效新知识同比例增加。

第四，创新需要互补制度。若金融体系不能支持长期高风险研发，若大学和企业之间连接弱，若基础研究和应用研究错配，若人才流动受阻，研发投入就可能转化为低质量专利或重复项目。

这些机制可以用一个参数化方式表达：已有知识 A 越高，继续生产新知识越难。于是知识生产函数从 Romer 型

$$\dot{A} = \chi L_A A$$

变为更一般的 Jones 型

$$\dot{A} = \chi L_A^{\lambda} A^{\phi}, \qquad 0 < \lambda \leq 1, \quad \phi < 1. \tag{20.4}$$

其中 λ 衡量研究人员投入的弹性。若 $\lambda < 1$，说明研发人员之间存在拥挤、重复或组织摩擦。ϕ 衡量已有知识对新知识生产的影响。若 $\phi = 1$，就是 Romer 的强知识外部性；若 $\phi < 1$，则已有知识虽然可能帮助研究，但不足以完全抵消“前沿越来越难推进”的力量。

20.6 半内生增长模型

令总劳动 L 以人口增长率 n 增长：

$$\frac{\dot{L}}{L} = n. \tag{20.5}$$

假设研发人员占总劳动的份额为 s_A，因此

$$L_A = s_A L. \tag{20.6}$$

由 (20.4)，知识增长率为

$$g_A = \frac{\dot{A}}{A} = \chi L_A^{\lambda} A^{\phi-1}. \tag{20.7}$$

当 $\phi < 1$ 时，随着 A 上升，$A^{\phi-1}$ 下降。也就是说，在给定研发人员数量时，知识存量越高，知识增长率越难维持。

命题 20.2 (Jones 型半内生增长率). *在知识生产函数 (20.4) 下，若研发份额 s_A 长期稳定、劳动以常数率 n 增长，且平衡增长路径上 g_A 为常数，则*

$$g_A^{*} = \frac{\lambda n}{1-\phi}. \tag{20.8}$$

证明. 由 (20.7) 取对数：

$$\log g_A = \log \chi + \lambda \log L_A + (\phi - 1) \log A.$$

对时间求导，得到

$$\frac{\dot{g}_A}{g_A} = \lambda \frac{\dot{L}_A}{L_A} + (\phi - 1)\frac{\dot{A}}{A}.$$

若研发份额 s_A 稳定，则 $L_A = s_A L$，所以 $\dot{L}_A / L_A = n$。又因为 $\dot{A}/A = g_A$，有

$$\frac{\dot{g}_A}{g_A} = \lambda n - (1-\phi) g_A.$$

在平衡增长路径上，g_A 为常数，所以 $\dot{g}_A = 0$。因此

$$0 = \lambda n - (1-\phi) g_A^*,$$

解得

$$g_A^* = \frac{\lambda n}{1-\phi}.$$

□

这个结果非常重要。它说明，研发份额 s_A 的永久提高不再永久提高长期增长率；它会提高知识水平路径，让经济在一段时间内增长更快，但长期增长率由人口增长率 n 和知识生产参数 λ, ϕ 决定。这就是“半内生”一词的含义：技术进步仍然来自经济内部的研发活动，但长期增长率不再完全由政策选择的研发份额决定。

20.7 研发份额影响什么：水平效应与增长效应

半内生增长模型最容易误解的地方，是把“研发份额不决定长期增长率”理解成“研发份额不重要”。这完全不对。

由 (20.7) 可知，给定 A 和 L，提高 s_A 会提高 L_A，从而提高当前 g_A。经济会经历一段较快的知识增长，直到更高的 A 把增长率重新压回平衡增长率。最终，研发份额提高主要表现为更高的知识水平和收入水平，而不是永久更高的增长率。

可以用一个简单数值例子说明。设 $\lambda = 1$、$\phi = 0.5$、人口增长率 $n = 1\%$，则长期知识增长率为

$$g_A^* = \frac{0.01}{1-0.5} = 2\%.$$

若研发份额从 5% 提高到 10%，初期 L_A 翻倍，g_A 会跳升；但随着 A 更快增加，$A^{\phi-1} = A^{-0.5}$ 下降，最终增长率回到 2%，只是知识水平永久更高。

表 20.1 不是说两类模型只能二选一。现实中，某些领域可能更接近 Romer：已有知识强烈帮助新知识生产，市场规模和研发团队扩张带来持续创新加速。另一些领域可能更接近 Jones：新突破越来越难，需要越来越多研究努力维持相同速度。增长理论的任务，是判断哪个机制在特定时期、特定产业和特定国家更重要。

20.8 数据：研发扩张、人口放缓与增长率

现在把模型拉回数据。表 20.2 汇总几个经济体的研发强度和研究人员密度。它延续上一章的数据，但这里的重点不同：我们关心的是研发规模扩张是否自动带来长期增长加速。

表 20.2 显示，很多经济体的研发资源确实显著增加。中国研发强度约从 0.88% 上升到 2.58%，研究人员密度约增加到 2000 年的 3.8 倍。韩国的变化更强，研究人员密度从约 2,324 上升到约 9,472，研发强度接近 GDP 的 5%。

表 20.1: Romer 与 Jones 模型中研发份额的不同作用

问题	Romer 强规模模型	Jones 半内生模型
知识生产函数	$\dot{A} = \chi L_A A$	$\dot{A} = \chi L_A^{\lambda} A^{\phi},\ \phi < 1$
提高研发份额 s_A	永久提高 g_A	提高水平路径，长期 g_A 回到 BGP
人口增长率 n	不是长期增长的必要条件	决定长期增长率的重要来源
政策含义	研发补贴可永久提高增长率	研发补贴主要提高长期收入水平和转型期增长
核心问题	知识外部性足够强	想法越来越难找，研发效率更关键

表 20.2: 研发投入和研究人员密度的上升

经济体	研发/GDP		研究人员/百万人	
	2000	最新	2000	最新
中国	0.88	2.58 (2023)	550	2,107 (2023)
美国	2.62	3.45 (2023)	3,556	4,937 (2022)
韩国	2.05	4.94 (2023)	2,324	9,472 (2023)
日本	2.86	3.44 (2023)	5,102	5,609 (2023)
德国	2.39	3.15 (2023)	3,154	5,926 (2023)
印度	0.76	0.65 (2020)	111	259 (2020)

数据来源：World Bank WDI，指标 GB.XPD.RSDV.GD.ZS 与 SP.POP.SCIE.RD.P6。研发指标 2024 年在本次 API 查询中尚无可用值。

如果 Romer 强规模效应严格成立，我们应当看到这些经济体长期增长率随研发规模持续上升。但现实更复杂。表 20.3 加入人口增长率和人均 GDP 增长率。人均 GDP 增长不是 TFP 增长，它还包含资本深化、就业结构和周期冲击；但作为直观宏观结果，它足以提醒我们：研发扩张与增长结果之间不是机械一对一关系。

表 20.3: 人口增长与人均 GDP 增长：半内生增长的背景

经济体	人口增长		人均 GDP 增长	
	2000	2024	2000	2024
中国	0.79	-0.12	7.73	5.11
美国	1.11	0.98	2.93	1.79
韩国	0.84	0.07	8.29	1.93
日本	0.17	-0.44	2.59	0.54
德国	0.14	0.27	2.74	-0.77
印度	1.88	0.89	1.91	5.55

数据来源：World Bank WDI，指标 SP.POP.GROW 与 NY.GDP.PCAP.KD.ZG。单位均为百分比。

这张表要谨慎读。2024 年的人均 GDP 增长包含疫情后调整、周期、政策和外部冲击，不是长期稳态增长率。但它仍然有两个教学价值。

第一，人口增长普遍下降，尤其是中国、韩国、日本等东亚经济体。半内生增长模型说，若知识生产仍需要不断增加的研究人员数量来维持增长，而人口增长放缓，那么长期增长压力会加大。除非研发份额继续上升、研发效率 χ 提高、国际知识流动增强，或者 ϕ 接近 1，否则维持高增长会更难。

第二，研发强度高不等于当期人均 GDP 增长高。日本和德国研发强度高、研究人员密度高，但 2024 年人均 GDP 增长较弱。韩国研发强度极高，但人口增长几乎停滞。这些事实并不说明研发失败，而是说明增长结果取决于更多因素：技术吸收、资本配置、产业结构、需求环境、人口结构、国际市场和政策制度。

20.8.1 数据读法：从研发规模到研究生产率

更严格地检验半内生增长模型，不能只比较研发投入和 GDP 增长。Romer 强规模效应关心的是：研发人员规模长期增加，是否会使技术增长率永久上升。Jones 和后来的 “ideas getting harder to find” 文献关心的是：如果研发努力大幅上升，而 TFP 增长没有同步加速，那么单位研发努力带来的有效知识增长可能在下降。

用模型语言说，若知识生产函数为

$$\dot{A} = \chi L_A^{\lambda} A^{\phi}, \tag{20.9}$$

则知识增长率为

$$g_A = \frac{\dot{A}}{A} = \chi L_A^{\lambda} A^{\phi-1}. \tag{20.10}$$

当 $\phi < 1$ 时，即使 L_A 上升，已有知识存量 A 变大也会压低 $A^{\phi-1}$。因此，一个教学上有用的研究生产率代理指标是

$$\text{research productivity} \approx \frac{g_A}{L_A^{\lambda}}. \tag{20.11}$$

如果研发人员越来越多，而 TFP 增长率大体稳定甚至下降，那么这个比率就会下降；这正是“想法越来越难找”的经验含义。

表 20.4: 半内生增长模型的数据对应关系

模型对象	常用数据入口	主要局限
L_A	研究人员数量、研发就业、R&D 支出	支出和人数是投入，不代表有效研究质量。
g_A	TFP 增长、专利质量、科学产出、生产率前沿移动	TFP 难测，专利数量可能受制度激励扭曲。
χ	单位研发投入带来的 TFP 或高质量创新产出	受科研组织、竞争、金融、教育和开放程度影响。
$A^{\phi-1}$	前沿难度、技术复杂性、低垂果实是否减少	难以直接观测，通常通过长期趋势间接识别。

表 20.3 中的人均 GDP 增长只是一个直观入口，不等于 g_A。如果后续要把这一章推进到论文复制或实证专题，应该优先使用 Penn World Table 的 TFP、Conference Board 生产率数据，或者具体行业的创新产出数据。正文使用 WDI 的好处是透明、直观、可快速复核；它的代价是不能直接完成对 g_A 的严格估计。因此，本章的数据部分服务于理解模型张力，而不是声称已经完成因果检验。

20.9 一个转型动态例子

为了把半内生增长的逻辑看得更清楚，考虑下面的简化设定：

$$\lambda = 1, \qquad \phi = 0.5, \qquad n = 0.5\%.$$

则长期知识增长率为

$$g_A^* = \frac{0.005}{1 - 0.5} = 1\%.$$

如果一个经济体通过政策把研发份额从 5% 提高到 10%，短期内 L_A 上升，知识增长率提高。设原来处于平衡增长路径，研发份额翻倍后，初始时刻的 g_A 也大致翻倍，从 1% 跳到 2%。但随着 A 增长更快，$A^{-0.5}$ 下降，g_A 会逐渐回落到 1%。

表 20.5: 研发份额上升后的转型动态：半内生增长例子

阶段	研发份额 s_A	知识增长率 g_A	经济解释
初始 BGP	5%	1.0%	研发投入与知识难度相匹配
政策后短期	10%	2.0%	研发人员增加，创新速度暂时提高
转型中	10%	1.5%	知识前沿提高，想法变难找
新 BGP	10%	1.0%	增长率回归，但知识水平更高

这个例子解释了为什么半内生增长并不悲观。研发政策仍然有巨大价值，因为它可以提高长期收入水平，并在相当长时期内提高增长率。只是它不能像 Romer 强规模模型那样，保证增长率永久上升。政策评价要区分两个问题：一个政策是否提高了未来收入水平；它是否永久提高了长期增长率。

20.10 中国与发展延伸

半内生增长模型对中国尤其重要，因为中国正同时面对三件事：研发投入快速增加、人口增长转负、追赶空间逐步缩小。

第一，中国的增长阶段正在变化。过去的高速增长中，资本深化、劳动力从农业向工业和服务业转移、技术引进和出口扩张都很重要。现在这些力量边际上减弱，创新和效率提升的重要性上升。用本章语言说，中国需要更多依靠 $\dot{A}$，而不是只依靠 K 和劳动力转移。

第二，人口增长转负会改变创新增长约束。若有效研发人员数量不能继续快速增长，Jones 模型中的 n 下降会压低长期知识增长率。中国可以通过提高研发份额、扩大高等教育和吸引全球人才来部分抵消，但更关键的是提高 χ：让每一单位研发投入产生更多有效知识。

第三，研发效率比研发规模更关键。若考核制度鼓励论文数量和专利数量，研发资源可能进入低质量重复项目；若企业竞争、资本市场、大学科研和产业需求形成良好连接，同样的研发人员可以产生更高质量创新。中国政策讨论中经常说“提高全要素生产率”，在本章模型里对应的一个核心就是提高 χ，并减轻研发拥挤和重复。

第四，开放经济可以缓解国内人口规模限制。即使国内人口增长放缓，企业仍可通过全球市场扩大创新收益，通过国际科研合作吸收前沿知识，通过进口设备和人才流动提高研发效率。半内生增长模型的封闭经济形式强调 n，但现实中有效市场规模和有效知识流动未必等于本国人口。

第五，追赶经济体与前沿经济体的“想法难度”不同。前沿国家面对的是推开世界技术边界；追赶经济体还可以通过吸收、改造和扩散已有技术提高生产率。因此，中国某些领域可能仍有较大追赶空间，ϕ 或有效 χ 较高；另一些前沿领域，如先进制程芯片、原研药、基础软件和高端设备，则更接近“想法难找”的前沿创新。

20.11 常见误区

1. **把 Jones 模型理解成研发不重要。**错。半内生增长模型说研发份额主要影响收入水平和转型期增长，不是说研发没有价值。
2. **把人口规模直接等同于创新能力。**有效研发人员需要教育、组织、市场需求和制度支持。人口大但研发体系弱，不会自动带来高创新。
3. **只看研发支出，不看研发产出。**支出是投入。真正重要的是有效知识、生产率提升和可扩散技术。
4. **用一年 GDP 增长判断创新模型。**单年增长受周期和冲击影响。增长模型讨论的是长期趋势。
5. **忽略国际知识流动。**开放经济中，国内增长可以依靠本土研发和全球知识吸收共同推动。
6. **把所有行业放进同一个 ϕ。**不同行业想法难度不同。软件、医药、半导体、能源和教育技术的知识生产函数可能完全不同。

20.12 英文术语表

英文术语	中文解释
scale effect	规模效应；经济规模或研发人员规模越大，长期增长率越高的模型预测。
strong scale effect	强规模效应；研发人员永久增加会永久提高长期增长率。

semi-endogenous growth	半内生增长；技术进步来自研发，但长期增长率由人口增长和知识生产参数约束。
ideas getting harder to find	想法越来越难找；维持同样技术进步需要越来越多研究努力。
knowledge production function	知识生产函数；描述研发人员和已有知识如何生产新知识的函数。
research duplication	研究重复；多个研究者或团队做相似方向导致有效创新低于投入增长。
fishing-out effect	钓鱼效应；容易发现的想法先被发现，后来想法更难找。
level effect	水平效应；政策提高长期收入或知识水平，但不永久提高增长率。
balanced growth path	平衡增长路径；关键变量以稳定比例或稳定增长率共同演化的路径。
research productivity	研究生产率；单位研发投入产生有效新知识的能力。

20.13 本章 Review

如果我来 review 你对本章的理解，第一条标准是你是否能说清“规模效应”到底指什么。Romer 模型中，研发人口规模越大，长期增长率越高；Jones 模型则指出，若知识前沿越来越难推进，研发规模扩张未必永久提高增长率。

第二，我会检查你是否能从知识生产函数推出半内生结果。把 $\dot{A} = \chi L_A A$ 改成 $\dot{A} = \chi L_A^{\lambda} A^{\phi}$ 且 $\phi < 1$ 后，稳态技术增长率变为

$$g_A^* = \frac{\lambda n}{1-\phi}.$$

这里的人口增长不是随手加的参数，而是维持研究投入持续扩张的力量。

第三，你应该能区分研发政策的水平效应和增长效应。半内生模型不是说研发不重要，而是说提高研发强度更可能提高收入水平和转型期增长；长期增长率是否永久上升，取决于人口、研究生产率和知识外溢结构。

最后，我会看你能否把这个逻辑用于中国和全球低生育环境。人口增长放缓时，创新驱动增长更依赖研发效率 χ、基础研究质量、国际知识流动、企业转化能力和减少重复错配，而不是单纯堆研发经费或专利数量。

20.14　核心文献

文献	阅读用途
Jones (1995)	对研发型内生增长模型规模效应的经典批判，提出半内生增长框架。[Jones, 1995]
Romer (1990)	第一代研发型内生增长模型，是理解规模效应争论的起点。[Romer, 1990]
Segerstrom (1998)	发展无规模效应的内生增长模型，是规模效应争论中的重要理论回应。[Segerstrom, 1998]
Young (1998)	系统讨论无规模效应增长，为理解产品创新和人口规模提供另一条理论路线。[Young, 1998]
Bloom et al. (2020)	用多领域证据说明维持增长需要越来越多研究努力，是“想法越来越难找”的现代经验文献。[Bloom et al., 2020]

第六部分

创新、创造性破坏与技术进步

第二十一章　Schumpeterian 增长与质量阶梯

21.1　本章导读

前两章讨论了研发型内生增长。Romer 模型把创新理解为品种扩张：经济可以使用的中间品种类越来越多，最终产出随之提高。Jones 模型提醒我们，研发规模扩大并不必然使长期增长率永久上升，因为想法可能越来越难找。

本章换一个角度。许多创新不是增加一个全新品种，而是让已有产品或工艺被更好的版本替代。电动车替代燃油车的一部分市场，智能手机替代功能手机，数控机床替代旧式机床，在线支付替代部分现金支付，新的芯片制程替代旧制程。增长不只是“多一种东西”，也是“旧东西被更高质量的新东西挤掉”。

这就是 Schumpeterian 增长理论的入口。它的关键词是**创造性破坏**：创新创造新利润、新生产率和新市场，同时破坏旧企业、旧资产和旧组织的垄断地位。Aghion and Howitt (1992) 的贡献，是把 Schumpeter 的直觉写成了可推导的增长模型：研发带来质量跃升，成功创新者成为新垄断者，旧垄断者被替代，长期增长率由创新到来率和质量步长共同决定。

本章的学习逻辑是：先区分“品种扩张”和“质量阶梯”；再建立最简质量阶梯模型；然后推导增长率、研发套利条件和创造性破坏的价值方程；最后用专利数据和中国创新转型说明，为什么增长政策不能只问“研发投入够不够”，还必须问“新企业能否替代旧企业，低效率产能能否退出，创新收益能否转化为真正的质量提升”。

21.2　学习目标

学完本章，你应该能够：

1. 区分横向创新（variety expansion）和纵向创新（quality improvement）。
2. 用质量阶梯模型说明每次创新如何提高技术水平。
3. 推导质量步长、创新到来率和长期增长率之间的关系。

4. 理解创造性破坏如何同时提高生产率并破坏旧垄断利润。
5. 写出研发套利条件，并解释利润、利率、研发效率和替代风险如何影响创新强度。
6. 理解私人创新激励和社会最优之间的差异：知识溢出、商业窃取、垄断扭曲和重复研发。
7. 将模型用于分析中国从模仿追赶到前沿创新的转型问题。

21.3 核心问题

本章的核心问题是：

> 如果创新会替代旧技术，那么市场经济会产生太多创新、太少创新，还是错误类型的创新？创造性破坏为什么既是增长动力，也是政治经济阻力？

这个问题比“研发越多越好吗”更细。研发投入只是起点。真正重要的是：研发是否提高质量？是否推动资源从低生产率企业流向高生产率企业？是否让消费者得到更好产品？是否只是制造专利数量、保护既得垄断、重复低质量项目？

Schumpeterian 模型的优势，是把这些问题压缩进一个清楚机制：创新者获得暂时垄断利润，所以有动力研发；但下一轮创新会替代它，所以垄断利润不是永久安全的。增长来自这种不断替代。没有利润，没人愿意创新；没有替代，利润会变成停滞的保护。

21.4 从品种扩张到质量阶梯

Romer 模型中的创新是横向的。每个新设计图增加一种中间品，经济的生产组合变得更丰富。用一个很简化的写法，若品种数为 A，最终产出可以随 A 增加而提高。

Schumpeterian 模型中的创新是纵向的。产品线数量可以固定，但每条产品线的质量不断提高。设经济中有一组产品线 $j \in [0,1]$。每条产品线都有当前最高质量 $q_j(t)$。一次成功创新会把这条产品线的质量从 q_j 提高到

$$q_j' = \gamma q_j, \qquad \gamma > 1. \tag{21.1}$$

其中 γ 是质量步长。若 $\gamma = 1.05$，一次创新使质量提高约 5%；若 $\gamma = 1.20$，一次创新是更大的技术跃迁。

为了把不同产品线合成一个总技术指标，定义

$$\log A(t) = \int_0^1 \log q_j(t)\, dj. \tag{21.2}$$

这个定义的含义是：总技术水平是各产品线质量的几何平均。使用对数平均有两个好处。第一，它让质量乘法跃迁变成加法；第二，它避免某一条产品线的极端值完全支配总量。

21.5 质量阶梯增长率

假设每条产品线的创新以 Poisson 过程到来，到来率为 μ。这意味着，在很短时间间隔 dt 内，一条产品线发生一次质量跃升的概率约为 μdt，没有创新的概率约为 $1-\mu dt$，发生两次及以上创新的概率可以忽略。

命题 21.1 (质量阶梯模型的长期增长率). *若每条产品线以到来率 μ 发生质量改进，且每次创新把质量乘以 $\gamma>1$，则总技术水平的期望增长率为*

$$g_A = \mu \log \gamma. \tag{21.3}$$

证明. 一次创新使某条产品线的对数质量从 $\log q_j$ 变为

$$\log q_j' = \log(\gamma q_j) = \log q_j + \log \gamma.$$

在长度为 dt 的短时间内，产品线 j 发生创新的概率为 μdt，所以其对数质量的期望增量为

$$E[d \log q_j] = \mu dt \cdot \log \gamma + o(dt).$$

对所有产品线积分，

$$E[d \log A] = \int_0^1 E[d \log q_j]\, dj = \mu dt \log \gamma + o(dt).$$

两边除以 dt 并令 $dt \to 0$，得到

$$g_A = \frac{dE[\log A]}{dt} = \mu \log \gamma.$$

□

这个命题很重要。它把长期增长率拆成两个部分：创新频率 μ 和创新步长 $\log \gamma$。一个经济体可以通过更频繁的小改进增长，也可以通过较少但更大的突破增长。现实中两者都存在：制造工艺常常靠连续微小改进提高质量和降低成本；通用技术、基础科学和平台型技术则可能带来较大跃迁。

21.6 一个数值例子：频率和步长都重要

表 21.1 用 (21.3) 展示创新频率和质量步长的组合如何决定长期增长。

这张表的教学价值在于，它提醒我们不要只看“创新数量”。如果 μ 很高但 γ 很接近 1，经济可能有大量小专利、小版本更新和低质量项目，但长期生产率提升有限。反过来，如果 γ 很大但 μ 极低，突破性创新虽重要，却不足以支撑持续增长。增长政策既要提高有效创新频率，也要提高创新质量。

表 21.1: 质量阶梯模型中的增长率

创新到来率 μ	质量步长 γ	$\log\gamma$	$g_A=\mu\log\gamma$
0.20	1.05	0.0488	0.98%
0.40	1.05	0.0488	1.95%
0.20	1.10	0.0953	1.91%
0.40	1.10	0.0953	3.81%

21.7 垄断利润与创造性破坏

现在把创新激励放进模型。每条产品线当前由一个质量领先企业生产。领先企业因为拥有最高质量，可以获得暂时垄断利润。为了突出机制，令一条产品线的流量利润为

$$\pi q, \qquad \pi > 0, \tag{21.4}$$

其中 q 是当前质量，π 是单位质量利润。

但这个利润不是永久的。若另一个研发者成功创新，质量从 q 跳到 γq，新创新者成为领导者，旧领导者失去垄断地位。这就是创造性破坏。为了避免混淆，本章从这里开始用 X 表示**产品线层面的总创新到来率**，也就是当前领导者被替代的 hazard。这个 X 不是某一个潜在进入者单独控制的变量，而是整条产品线研发活动汇总后的结果。

令 $V(q)$ 表示成为当前质量领导者的价值，利率为 r。一个简化资产定价方程为

$$rV(q) = \pi q - XV(q). \tag{21.5}$$

左边是持有领导地位所需的回报。右边第一项是当前垄断利润；第二项是被下一轮创新替代的预期资本损失。整理得到

$$V(q) = \frac{\pi q}{r + X}. \tag{21.6}$$

这个式子把 Schumpeterian 模型的核心张力写得很清楚。利润 πq 越高，领导地位越值钱，创新激励越强；利率 r 越高，未来利润折现越厉害，创新激励越弱；创造性破坏率 X 越高，现有领导地位越不安全，领导者价值越低。

21.8 研发套利条件

接下来考虑一条产品线上的研究部门如何决定总研发强度。令总创新到来率为 X，研发成本为

$$C(X) = \frac{\psi}{2} X^2 q, \qquad \psi > 0. \tag{21.7}$$

成本随质量 q 成比例上升，意思是前沿越高，继续改进越昂贵。这和上一章“想法越来越难找”的直觉一致。使用总强度 X 的好处是，领导者价值中的替代风险和研究部门创造的行业创新率保持一致，而不会把单个企业的选择和全行业 hazard 混在一起。

若研究部门成功创新，新的领导者获得质量 γq 的领导地位，价值为 $V(\gamma q)$。研究部门选择 X 最大化

$$XV(\gamma q) - \frac{\psi}{2}X^2 q. \tag{21.8}$$

一阶条件为

$$V(\gamma q) = \psi X q. \tag{21.9}$$

由 (21.6)，

$$V(\gamma q) = \frac{\pi \gamma q}{r + X}. \tag{21.10}$$

代入 (21.9) 得

$$\frac{\pi \gamma q}{r + X} = \psi X q. \tag{21.11}$$

约去 q 后得到研发套利条件

$$X(r + X) = \frac{\pi \gamma}{\psi}. \tag{21.12}$$

命题 21.2 (总研发强度的闭式解). *在研发成本 (21.7) 和领导者价值 (21.6) 下，内部总研发强度为*

$$X^* = \frac{-r + \sqrt{r^2 + 4\pi\gamma/\psi}}{2}. \tag{21.13}$$

因此 π 和 γ 越高，总研发强度越大；ψ 和 r 越高，总研发强度越小。

证明. 由 (21.12)，

$$X^2 + rX - \frac{\pi\gamma}{\psi} = 0.$$

这是关于 X 的二次方程。正根为

$$X^* = \frac{-r + \sqrt{r^2 + 4\pi\gamma/\psi}}{2}.$$

负根小于零，不符合创新到来率非负约束。由该表达式可见，$\pi\gamma/\psi$ 上升会提高根，利率 r 上升会降低根。 □

把 (21.13) 和 (21.3) 合起来，得到最简 Schumpeterian 增长率：

$$g_A = X^* \log \gamma. \tag{21.14}$$

这说明长期增长不只是“有多少研发人员”，而是由利润激励、质量步长、研发成本、利率和行业替代风险共同决定。

21.9 创造性破坏的经济解释

创造性破坏有两面。第一面是创造。新技术提高质量，降低成本，扩展用途，使消费者和下游企业受益。质量阶梯模型中的 $\gamma > 1$ 就代表这种创造。

第二面是破坏。新技术让旧技术贬值，旧企业失去市场，旧工人需要再匹配，旧资本可能变成沉没成本。方程 (21.5) 中的 $-xV(q)$ 就是这种破坏的资产价值表达。

这两面不能分开。若保护旧企业不被替代，短期就业和资产价值可能更稳定，但创新者的市场空间会被压缩，低效率技术停留更久。若替代过快而再培训、金融重组和社会保险跟不上，经济会出现失业、地区衰落和政治阻力。好的增长制度不是简单崇拜破坏，也不是简单保护旧结构，而是让高生产率进入能够发生，同时让转型成本可被吸收。

21.10 私人创新与社会最优

Schumpeterian 模型特别适合讨论私人创新和社会最优的差异。至少有四种力量。

第一，**知识溢出**。一个创新者提高当前质量后，后续创新者可以站在更高台阶上继续改进。私人创新者通常不能完全获得这部分未来社会收益，因此私人研发可能偏低。

第二，**商业窃取**。新进入者获得利润的一部分，来自抢走旧领导者的利润。它把私人利润从旧企业转移给新企业，但这部分转移本身不是社会新增产出。因此私人研发可能过高，尤其在创新步长很小、只是替代对手利润时。

第三，**垄断扭曲**。为了让创新者回收研发成本，模型允许暂时垄断利润；但垄断定价会降低当期产量和消费者剩余。知识产权越强，创新激励越强，但静态扭曲也可能越大。

第四，**重复研发**。多个团队可能同时追逐同一条产品线的同一质量跃迁，只有一个成功者获得专利，其他投入被浪费。私人竞赛可能导致过度拥挤。

表 21.2: Schumpeterian 模型中的私人激励与社会收益

机制	私人决策看到什么	社会计划者还会看到什么
知识溢出	当前专利利润	后续创新站在更高质量台阶上
商业窃取	抢到旧企业利润	利润转移不等于新增福利
垄断保护	更高 $V(q)$ 与更强研发激励	更高价格和更低当期使用量
重复研发	自己成功即可获利	多个团队重复投入造成浪费

因此，Schumpeterian 理论没有给出一个简单政策口号。它不会说“专利越强越好”，也不会说“竞争越强越好”。它说的是：创新制度要在动态激励、静态效率、进入退出和知识扩散之间权衡。

21.11 数据例子：专利数量不是创新质量

质量阶梯模型强调质量改进，但现实中最容易观察到的往往是专利数量。表 21.3 使用 World Bank WDI 的居民专利申请数，展示几个经济体的变化。

表 21.3: 居民专利申请数：创新投入与制度激励的一个粗略信号

经济体	2000	2010	2020
中国	25,346	293,066	1,344,817
美国	164,795	241,977	269,586
韩国	72,831	131,805	180,477
日本	387,364	290,081	227,348
德国	51,736	47,047	42,260
印度	2,206	8,853	23,141

注：World Bank WDI 指标 `IP.PAT.RESD`，Patent applications, residents。本指标不同国家口径和制度激励可能不同，且 WDI 在本次查询中该组经济体 2020 年后多为缺失；表中数值用于教学比较，不等同于专利质量或 TFP 增长。

这张表很适合和质量阶梯模型一起读。中国居民专利申请数量从 2000 年的约 2.5 万件上升到 2020 年的约 134 万件，增长极快。若只看数量，很容易得出“创新能力爆炸式上升”的结论。但质量阶梯模型提醒我们，长期增长取决于 γ 和有效创新到来率，而不是申请表数量本身。

日本和德国的居民专利申请数在表中下降，并不意味着它们没有创新。它可能反映产业结构、申请策略、国际专利布局、企业研发模式和专利质量差异。美国专利数量增长较温和，但其高影响力基础研究、软件平台、生物医药和数字技术仍然深刻影响世界技术前沿。

因此，专利数据的正确读法是：它提供创新活动和制度激励的一个信号，但必须结合专利引用、国际专利族、企业生产率、产品质量、出口复杂度、研发支出、研究人员和市场竞争来判断。质量阶梯中的 γ 更接近“有效质量提升”，而不是“申请数量”。

21.12 中国与发展延伸：从模仿追赶到创造性破坏

中国增长转型非常适合用 Schumpeterian 框架理解。过去的追赶增长很大程度上依赖技术引进、资本深化、出口制造、供应链学习和规模化生产。这个阶段并不需要每个行业都处在世界技术前沿；通过模仿、吸收和工艺改进，就能获得很高增长。

但接近前沿后，问题变了。继续增长越来越依赖质量阶梯上的真实跃升：更好的芯片、工业软件、机床、医药、机器人、新能源系统、航空发动机、基础材料和科学仪器。此时，增长不只是扩大产能，而是让新技术替代旧技术。

第一，创造性破坏要求有效进入。若新企业、新技术和新商业模式无法进入市场，旧企业的垄断利润会变成保护性租金，而不是创新激励。新能源汽车行业说明，进入、竞争、供应链学习和市场规模可以共同推动质量提升；但如果补贴设计不当，也可能造成重复建设和低质量产能。

第二，创造性破坏要求低效率退出。质量阶梯不是只上不下。若旧企业长期依靠软预算约束、地方保护、隐性担保和行政资源维持，资源就不能流向更高质量台阶。模型中的 x 虽然提高替代风险，但也正是这种风险迫使企业继续创新。

第三，创新政策要区分“扶持研发”和“保护落后”。专利保护、研发补贴、政府采购、产业基金和标准政策都可能提高创新激励；但若它们保护的是已经落后的生产者，就会降低创造性破坏。政策应当帮助企业跨越技术门槛，而不是把旧技术永久放在保护伞下。

第四，教育和金融市场决定创新能否扩散。新技术替代旧技术需要工程师、熟练工人、风险资本、破产重组、职业再培训和跨地区流动。没有这些配套，创造性破坏会带来过高转型成本，社会就会倾向于保护旧结构。

第五，中国的挑战不只是“专利数量够不够”，而是“质量步长 γ 是否足够大，有效创新到来率 x 是否来自真实技术进步”。当考核体系奖励数量时，企业可能生产大量低质量专利；当竞争和市场反馈有效时，企业更有动力把研发变成产品质量、成本下降和生产率提高。

21.13 常见误区

1. **把创造性破坏理解成简单破坏。**模型强调的是新技术替代旧技术带来的生产率提升，不是为了破坏而破坏。

2. **把专利数量等同于质量阶梯。**专利数量对应创新活动信号，质量阶梯关心的是有效质量提升 γ。

3. **以为垄断利润一定坏。**暂时利润可以激励研发；问题是利润是否来自真实创新，是否会被下一轮创新约束。

4. **忽略旧企业退出。**如果低效率企业不能退出，创新企业即使出现也难以获得资源和市场空间。

5. **以为竞争越激烈创新越强。**竞争可能迫使企业创新，也可能压低创新租金；这个关系要在下一章更仔细讨论。

6. **忽略转型成本。**创造性破坏会影响就业、地区和旧资产价值，需要再培训、社会保险和金融重组配套。

21.14 英文术语表

英文术语	中文解释
Schumpeterian growth	熊彼特式增长；由创新、垄断利润和创造性破坏推动的增长。
creative destruction	创造性破坏；新技术创造生产率提升，同时替代旧技术和旧企业。
quality ladder	质量阶梯；产品或工艺质量沿着离散台阶逐步提高的模型。
vertical innovation	纵向创新；提高既有产品或工艺质量的创新。
horizontal innovation	横向创新；增加产品或中间品种类的创新。
innovation arrival rate	创新到来率；单位时间内成功创新发生的概率强度。
Poisson process	泊松过程；常用于刻画随机创新到来的连续时间过程。
business stealing	商业窃取；创新者获得利润的一部分来自抢走旧企业利润。
incumbent	在位企业；当前拥有市场或技术领先地位的企业。
entrant	进入者；试图通过创新进入市场并替代旧领导者的企业。
patent applications, residents	居民专利申请数；一国居民提交的专利申请数量。

21.15　本章 Review

如果我来 review 你对本章的理解，第一条标准是你是否能区分“品种扩张”和“质量替代”。Romer 模型强调中间品种类增加，Schumpeterian 模型强调更高质量技术替代旧技术；这使增长和企业更替、垄断租金、进入退出直接连接起来。

第二，我会检查你是否能解释质量阶梯公式。每次成功创新把质量从 q 提高到 γq，若创新到来率为 μ，长期技术增长率为 $g_A = \mu \log \gamma$。增长既取决于创新频率，也取决于创新步长。

第三，你应该能说明创造性破坏怎样进入企业价值。领导者价值 $V(q) = \pi q/(r+X)$ 中，利润提高会增强创新激励，利率和被替代风险会降低现有垄断价值；研发套利条件把利润、质量步长、研发成本和利率连成一个系统。

最后，我会看你是否能做福利判断。知识溢出可能使私人创新不足，商业窃取和重复研发可能使私人创新过度，垄断保护既提供动态激励也带来静态扭曲。创新政策的难点不是简单增加研发，而是让有效质量跃升替代低效率租金。

21.16　核心文献

文献	阅读用途
Aghion and Howitt (1992)	Schumpeterian 增长和创造性破坏的经典模型，质量阶梯思想的核心入口。[Aghion and Howitt, 1992]
Grossman and Helpman (1991)	系统发展质量阶梯、产品创新和贸易中的内生增长模型。[Grossman and Helpman, 1991]
Aghion and Howitt (2009)	研究生层面的创新增长教材，适合继续学习创造性破坏、竞争与政策。[Aghion and Howitt, 2009]
Acemoglu (2009)	对内生技术变化、市场结构和增长模型有更一般的理论处理。[Acemoglu, 2009]
Bloom et al. (2020)	从经验上说明研究生产率下降和想法越来越难找，与质量提升难度有关。[Bloom et al., 2020]

第二十二章　竞争、专利与创新政策

22.1　本章导读

上一章讲了 Schumpeterian 增长：创新者通过质量跃升获得暂时垄断利润，下一轮创新又会替代旧领导者。这个框架自然引出一个政策问题：为了鼓励创新，经济到底需要更多竞争，还是更强专利保护和更高垄断利润？

直觉上，两种答案都好像有道理。第一种答案说，竞争越强，企业越怕被淘汰，越需要创新来逃离竞争；没有竞争，垄断者躺在利润上，创新动力不足。第二种答案说，竞争越强，利润越低，创新者越难回收研发成本；如果没有专利和垄断租金，企业不愿承担研发风险。

这正是 Aghion 等竞争与创新文献的核心：竞争和创新之间可能不是单调关系，而是倒 U 型。竞争太弱时，企业缺少逃离竞争的压力；竞争太强时，创新后的利润太低，研发回报不足；中等竞争可能最有利于创新。这个结论不是口号，而来自 step-by-step innovation 模型中“逃离竞争效应”和“Schumpeterian 租金效应”的相互作用。

本章要做三件事。第一，建立一个简化模型，说明竞争如何同时提高和降低创新激励。第二，讨论专利保护、研发补贴、专利竞赛和反垄断政策的取舍。第三，把这些机制放到中国创新转型中：为什么既不能把产业政策理解为无条件补贴，也不能把反垄断理解为反创新；关键是让竞争、利润和进入退出共同服务于真实质量提升。

22.2　学习目标

学完本章，你应该能够：

1. 解释为什么完全竞争和永久垄断都可能不利于创新。
2. 区分逃离竞争效应和 Schumpeterian 租金效应。
3. 理解 step-by-step innovation 中 neck-and-neck firms 与 unleveled firms 的不同创新激励。
4. 用一个简化模型推导竞争与创新的倒 U 型关系。
5. 理解专利保护如何影响创新激励、静态效率和知识扩散。

6. 分析专利竞赛中的重复研发和商业窃取问题。

7. 比较研发补贴、税收抵免、政府采购、反垄断和知识产权政策的作用边界。

8. 用中国和跨国数据理解创新政策不能只看研发投入和专利数量。

22.3 核心问题

本章的核心问题是：

> 什么样的市场结构最有利于长期创新？创新政策应当保护利润，强化竞争，还是同时做两件看似矛盾的事？

增长理论给出的答案通常不是单边的。没有利润，企业无法回收研发成本；没有竞争，利润可能变成保护低效率的租金。好的创新制度需要一种动态平衡：让成功创新者获得足够回报，同时让它持续面对被替代的压力；让知识产权保护原创收益，同时避免阻断后续组合创新；让政府支持基础研究和高外部性研发，同时避免补贴变成低质量项目的避风港。

22.4 竞争影响创新的两种效应

设市场竞争强度为 $m \in [0,1]$。$m=0$ 表示竞争很弱，企业享有较安稳的市场地位；$m=1$ 表示竞争很强，价格、利润和市场份额都受到巨大压力。

竞争提高创新激励的机制叫**逃离竞争效应**。当企业处在激烈竞争中时，不创新就只能获得很低利润；若创新成功，它可以暂时领先竞争者，获得质量优势、成本优势或品牌优势。因此，竞争越强，创新带来的“逃离低利润状态”的收益越大。

竞争降低创新激励的机制叫 **Schumpeterian 租金效应**。研发需要预期利润来回收成本。若竞争过强，创新后的利润也很快被价格竞争、模仿、进入和替代压低，那么企业即使创新也赚不到足够回报。此时竞争会削弱创新。

这两个效应可以同时存在。竞争从很弱提高到中等时，逃离竞争效应可能占主导，创新上升；竞争从中等继续提高到很强时，租金效应可能占主导，创新下降。于是出现倒 U 型关系。

22.5 step-by-step innovation 的二状态直觉

Aghion 等文献中的倒 U 型关系，不只是把一个二次函数写出来，而是来自企业技术位置的差异。最重要的区分是 **neck-and-neck firms** 和 **unleveled firms**。

neck-and-neck firms 指同一行业中技术水平接近的企业。它们彼此都没有明显领先，竞争很激烈。如果没有创新，企业只能获得较低利润；如果其中一家创新成功，它

就能暂时领先，获得更高利润。因此，在 neck-and-neck 状态中，竞争越强，不创新的状态越难受，企业越想通过创新逃离竞争。

unleveled firms 指行业中已有明显领先者和落后者。领先者已经享有技术优势，落后者追赶难度较大。在这种状态中，过强竞争可能压低领先后的利润，也可能让落后者即使追上也难以获得足够回报。因此，竞争过强会削弱创新后的租金，降低研发激励。

可以用表 22.1 把这个机制压缩成一张图。

表 22.1: step-by-step innovation 中竞争影响创新的二状态机制

行业状态	竞争上升的主要作用	对创新激励的含义
neck-and-neck	降低不创新时的利润，扩大“领先一小步”的收益差	逃离竞争效应占主导，创新上升
unleveled	压低创新成功后的租金，缩短领先地位的价值	Schumpeterian 租金效应占主导，创新下降

用符号写，设 neck-and-neck 状态下的创新收益差为

$$\Delta_N(m) = \pi_L(m) - \pi_N(m), \tag{22.1}$$

其中 $\pi_N(m)$ 是双方技术接近且竞争激烈时的利润，$\pi_L(m)$ 是创新后领先一小步的利润。竞争上升通常会更强地压低 $\pi_N(m)$，所以 $\Delta_N(m)$ 可能上升。

设 unleveled 状态下的创新收益差为

$$\Delta_U(m) = \pi_L(m) - \pi_F(m), \tag{22.2}$$

其中 $\pi_F(m)$ 是落后者利润。竞争过强时，创新后可获得的领先租金 $\pi_L(m)$ 也会被侵蚀，$\Delta_U(m)$ 可能下降。于是，行业总创新可以粗略理解为

$$x(m) = \omega \frac{\Delta_N(m)}{\psi} + (1-\omega)\frac{\Delta_U(m)}{\psi}, \tag{22.3}$$

其中 ω 是行业处在 neck-and-neck 状态的比例。低到中等竞争区间，第一项可能推动创新上升；高竞争区间，第二项的租金侵蚀可能压低创新。下一节的二次函数模型，就是把这个二状态机制压缩成一个可直接推导的单变量表达式。

22.6 一个倒 U 型创新模型

为了把上述直觉写成模型，设企业选择研发强度 $x \geq 0$。研发强度越高，成功创新的概率强度越高。设竞争强度为 m，创新成功的私人净收益为

$$B(m) = \underbrace{am}_{\text{逃离竞争收益}} - \underbrace{bm^2}_{\text{创新后租金被侵蚀}}, \qquad a > 0,\ b > 0. \tag{22.4}$$

第一项表示竞争越强，企业越想通过创新逃离低利润状态。第二项表示竞争过强时，创新后的利润被快速侵蚀、模仿或替代，且这种侵蚀在高竞争区间更强。

研发成本设为

$$C(x) = \frac{\psi}{2}x^2, \qquad \psi > 0. \tag{22.5}$$

企业选择 x 最大化

$$\Pi(x; m) = xB(m) - \frac{\psi}{2}x^2. \tag{22.6}$$

一阶条件给出

$$x^*(m) = \frac{B(m)}{\psi} = \frac{am - bm^2}{\psi}, \tag{22.7}$$

只要 $B(m) > 0$。若 $B(m) \le 0$，企业选择 $x^* = 0$。

命题 22.1 (竞争与创新的倒 U 型关系). *在 (22.4)–(22.6) 下，若 $m \in [0, 1]$ 且 $a/b \in (0, 2)$，则内部区间中的研发强度 $x^*(m)$ 对竞争强度呈倒 U 型，并在*

$$m^* = \frac{a}{2b} \tag{22.8}$$

处达到最大值。

证明. 由 (22.7)，

$$x^*(m) = \frac{am - bm^2}{\psi}.$$

对 m 求导：

$$\frac{dx^*}{dm} = \frac{a - 2bm}{\psi}.$$

令导数为零，得到

$$m^* = \frac{a}{2b}.$$

二阶导数为

$$\frac{d^2x^*}{dm^2} = -\frac{2b}{\psi} < 0,$$

所以该点是最大值。条件 $a/b \in (0, 2)$ 保证 $m^* \in (0, 1)$。因此，研发强度随竞争先升后降。 □

这个模型非常简化，但它抓住了 Aghion 等文献的核心。竞争不是单调地好或坏，而要看行业状态。处在技术前沿附近、企业彼此接近的行业，竞争可能强烈刺激企业创新以逃离对手；但在利润已经很薄、模仿很快、产权保护不足的行业，过强竞争可能让研发回报不足。

表 22.2: 竞争强度与研发强度：倒 U 型例子

竞争强度 m	逃离竞争收益 m	租金侵蚀 m^2	研发强度 $x^* = (m - m^2)/10$
0.10	0.10	0.01	0.009
0.30	0.30	0.09	0.021
0.50	0.50	0.25	0.025
0.70	0.70	0.49	0.021
0.90	0.90	0.81	0.009

22.7　数值例子：为什么中等竞争最强

设 $a = 1$，$b = 1$，$\psi = 10$。由 (22.7)，

$$x^*(m) = \frac{m - m^2}{10}.$$

表 22.2 展示不同竞争强度下的创新激励。

这张表说明，中等竞争并不是折中主义口号，而是来自边际激励的平衡。竞争太弱时，企业没必要创新；竞争太强时，创新后也赚不到足够利润。中间区间，企业既有逃离竞争的压力，又有足够利润可得，因此创新最强。

22.8　专利保护：动态激励与静态扭曲

专利制度的基本功能，是把知识的部分排他性制度化。没有专利，许多创新很快被模仿，私人企业无法回收固定研发成本；专利保护使创新者获得一段时间的垄断利润，从而提高研发激励。

但专利也有成本。第一，专利带来垄断定价，降低当期使用量。第二，过宽或过长的专利会阻碍后续创新者组合已有知识。第三，专利可能诱导企业进行防御性申请、专利围墙和诉讼，而不是实质研发。第四，在累积创新行业，单个产品可能涉及大量专利，许可费堆叠会提高进入成本。

可以用一个简单公式表示专利长度的取舍。设专利保护强度为 T，创新激励收益为 $I(T)$，静态垄断损失和扩散阻碍为 $D(T)$。社会净收益为

$$W(T) = I(T) - D(T). \tag{22.9}$$

若 $I'(T) > 0$ 且递减，$D'(T) > 0$ 且递增，则最优专利强度满足

$$I'(T^*) = D'(T^*). \tag{22.10}$$

命题 22.2 (最优专利强度的边际条件). *若 $I'(T)>0$、$I''(T)<0$、$D'(T)>0$、$D''(T)>0$，且内部最优存在，则最优专利强度 T^* 满足 (22.10)。*

证明. 社会计划者最大化 $W(T)=I(T)-D(T)$。一阶条件为

$$W'(T)=I'(T)-D'(T)=0,$$

即 $I'(T^*)=D'(T^*)$。二阶条件为

$$W''(T)=I''(T)-D''(T)<0,$$

所以内部临界点为最大值。 □

这说明，专利政策不应被理解为“越强越保护创新”。真正的问题是：多一单位保护带来的创新激励，是否超过它造成的垄断损失和知识扩散阻碍。

22.9 专利竞赛与重复研发

创新常常不是一个企业独自研发，而是多个企业争夺同一个技术高地。设有 N 个企业同时投入研发，每个企业选择强度 x_i。行业总成功到来率为

$$X=\sum_{i=1}^{N}x_i. \tag{22.11}$$

如果成功者赢得价值 V 的专利，而企业 i 的成功概率份额为 x_i/X，则它的预期收益可以写成

$$\frac{x_i}{X}V-c(x_i). \tag{22.12}$$

这类专利竞赛有两个问题。第一，竞争可以加速创新，因为更多企业投入研发。第二，竞争也可能造成重复投入，因为多个企业在做相似项目，最终只有一个赢家。社会上看，失败者的投入未必完全浪费，因为它们可能产生知识溢出；但若研究方向高度重复、成果不公开、失败经验不能扩散，重复研发就会降低社会效率。

22.10 数据例子：高技术出口不是创新本身，但能提示产业升级

竞争和创新政策的直接结果很难用一个跨国指标衡量。专利数量不等于质量，研发支出不等于成果，TFP 又难以年度精确测量。这里使用一个较直观的结果变量：高技术出口占制造业出口比重。表 22.4 使用 World Bank WDI 指标 `TX.VAL.TECH.MF.ZS`。

这张表有三个教学含义。第一，中国和韩国在高技术出口占比上长期较高，说明它们深度进入电子、通信、装备和复杂制造链条。但这不等于所有核心技术都由本国原创，尤其在全球价值链中，出口地和知识产权所在地可能不同。

表 22.3: 创新政策工具的主要作用与风险

政策工具	主要作用	主要风险
专利保护	提高创新者可获得利润，增强研发激励	垄断定价、专利围墙、阻碍后续创新
研发补贴/税收抵免	降低私人研发成本，补偿知识外部性	低质量项目、寻租、重复研发
政府采购	为新技术创造早期市场和验证场景	保护特定企业、压低竞争、错配需求
反垄断	防止在位企业阻碍进入和收购潜在竞争者	若过度压低预期利润，可能削弱研发回报
开放标准/数据共享	降低扩散成本，促进组合创新	可能降低私人排他收益，需要配套激励

表 22.4: 高技术出口占制造业出口比重（%）

经济体	2010	2020	2023
中国	32.2	31.3	26.6
美国	22.6	19.5	21.8
韩国	32.1	35.6	30.3
日本	19.1	18.6	17.1
德国	16.9	15.5	17.8
印度	7.7	11.0	14.9

注：World Bank WDI 指标 `TX.VAL.TECH.MF.ZS`，High-technology exports (% of manufactured exports)。该指标衡量出口结构中的高技术产品占比，不等于本土创新能力；跨国比较会受到全球价值链、转口、加工贸易和产业分类影响。

第二，日本和德国高技术出口占比不一定最高，但它们在高端机械、汽车、材料、化工和工业设备中有深厚创新能力。这个事实提醒我们，单一“高技术出口占比”不能替代行业层面的质量、品牌、专利质量和生产率分析。

第三，印度高技术出口占比上升，说明产业结构在变化，但是否转化为持续创新增长，还要看研发体系、工程能力、企业竞争和市场制度。创新政策不能只追求指标上升，而要看这些指标是否对应真实质量阶梯提升。

22.11 中国与发展延伸：竞争政策和产业政策如何同时成立

中国创新政策的难点，是同时面对两种任务。第一，在若干前沿领域，需要支持长期研发、基础研究、工程平台和供应链能力。第二，在大量应用和制造领域，又需要足够竞争来筛选企业、淘汰低效率产能、避免补贴养出低质量项目。

因此，“产业政策”和“竞争政策”不应被看成简单对立。产业政策可以解决外部性、协调失败和前期市场不足；竞争政策可以防止支持变成保护落后。关键不是政府是否介入，而是介入是否提高有效创新的私人回报，同时保留进入退出和市场检验。

第一，研发补贴应当更靠近外部性强、私人回报不足的环节。例如基础研究、通用技术平台、关键材料、科学仪器和标准验证。这些环节的社会收益可能大于私人收益，单靠企业利润不足以支持。

第二，越接近商业化和成熟市场，政策越应该强调竞争和绩效约束。若一个行业已经有大量企业进入、产品路线清楚、市场需求明确，继续无差别补贴可能降低选择压力，使低效率企业存活。

第三，反垄断政策要区分“创新形成的暂时领先”和“阻止后续创新的排他行为”。前者可能是研发激励的一部分；后者会压制创造性破坏。平台经济、数字生态和标准必要专利都需要这种动态判断。

第四，专利政策要从数量导向转向质量导向。若地方考核和补贴鼓励专利申请数量，企业会生产大量低质量专利。若制度更重视引用、实施、国际专利族、标准贡献和生产率提升，专利更可能对应质量阶梯中的 γ。

第五，创新政策需要退出机制。没有退出，补贴和保护会积累成低效率产能；没有社会保险、再培训和金融重组，退出又会造成过高社会成本。真正的增长政策要同时设计进入、扩张、失败和退出。

22.12 常见误区

1. **以为竞争越强创新越多。**竞争可以产生逃离竞争效应，但过强竞争也会压低创新后利润。

2. **以为垄断越强创新越多。**垄断利润可以支持研发，但安稳垄断也可能降低创新压力。

3. **把专利保护当作无成本政策。**专利提高排他收益，也可能带来垄断定价、许可费堆叠和扩散阻碍。

4. **把研发补贴等同于创新政策。**补贴降低成本，但如果缺少绩效约束，可能导致低质量项目和寻租。

5. **用单一指标判断创新。**专利数量、高技术出口、研发强度都只是入口，需要结合质量和生产率。

6. **把反垄断理解成反大企业。**动态竞争政策关心的是企业是否阻碍进入、收购潜在竞争者或压制后续创新。

22.13　英文术语表

英文术语	中文解释
competition and innovation	竞争与创新；市场竞争结构如何影响企业研发激励。
inverted-U relationship	倒 U 型关系；竞争从低到中等提高创新，但过强竞争降低创新。
escape competition effect	逃离竞争效应；企业通过创新摆脱低利润竞争状态的激励。
Schumpeterian rent effect	熊彼特租金效应；创新后可获得利润越高，研发激励越强。
patent race	专利竞赛；多个企业争夺同一技术突破或专利。
research duplication	研发重复；多个主体投入相似研发方向导致资源重叠。
appropriability	可占有性；创新者能否获得其创新带来的私人收益。
antitrust policy	反垄断政策；限制阻碍竞争、排他行为和市场力量滥用的政策。
R&D subsidy	研发补贴；通过降低研发成本鼓励创新投入的政策。

high-technology exports	高技术出口；包含较高研发强度的产品出口。

22.14 本章 Review

如果我来 review 你对本章的理解，第一条标准是你是否能放弃“竞争越多创新越多”或“垄断越多创新越多”的单调直觉。竞争太弱，企业缺少逃离竞争的压力；竞争太强，创新后的利润被侵蚀，研发回报不足。

第二，我会检查你是否能解释倒 U 型机制。step-by-step innovation 中，neck-and-neck 行业竞争上升会强化逃离竞争效应，unleveled 行业中过强竞争会压低创新租金。简化式 $B(m) = am - bm^2$ 只是把这两种力量压缩成可计算表达。

第三，你应该能用边际权衡理解专利。更强专利保护提高创新者可占有收益，但也带来垄断定价、扩散阻碍和专利围墙；最优专利强度不是最大保护，而是让边际创新激励等于边际社会成本。

最后，我会看你是否能把产业政策和竞争政策放在同一个框架中。基础研究、通用技术和关键平台可能需要支持；接近商业化的领域则需要市场筛选、进入退出和反垄断约束。目标不是制造更多指标，而是提高有效质量跃升和长期生产率。

22.15 核心文献

文献	阅读用途
Aghion et al. (2001)	step-by-step innovation 的重要理论模型，解释竞争、模仿和增长之间的关系。[Aghion et al., 2001]
Aghion et al. (2005)	竞争与创新倒 U 型关系的经典理论和经验文献。[Aghion et al., 2005]
Aghion and Howitt (1992)	创造性破坏和质量阶梯模型的基础。[Aghion and Howitt, 1992]
Grossman and Helpman (1991)	质量阶梯、创新和贸易增长模型的重要系统处理。[Grossman and Helpman, 1991]
Aghion and Howitt (2009)	研究生层面理解竞争、专利、创新政策和 Schumpeterian 增长的主教材。[Aghion and Howitt, 2009]

第二十三章　技术扩散、采用与跨国追赶

23.1　本章导读

前几章主要站在技术前沿看增长：Romer 模型问知识如何被生产出来，Jones 模型问想法为什么越来越难找，Schumpeterian 模型问新技术如何替代旧技术，竞争与专利章节问怎样设计创新激励。但绝大多数国家的大部分增长，并不是每时每刻都在创造世界前沿技术，而是在吸收、采用、改造和扩散已经存在的技术。

这并不低级。技术扩散不是“抄作业”那么简单。采用一项技术通常需要互补条件：工程师、工人技能、管理流程、金融市场、基础设施、供应链、法律制度、市场规模、标准体系和组织能力。一个国家能不能用好前沿技术，取决于它离前沿有多远，也取决于它有没有足够吸收能力。

Nelson and Phelps (1966) 的经典思想是：人力资本不只是直接进入生产函数，还会提高一个经济体吸收前沿技术的能力。Benhabib and Spiegel (1994) 进一步把人力资本放进技术追赶方程，强调后发国家的增长既来自自身积累，也来自向前沿学习。Comin and Hobijn 的技术扩散数据则提醒我们，技术采用常常非常慢，不同国家采用同一技术的时间差可以长达几十年。

本章的任务是把“追赶”写成模型。我们先定义距离前沿；再建立 Nelson-Phelps 型吸收能力模型；然后加入技术采用成本，说明为什么有些技术明明存在却没有被采用；最后用相对美国人均 GDP 和互联网使用率数据说明，中国、印度、韩国、日本和德国面对的是不同类型的追赶问题。

这一章还会在第 34 章重新出现。这里强调技术从前沿向后发经济体扩散的吸收机制；第 34 章会进一步问贸易、FDI、全球价值链和跨国知识溢出如何改变扩散渠道。换句话说，本章讲“能不能学会”，第 34 章讲“通过什么国际通道学会”。

23.2　学习目标

学完本章，你应该能够：

1. 区分技术创新、技术扩散和技术采用。
2. 用距离前沿变量描述后发经济体的追赶空间。

3. 推导 Nelson-Phelps 型吸收能力模型中的收敛速度。

4. 理解人力资本为什么既影响生产水平，也影响技术吸收速度。

5. 分析采用成本、互补投入和制度摩擦如何阻碍技术扩散。

6. 用相对前沿收入和互联网使用率数据判断技术追赶的现实含义。

7. 将技术扩散框架用于理解中国技术引进、国产替代和前沿追赶。

23.3 核心问题

本章的核心问题是：

> 如果先进技术已经存在，为什么落后国家不能立刻采用并快速追上？追赶增长究竟受距离前沿限制，还是受吸收能力限制？

这个问题看似简单，实际很深。若后发经济体只要购买机器、引进外资或模仿制度就能追赶，那么全球收入差距应当迅速缩小。但现实中，一些经济体成功追赶，另一些长期停留在低收入或中等收入状态。这说明“可获得技术”和“可有效使用技术”之间存在巨大差异。

23.4 三个概念：创新、扩散与采用

为了避免混淆，先区分三个概念。

创新是创造新技术。它发生在技术前沿附近，对应 Romer、Jones 和 Schumpeterian 模型中的 $\dot{A}$、质量阶梯和研发部门。

扩散是技术从发明者、前沿国家或领先企业传播到其他国家、地区和企业。扩散可以通过贸易、外商直接投资、留学、移民、专利、供应链、设备进口、标准和人员流动发生。

采用是具体企业或家庭真正使用某项技术。采用不只是知道技术存在，还要支付固定成本、培训人员、调整组织、连接供应商、满足监管和形成市场需求。

一个简单例子是工业机器人。机器人技术可以在日本、德国或美国被创新出来；通过设备贸易和工程服务扩散到中国、韩国或印度；但一家具体工厂是否采用机器人，还取决于工资水平、产品稳定性、工程师能力、融资成本、生产线标准化程度和订单规模。

23.5 距离前沿

设世界技术前沿为 $A_F(t)$，国家 i 的技术水平为 $A_i(t)$。定义相对前沿技术水平

$$a_i(t)=\frac{A_i(t)}{A_F(t)}, \qquad 0<a_i(t)\le 1. \tag{23.1}$$

若 $a_i = 1$，国家处在前沿；若 $a_i = 0.2$，它的有效技术水平约为前沿的五分之一。距离前沿可以写成

$$d_i(t) = 1 - a_i(t). \tag{23.2}$$

距离越大，潜在追赶空间越大。但追赶空间不是自动增长。它只是说明可学习对象更多，并不说明学习能力足够。

在实证中，A_i/A_F 很难直接观察。教材里常用相对美国人均 GDP、相对美国每工人产出、PWT TFP 或行业生产率作为代理。它们都不完美：人均 GDP 包含资本、人力资本、资源和制度差异，不等于纯技术。但作为第一张地图，它能帮助我们判断一个经济体离前沿大致有多远。

23.6 Nelson-Phelps 型吸收能力模型

令前沿技术按外生速度增长：

$$\frac{\dot{A}_F}{A_F} = g_F. \tag{23.3}$$

国家 i 的技术增长由两部分组成。第一，它可以跟随世界前沿的一般进步；第二，如果它落后于前沿，可以通过吸收和采用实现额外追赶。写成

$$\frac{\dot{A}_i}{A_i} = g_F + \phi H_i \left(\frac{A_F}{A_i} - 1 \right), \qquad \phi > 0,\ H_i \geq 0. \tag{23.4}$$

其中 H_i 是吸收能力，可以理解为人力资本、工程能力、管理质量、制度质量和基础设施的综合指标。ϕ 是吸收效率参数。

这个方程的含义很直观。若 $A_i = A_F$，括号项为零，国家只能和前沿一起增长。若 $A_i < A_F$，括号项为正，国家可以额外追赶。若 H_i 高，同样的距离前沿会带来更快追赶；若 H_i 低，即使落后很多，也可能学不动。

命题 23.1 (吸收能力决定追赶速度). *在 (23.3)–(23.4) 下，相对前沿技术 $a_i = A_i/A_F$ 满足*

$$\dot{a}_i = \phi H_i (1 - a_i). \tag{23.5}$$

因此，若 $H_i > 0$ 且参数固定，$a_i(t)$ 以速度 ϕH_i 向 1 收敛。

证明. 由 $a_i = A_i/A_F$，

$$\frac{\dot{a}_i}{a_i} = \frac{\dot{A}_i}{A_i} - \frac{\dot{A}_F}{A_F}.$$

代入 (23.3) 和 (23.4)，

$$\frac{\dot{a}_i}{a_i} = \phi H_i \left(\frac{A_F}{A_i} - 1 \right) = \phi H_i \left(\frac{1}{a_i} - 1 \right).$$

两边乘以 a_i，得到

$$\dot{a}_i = \phi H_i (1 - a_i).$$

这是线性微分方程，其解为

$$1 - a_i(t) = [1 - a_i(0)]\, e^{-\phi H_i t}.$$

所以 H_i 越高，距离前沿收缩越快。 □

这个命题是本章的骨架。它说明后发优势不是“越穷越快”的机械规律，而是“越落后且越有吸收能力，越可能追赶”。如果 H_i 很低，距离前沿只是潜在机会，不会自动变成增长。

23.7 采用成本：为什么技术存在但没有被用起来

上面的模型把吸收能力放进追赶速度，但还没有解释微观采用决策。现在考虑一家企业是否采用新技术。旧技术生产率为 A_o，新技术生产率为 $A_n > A_o$。企业规模为 Y，采用新技术需要固定成本 F。若采用带来的收益为

$$\Delta\Pi = (A_n - A_o)Y - F, \tag{23.6}$$

企业采用当且仅当

$$(A_n - A_o)Y \geq F. \tag{23.7}$$

这个不等式解释了许多扩散缓慢现象。第一，市场规模小的企业或地区，即使知道新技术，也可能无法摊销固定成本。第二，若金融市场不发达，企业无法融资支付 F。第三，若工人技能不足，实际采用成本会上升。第四，若监管、标准、供应链和售后服务不完善，新技术无法稳定运行。

为了把吸收能力放入采用成本，设

$$F(H) = \frac{\bar{F}}{H}, \qquad H > 0. \tag{23.8}$$

吸收能力越高，有效采用成本越低。采用条件变为

$$H \geq \frac{\bar{F}}{(A_n - A_o)Y}. \tag{23.9}$$

这说明，人力资本、工程能力和组织能力不仅提高生产率，也降低采用先进技术的门槛。

23.8 机制总表：从机会到真实生产率

到这里，本章已经有两个方程。第一个是宏观追赶方程：

$$\dot{a}_i = \phi H_i (1 - a_i).$$

它说明距离前沿和吸收能力共同决定技术追赶速度。第二个是微观采用门槛：

$$H \geq \frac{\bar{F}}{(A_n - A_o)Y}.$$

它说明先进技术能否被企业使用，取决于采用收益、市场规模和有效固定成本。若只看第一个方程，容易把追赶理解成国家层面的自动过程；若只看第二个方程，又容易忽视宏观环境、教育和制度如何改变企业采用成本。表 23.1 把这两层放在一起。

表 23.1: 技术扩散与追赶的机制地图

机制环节	模型表达	可观察代理	常见误读
距离前沿	$1-a_i$ 或 A_F/A_i-1	相对美国人均 GDP、相对美国每工人产出、PWT TFP、行业生产率差距	把低收入本身当成高增长保证。距离前沿只是机会，不是能力。
吸收能力	H_i，进入 $\phi H_i(1-a_i)$	教育、工程师密度、管理能力、基础设施、金融深度、制度质量	把人力资本只当生产要素，忽略它还改变学习速度。
扩散渠道	ϕ 或开放经济中的 Ω_i	贸易、FDI、设备进口、留学、供应链、专利、人员流动	把开放等同于学习。没有吸收能力，开放可能只带来进口或装配。
采用收益	$(A_n - A_o)Y$	市场规模、工资水平、产品标准化程度、技术带来的成本下降或质量提升	只看技术先进性，忽视企业规模太小时固定成本无法摊销。
采用成本	$F(H) = \bar{F}/H$	培训成本、组织改造成本、融资成本、标准认证、售后服务和互补基础设施	把技术价格下降等同于采用成本下降。很多成本在设备之外。
生产率转化	A_i 或企业层面的 A_n 是否真正上升	TFP、质量、良品率、交货速度、能源效率、专利质量、出口单价	把使用率等同于生产率。采用一项技术不代表组织已经会用好它。

这张表可以作为读本章数据时的检查清单。例如，互联网使用率上升说明采用率

提高，但不能直接推出全要素生产率同步上升；相对美国人均 GDP 提高说明追赶发生，但不能区分是资本深化、人力资本、技术吸收还是配置改善；设备进口增加说明扩散渠道更宽，但若企业缺少工程师、维修体系和管理流程，先进设备可能只形成昂贵资本，而不是有效生产率。

放到中国经验中，这张表也能帮助我们避免两种极端叙述。一种极端是“只要开放和引进就能追赶”，它低估了 H_i 和 $F(H)$ 的重要性；另一种极端是“只要国产替代就能创新”，它低估了前沿距离、全球知识渠道和质量竞争的约束。真正的增长问题，是把扩散机会转化为企业和行业层面的有效生产率：既要接触前沿，也要有能力吸收；既要降低采用成本，也要让采用后的技术进入组织流程、产品质量和持续创新。

23.9 数值例子：距离前沿不等于追赶速度

设 $\phi = 0.10$。两个经济体都处在 $a(0) = 0.30$，即技术水平为前沿的 30%。经济体 A 的吸收能力 $H = 1$，经济体 B 的吸收能力 $H = 3$。由 (23.5)，一年后的相对技术水平变化为

$$\dot{a} = \phi H(1 - a).$$

表 23.2 展示差异。

表 23.2: 同样距离前沿，不同吸收能力

经济体	初始 a	吸收能力 H	当期追赶速度 $\dot{a} = 0.10H(1-a)$
A	0.30	1	0.070
B	0.30	3	0.210
C	0.70	1	0.030
D	0.70	3	0.090

同样落后时，吸收能力越高，追赶越快；同样吸收能力下，离前沿越远，追赶空间越大。但靠近前沿后，追赶空间自然缩小，增长越来越需要原创创新。这正是韩国、中国、日本和德国在不同阶段面对的问题差异。

23.10 数据一：相对美国人均 GDP 的距离

表 23.3 使用 World Bank WDI 的不变价人均 GDP，计算几个经济体相对美国的比例。这里把美国作为粗略前沿代理，不是说美国在所有技术上都是前沿，而是为了给距离前沿一个直观尺度。

表 23.3: 相对美国人均 GDP：距离前沿的一个粗略代理（美国 =100）

经济体	1990	2000	2010	2024
中国	2.4	4.6	11.0	19.8
印度	1.4	1.6	2.4	3.6
韩国	24.8	36.7	50.7	55.8
日本	72.9	65.0	62.7	56.0
德国	76.3	72.6	73.3	66.4

注：World Bank WDI 指标 `NY.GDP.PCAP.KD`，constant 2015 US dollars。表中数值为各经济体人均 GDP 占美国人均 GDP 的百分比。人均 GDP 不是纯技术指标，只是距离前沿的直观代理。

这张表有三层含义。第一，中国 1990 年相对美国只有约 2.4%，2024 年接近 20%，说明追赶非常显著，但距离前沿仍然很大。第二，韩国从 1990 年的约 25% 到 2024 年的约 56%，已经从低中收入追赶进入更接近前沿的创新阶段。第三，日本和德国长期处于较高相对收入，但相对美国比例并未持续上升，说明前沿附近的增长不再主要来自简单采用，而更依赖原创创新、制度效率和产业结构。

23.11　数据二：互联网作为技术采用代理

技术扩散最直观的现代例子之一是互联网。表 23.4 使用 World Bank WDI 的互联网使用率。互联网不是全部技术，但它具有典型扩散特征：发明在少数前沿地区，随后通过基础设施、设备、平台、教育和市场需求扩散到全球。

这张表说明，新技术扩散可以很快，也可以很不均衡。中国互联网使用率从 2000 年的约 1.8% 上升到 2023 年的约 90.6%，说明基础设施、设备价格、平台生态和用户能力共同推动了快速采用。印度也快速上升，但到 2023 年仍明显低于中国、韩国、美国和德国。这种差异不只是收入差异，也反映基础设施、教育、语言、监管、终端设备、支付体系和平台组织能力。

读这类采用率数据时还要避免过度解释单个年份。例如日本表中 2023 年低于 2020 年，这不应被直接理解为“互联网技术倒退”。互联网使用率来自调查和统计口径，可能受到样本、定义、人口结构和报告方法影响。增长教材使用它，是为了展示扩散的大方向和跨国差异，而不是把每个小幅波动都解释成深层机制。

表 23.4: 互联网使用率：技术采用速度的一个例子（% 人口）

经济体	2000	2010	2020	2023
中国	1.8	34.3	70.1	90.6
美国	43.1	71.7	90.3	93.5
韩国	44.7	83.7	96.5	97.4
日本	30.0	78.2	90.2	85.0
德国	30.2	82.0	89.8	92.5
印度	0.5	7.5	43.4	60.3

注：World Bank WDI 指标 `IT.NET.USER.ZS`。该指标衡量互联网使用率，不等于数字经济生产率；但它能直观显示通用数字技术的扩散速度和跨国采用差异。

23.12 中国与发展延伸：引进、吸收、国产替代与前沿追赶

中国增长经验可以用本章模型分成三个阶段理解。

第一阶段是引进和模仿。改革开放早期，中国离前沿非常远，潜在追赶空间巨大。外资、设备进口、出口加工、留学和技术许可带来大量可学习对象。此时，增长的关键不是原创世界前沿，而是能否把已有技术放进本土生产体系。基础教育、基础设施、地方竞争和制造业组织能力提高了 H。

第二阶段是吸收和改造。进入 WTO 之后，中国不只是进口设备，而是在供应链中学习质量控制、成本管理、工艺改进和快速迭代。许多技术并非简单复制，而是在本土市场规模、工程师红利和供应链密度中被改造。模型里，这相当于 ϕH 上升：同样的距离前沿能够带来更快追赶。

第三阶段是国产替代和前沿追赶。随着部分行业接近前沿，简单采用空间缩小，问题转向能否在关键环节推进质量阶梯。半导体设备、工业软件、航空发动机、原研药、基础材料和科学仪器都不是买来即可充分使用的技术。它们需要长期研发、产业试错、标准体系、人才培养和市场反馈。此时，中国既需要继续吸收全球知识，也需要提高原创创新能力。

这也说明，国产替代不能被理解为“把进口换成本国产品”这么简单。若替代只是低质量保护，可能降低生产率；若替代迫使企业掌握核心工艺、降低供应链风险并形成可扩散知识，它就可能提高 A_i 和 H_i。关键判断标准是：替代是否提高真实质量、可靠性、成本效率和后续创新能力。

23.13　常见误区

1. **把技术扩散理解成自动模仿。**技术存在不等于可用，采用需要互补投入和组织能力。
2. **把落后当作增长保证。**距离前沿提供追赶空间，但没有吸收能力就无法转化为增长。
3. **把人力资本只看成生产要素。** Nelson-Phelps 视角下，人力资本还提高技术吸收速度。
4. **用人均 GDP 完全代表技术。**相对收入只是前沿距离代理，包含资本、制度、资源和人口结构等因素。
5. **把采用率等同于生产率。**互联网、机器人或 AI 使用率高，不自动说明组织流程和生产率同步提高。
6. **把国产替代等同于创新。**真正重要的是替代是否形成质量提升、成本下降和可持续学习能力。

23.14　英文术语表

英文术语	中文解释
technology diffusion	技术扩散；技术从发明者或前沿地区传播到其他经济体和企业。
technology adoption	技术采用；企业或家庭实际使用某项技术。
distance to frontier	距离前沿；一个经济体相对世界技术前沿的差距。
absorptive capacity	吸收能力；学习、采用和改造外部技术的能力。
Nelson-Phelps model	Nelson-Phelps 模型；强调人力资本提高技术扩散和追赶速度。
catch-up growth	追赶增长；落后经济体通过采用前沿技术实现较快增长。
adoption cost	采用成本；引入新技术所需的固定成本、培训成本和组织调整成本。
complementary inputs	互补投入；使技术有效运行所需的技能、基础设施、管理和制度。

frontier technology	前沿技术；世界上当前最高水平或最先进的技术。
internet users	互联网使用率；衡量数字技术扩散的一种粗略指标。

23.15 本章 Review

如果我来 review 你对本章的理解，第一条标准是你是否能把“落后优势”说得足够精确。距离前沿提供追赶空间，但只有在吸收能力足够、扩散渠道畅通、采用成本可承受时，这个空间才会变成真实增长。

第二，我会检查你是否能解释 Nelson–Phelps 方程：

$$\dot{a}_i = \phi H_i(1 - a_i).$$

其中 $1 - a_i$ 是距离前沿，H_i 是吸收能力。落后本身不是优势；“有能力学习的落后”才是优势。

第三，你应该能把扩散放到企业采用条件里。企业采用新技术不是因为技术存在，而是因为预期收益足以覆盖固定成本；教育、基础设施、金融、管理、标准和供应链会改变收益、成本和采用后的生产率转化。

第四，我会看你是否能使用表 23.1 做机制检查。读任何技术扩散事实时，都要问：距离前沿有多大，吸收能力是否足够，扩散渠道是否畅通，采用收益是否覆盖固定成本，采用成本是否真的下降，采用后是否转化为生产率。

最后，对中国和发展经济体，合格理解不能只看相对美国人均 GDP 或互联网使用率上升。这些事实说明追赶和扩散发生过，但真正重要的是采用是否转化为质量提升、组织能力、产业升级和持续创新能力。

23.16 核心文献

文献	阅读用途
Nelson and Phelps (1966)	技术扩散和人力资本吸收能力的经典起点。[Nelson and Phelps, 1966]
Benhabib and Spiegel (1994)	将人力资本、技术吸收和跨国增长经验联系起来。[Benhabib and Spiegel, 1994]

Comin and Hobijn (2004)	用跨国历史技术采用数据检验技术扩散理论。[Comin and Hobijn, 2004]
Comin and Hobijn (2010)	系统估计多项技术在多国的扩散路径，强调采用滞后和收入差异。[Comin and Hobijn, 2010]
Acemoglu (2009)	提供技术扩散、内生技术和增长理论的更一般处理。[Acemoglu, 2009]

第二十四章　通用技术、AI 与长期增长

24.1　本章导读

前面三章讨论了创新、竞争和技术扩散。第 21 章说明前沿创新如何通过质量阶梯推动长期增长；第 22 章说明创新激励依赖竞争、专利和政策设计；第 23 章说明后发经济体为什么需要吸收能力才能把已有技术转化为追赶增长。本章把这些线索合在一起，讨论一种更特殊也更重要的技术：**通用技术**（general purpose technology, GPT）。

通用技术不是某个单一行业的工具，而是一组可以改造许多行业、引发互补创新、并长期持续改进的基础技术。蒸汽机、电力、内燃机、半导体、计算机和互联网都常被看作通用技术。人工智能，尤其是生成式 AI 和大模型，是否已经成为新的 GPT，是当代增长经济学最重要也最容易被夸大的问题之一。

本章的出发点很克制：AI 有 GPT 的潜力，但 GPT 潜力不等于已经实现长期增长。增长效果取决于三个层次。第一，技术本身是否持续改进。第二，企业、政府和家庭是否完成互补投资，例如数据、软件、组织流程、技能、算力和制度。第三，AI 是主要替代劳动任务，还是创造新任务、提高劳动能力并扩大高质量产品空间。

这种思路来自通用技术文献和任务模型文献。Helpman and Trajtenberg 强调，新 GPT 到来后常有“播种期”和“收获期”：早期需要大量互补投资，生产率未必马上上升；互补投入成熟后，增长才会显著加速。Brynjolfsson, Rock, and Syverson 将这一点称为 productivity J-curve：如果无形投资没有被完全计入产出，官方生产率会先显得疲弱，随后才体现收益。Acemoglu and Restrepo 的任务框架则提醒我们，AI 对增长和分配的影响不能只看“技术进步”四个字，而要看它改变了哪些任务由人做、哪些任务由机器做、又创造了哪些新任务。

本章的目标不是预测 AI 未来会怎样。严肃的增长教材不应把新闻标题写成定理。我们要做的是建立一套判断框架：当你看到“AI 将带来生产率爆发”“AI 将造成大规模失业”“AI 投资规模巨大”“中国或美国在 AI 中领先”等说法时，能够问出更好的问题：互补资本在哪里？任务边界如何变化？生产率为何可能滞后？私人投资和社会收益是否一致？AI 对中国增长更像前沿创新、扩散采用，还是产业组织重构？

24.2　学习目标

学完本章，你应该能够：

1. 解释通用技术的三个特征：广泛适用、持续改进、引发互补创新。
2. 理解为什么 GPT 可能带来生产率滞后，而不是一出现就提高可观测 TFP。
3. 用一个互补无形资本模型推导 productivity J-curve 的基本机制。
4. 区分 AI 作为通用技术、自动化技术和任务增强技术的不同增长含义。
5. 掌握 Acemoglu-Restrepo 式任务框架的核心：替代效应、新任务效应和生产率效应。
6. 用任务份额模型分析自动化如何影响劳动收入份额，以及新任务如何抵消替代效应。
7. 阅读 AI 投资和 ICT 服务出口数据时，避免把投入、采用和生产率混为一谈。
8. 将 AI 与中国增长联系起来，分析算力、数据、人才、制造业场景、组织改造和制度约束如何共同决定长期效果。

24.3　核心问题

本章的核心问题是：

> AI 这样的通用技术如何进入长期增长模型？为什么它既可能提高总生产率，也可能在一段时期内造成生产率滞后、劳动份额下降和分配冲突？

这个问题不能用一个简单的“乐观”或“悲观”回答。若 AI 只是让少数企业节省一些文案、客服或代码成本，它对宏观增长的影响可能有限。若 AI 能够成为许多行业的推理、设计、搜索、控制和组织基础设施，并与机器人、软件、科学发现、制造流程和教育训练结合，它可能显著提高长期生产率。若 AI 主要替代已有劳动任务，却没有创造足够新任务和新产业，产出可能上升，但劳动收入份额和某些群体工资可能下降。

因此，AI 增长问题本质上是一个**技术、组织和分配同时决定**的问题。技术本身只是第一步；真正的增长来自技术被嵌入生产系统之后的互补改变。

24.4　什么是通用技术

通用技术通常具有三个特征。

第一，广泛适用。普通技术往往服务于一个相对窄的用途，例如某种特定机床、药物或生产线软件。通用技术则能进入许多部门。电力可以用于照明、动力、通信和化

工；计算机可以用于会计、工程设计、物流、金融、教育和科研；AI 可以用于文本、代码、图像、客服、搜索、诊断、预测、控制和科学建模。

第二，持续改进。 GPT 不是一次性发明，而是一条技术轨道。电力系统经历发电、输电、电机、家电和工厂改造；半导体经历制程、架构、设计工具和应用生态；AI 也可能经历模型结构、数据、算力、推理成本、工具调用、多模态和行业微调的连续改进。

第三，引发互补创新。 GPT 的真正力量来自互补品。电力需要工厂布局重组，计算机需要软件、数据库和管理流程，互联网需要平台、支付、物流和监管。AI 需要数据治理、算力基础设施、工作流程重写、行业知识编码、评价体系、安全制度和人力资本升级。

这三个特征解释了一个重要事实：GPT 的经济效果通常慢于技术演示。一个模型能在考试中表现很好，不等于医院、法院、学校、银行和制造企业马上能提高生产率。现实组织需要把技术变成稳定、可审计、可维护、可负责的流程。

24.5 一个 GPT 互补资本模型

设经济中有传统生产资本 K、劳动 L 和一项新通用技术。新技术本身的潜在能力用 G 表示，但它只有在互补无形资本 $q(t) \in [0,1]$ 积累后才能转化为生产率。这里的 q 可以理解为组织流程、软件系统、数据资产、员工技能、行业标准和监管适配的综合状态。

令潜在生产率为

$$A(q) = A_0(1+\theta q), \qquad \theta > 0. \tag{24.1}$$

若 $q=0$，新技术还没有真正嵌入生产；若 $q=1$，互补改造基本完成。互补资本按如下方程积累：

$$\dot{q} = s(1-q), \qquad s > 0. \tag{24.2}$$

参数 s 衡量组织学习和互补投资速度。为了突出生产率滞后，设可观测净产出为

$$Y^m(t) = A_0(1+\theta q(t))K^{\alpha}L^{1-\alpha} - \chi \dot{q}(t) K^{\alpha}L^{1-\alpha}, \qquad \chi > 0. \tag{24.3}$$

第二项表示互补改造的当期资源成本。企业培训员工、重写软件、调整流程、清洗数据、建立安全审计和迁移系统，都会占用资源。若这些投入没有被充分计入投资，而是表现为当期成本，可观测生产率会被压低。

定义可观测 TFP 为

$$A^m(t) = \frac{Y^m(t)}{K^{\alpha}L^{1-\alpha}} = A_0(1+\theta q(t)) - \chi \dot{q}(t). \tag{24.4}$$

命题 24.1 (GPT 的生产率 J 曲线)**.** *在 (24.2)–(24.4) 下，若 $q(0)=0$，则*

$$A^m(0) = A_0 - \chi s. \tag{24.5}$$

因此，只要 $\chi s > 0$，新 *GPT* 引入初期的可观测 *TFP* 低于没有改造成本时的基准 A_0。随着 $q(t)$ 上升且 $\dot{q}(t)$ 下降，长期可观测 *TFP* 收敛到

$$\lim_{t\to\infty} A^m(t) = A_0(1+\theta). \tag{24.6}$$

证明. 由 $q(0) = 0$ 和 (24.2)，

$$\dot{q}(0) = s.$$

代入 (24.4) 得

$$A^m(0) = A_0(1 + \theta \cdot 0) - \chi s = A_0 - \chi s.$$

这说明在互补改造刚开始时，可观测 TFP 会被改造成本压低。

再看长期。方程 (24.2) 的解为

$$q(t) = 1 - e^{-st}.$$

因此 $q(t) \to 1$ 且 $\dot{q}(t) = se^{-st} \to 0$。代入 (24.4)，

$$\lim_{t\to\infty} A^m(t) = A_0(1+\theta) - 0 = A_0(1+\theta).$$

所以 GPT 可以先表现为生产率疲弱，后表现为生产率上升。 □

这个命题的学习价值很高。它告诉我们，不能只看一两年的生产率数据就断言 AI 没有效果，也不能只看技术演示就断言宏观增长马上爆发。关键变量是 q：互补无形资本是否真的积累起来。

24.6 数值例子：为什么先进技术可能先拖慢统计生产率

设 $A_0 = 100$、$\theta = 0.30$、$s = 0.25$、$\chi = 40$。则

$$q(t) = 1 - e^{-0.25t}, \qquad A^m(t) = 100(1 + 0.30q(t)) - 40 \cdot 0.25(1 - q(t)).$$

表 24.1 给出几个年份的数值。

这个例子故意设得很简单，但它抓住了 GPT 的核心时序。第 0 年，企业刚开始改造流程，成本很高，收益还没有显现，可观测 TFP 低于基准。第 2 年以后，互补资本逐步积累，改造成本下降，生产率开始上升。第 10 年以后，互补体系基本成形，GPT 的长期收益才比较充分地反映在数据中。

把这个例子放到 AI 上，可以这样理解。企业购买大模型 API、GPU、知识库系统或自动化软件，只是开始。真正昂贵的是把原来的岗位、审批、数据权限、质量控制、客户交互和责任边界重新设计。如果这些组织改造没有完成，AI 使用率很高也可能不带来高生产率。反过来，一旦互补投资完成，同样的模型能力可能突然在很多流程中变得有价值。

表 24.1: GPT 互补投资与可观测生产率：一个 J 曲线例子

年份 t	互补资本 $q(t)$	改造成本项 $\chi\dot{q}(t)$	可观测 TFP $A^m(t)$
0	0.000	10.0	90.0
2	0.393	6.1	105.7
5	0.713	2.9	118.5
10	0.918	0.8	126.7
20	0.993	0.1	129.8

24.7 AI 是 GPT，还是普通自动化

AI 可能同时扮演三种角色。

第一，AI 作为通用技术。如果 AI 成为许多行业的通用认知基础设施，能够持续改进并引发互补创新，那么它接近 GPT。此时重点不是某个聊天工具节省多少时间，而是 AI 是否改变研发、教育、医疗、制造、金融、法律、软件工程和公共管理的生产函数。

第二，AI 作为自动化技术。如果 AI 主要把原来由人完成的任务交给机器完成，例如文本分类、客服回复、初级代码生成、图像标注、行政处理，那么它更像自动化。自动化可以提高产出，但也可能降低某些劳动任务的需求。

第三，AI 作为劳动增强技术。如果 AI 帮助劳动者完成更复杂的任务，提高学习速度、决策质量和跨领域能力，它就是增强技术。例如医生使用 AI 辅助影像判断，工程师使用 AI 生成测试代码，教师使用 AI 生成个性化练习，研究人员使用 AI 搜索文献和构造模型。

这三种角色没有互斥。一个行业中，AI 可能替代低复杂度任务，同时增强高复杂度劳动，并迫使企业重组组织流程。增长分析的关键，是判断哪种效应占主导。

24.8 任务模型：自动化为什么不只是提高 A

传统增长模型常把技术进步写成 $Y = AF(K, L)$，于是技术进步似乎只是提高 A。但 AI 和自动化更自然的描述是：生产由许多任务组成，有些任务由劳动完成，有些任务由资本或算法完成。

设最终产出由连续任务 $i \in [0, 1]$ 组成，任务之间采用 Cobb-Douglas 型聚合：

$$Y = B \exp\left(\int_0^1 \ln y(i)\, di\right), \tag{24.7}$$

其中 B 是整体生产率。设区间 $[0, m]$ 的任务已经自动化，由资本或算法完成；区间 $(m, 1]$ 的任务由劳动完成。$m \in [0, 1]$ 可以理解为自动化任务份额。

为了得到一个清楚的基准结论，先做三个规范化假设。第一，每个任务在聚合函数中的权重相同，所以任务集合的测度就是其成本权重。第二，劳动完成的任务和算法完成的任务都在竞争性市场中定价，没有垄断加价和租金分配问题。第三，自动化只改变任务由谁完成，暂时不引入不同任务之间的效率差异。更一般的 Acemoglu-Restrepo 任务模型会允许任务效率、工资、资本成本和新任务边界同时变化；这里先保留最小结构，让替代效应一眼可见。

在这种 Cobb-Douglas 任务结构和规范化假设下，每一小段任务在成本中的份额等于它的测度。因此，自动化任务的收入份额为 m，劳动任务的收入份额为 $1-m$。这不是说劳动者收入一定按同样比例下降，因为总产出、产品价格、工资调整和新任务都会变化；但它说明，自动化会直接改变生产中的任务内容。

命题 24.2 (等权任务结构下自动化降低劳动任务份额). *在 (24.7) 的任务聚合结构下，若 m 份任务由资本或算法完成，其余 $1-m$ 份任务由劳动完成，则在竞争性成本最小化下，劳动成本份额为*

$$s_L = 1 - m. \tag{24.8}$$

因此，在等权任务、竞争性定价和无效率差异的基准下，若没有新任务创造或其他补偿机制，自动化任务份额 m 上升会降低劳动收入份额。

证明. Cobb-Douglas 聚合的一个性质是，生产要素或任务组的成本份额等于其指数份额。由于劳动完成的任务集合测度为 $1-m$，资本或算法完成的任务集合测度为 m，成本最小化下劳动任务组获得总成本的 $1-m$，资本或算法任务组获得总成本的 m。在竞争性市场中，总成本等于总收入，因此劳动收入份额为 $1-m$。 □

这个命题解释了为什么 Acemoglu-Restrepo 文献强调 task displacement。自动化不是抽象地“让技术更先进”，而是把任务从劳动集合移到资本或算法集合。若这种移动没有伴随新任务和新需求，劳动份额可能下降。

这个基准结论也告诉我们它自己的边界。若自动化显著降低某些任务成本，总产出可能扩大，劳动者在未自动化任务上的需求可能上升；若 AI 增强劳动而不是替代劳动，劳动边际产出可能提高；若平台或模型所有者获得垄断租金，收入分配还会受到市场结构影响。因此，$s_L = 1-m$ 不是现实预测公式，而是一个干净的替代效应基准。真正的经验问题，是替代效应、新任务效应、生产率效应和市场势力效应哪一个更强。

24.9 新任务如何抵消替代效应

历史上，技术不只是替代旧任务，也会创造新任务。电力和内燃机减少了许多体力任务，但创造了电气工程、汽车维修、交通管理、现代制造和服务业岗位。计算机替代了部分文书和计算工作，也创造了软件开发、数据库管理、网络安全、数字营销和平台运营等任务。

在上面的模型中，设自动化旧任务份额为 m，同时创造出测度为 $n \geq 0$ 的新劳动任务。任务总测度从 1 变为 $1+n$。劳动完成的任务测度为 $(1-m)+n$，因此劳动任务份额为

$$s_L(n,m) = \frac{1-m+n}{1+n}. \tag{24.9}$$

命题 24.3 (新任务提高劳动份额). *给定自动化份额 $m > 0$，劳动任务份额 $s_L(n,m)$ 随新任务测度 n 上升：*

$$\frac{\partial s_L}{\partial n} = \frac{m}{(1+n)^2} > 0. \tag{24.10}$$

证明. 对 (24.9) 关于 n 求导：

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1-m+n}{1+n}\right) = \frac{(1+n)-(1-m+n)}{(1+n)^2} = \frac{m}{(1+n)^2} > 0.$$

所以，只要存在自动化旧任务，新任务创造都会提高劳动任务份额。 □

这个结果非常重要。它说明 AI 对劳动的长期影响取决于两场比赛：机器替代旧任务的速度，以及经济创造新的人类任务的速度。如果 AI 只是自动化，m 上升；如果 AI 还创造新的行业、服务、研究活动和人机协作任务，n 上升。增长政策真正关心的，不是简单阻止 m，而是提高 n 的创造能力，并帮助劳动者从旧任务转向新任务。

24.10 数值例子：自动化、新任务和劳动份额

表 24.2 展示自动化和新任务的相互作用。若没有新任务，自动化份额从 0.2 上升到 0.6，劳动任务份额从 0.8 降到 0.4。若同时出现 $n = 0.4$ 的新劳动任务，劳动任务份额会明显回升。

表 24.2: 自动化与新任务创造对劳动任务份额的影响

自动化份额 m	新任务 $n=0$	新任务 $n=0.2$	新任务 $n=0.4$
0.20	0.800	0.833	0.857
0.40	0.600	0.667	0.714
0.60	0.400	0.500	0.571
0.80	0.200	0.333	0.429

这个表也解释了为什么同一项技术可能在不同国家产生不同分配后果。如果一个经济体教育体系强、创业活跃、服务业开放、劳动力流动顺畅，新任务 n 可能增长较快，自动化的替代压力更容易被吸收。如果一个经济体技能转换慢、行业进入受限、劳动市场僵化，m 上升而 n 不足，就更容易出现工资压力和不平等上升。

24.11　数据一：AI 私人投资的集中度

AI 作为 GPT 的一个现实特征，是前沿投资高度集中。表 24.3 使用 Stanford HAI *AI Index Report 2026* 的数据，列出 2025 年若干经济体的 AI 私人投资。这里的私人投资包括对 AI 企业的风险投资、私募、并购等市场化投资，不等于一个国家全部 AI 投入，尤其不能完全反映政府基金、公共采购、大学和国有部门投入。

表 24.3: 2025 年 AI 私人投资：若干经济体比较

经济体	AI 私人投资（十亿美元）	相对美国（美国 =100）
美国	285.88	100.0
中国	12.41	4.3
英国	5.90	2.1
法国	4.36	1.5
印度	4.09	1.4
德国	3.89	1.4
韩国	1.78	0.6
日本	1.11	0.4

注：数据来自 Stanford HAI *AI Index Report 2026*，原始来源为 Quid。表中相对美国比例由本书计算。私人投资不等于全部 AI 支出；跨国比较会受资本市场结构、政府资金、并购统计口径和企业披露差异影响。

这张表不能被读成“美国增长率一定更高”。它说明的是 AI 前沿投资和企业融资生态高度集中。美国的私人投资规模远高于其他经济体，意味着它在基础模型、算力基础设施、创业生态和资本市场方面具有显著优势。中国的私人投资统计远低于美国，但这不等于中国 AI 能力相同比例地落后，因为中国的政府引导基金、平台企业内部投入、制造业应用场景和工程扩散能力未必被同一口径捕捉。

增长理论要求我们把这张表翻译成模型语言：私人投资主要影响前沿创新强度、算力资本和应用生态，但它只有通过互补资本 q、任务重组 m 和新任务创造 n，才会转化为长期生产率。

24.12　数据二：ICT 服务出口与数字能力

AI 的长期增长效果还取决于数字服务能力。表 24.4 使用 World Bank WDI 的 ICT 服务出口占服务出口比重。该指标不是 AI 指标，但它能提示一个经济体在软件、通信、

信息服务和数字化可贸易服务中的结构位置。

表 24.4: ICT 服务出口占服务出口比重（%）

经济体	2005	2015	2023	2024
中国	3.0	11.3	17.6	16.9
美国	4.1	5.4	7.5	7.9
韩国	0.6	3.6	11.9	11.6
日本	1.5	2.0	5.6	4.8
德国	6.8	7.9	11.0	11.5
印度	43.4	48.9	48.2	47.4

注：World Bank WDI 指标 `BX.GSR.CCIS.ZS`，ICT service exports (% of service exports, BoP)，数据库更新日期为 2026-04-08。该指标衡量 ICT 服务在服务出口中的比重，不等于 AI 生产率，也不衡量国内数字化采用。

这张表的解释要非常小心。印度数值很高，反映其服务出口中软件和 IT 服务占比很大；这说明印度在全球数字服务分工中有明显位置，但不等于印度整体经济已经高度 AI 化。中国从 2005 年到 2024 年显著上升，说明数字服务能力增强，但中国更大的优势仍可能在制造业应用、平台生态和工程化落地。美国数值不高，并不说明美国 ICT 能力弱，因为美国服务出口结构更分散，而且大量 AI 能力通过平台、云服务、知识产权和跨国企业内部活动体现，不一定全部进入该指标。

把表 24.3 和表 24.4 放在一起，可以得到一个更成熟的判断：AI 增长能力不是单一排行榜。前沿模型投资、数字服务出口、制造业场景、人才、数据治理和组织改造分别对应不同机制。

24.13 中国与发展延伸：AI 增长不是只比大模型

对中国而言，AI 与长期增长至少有四个层次。

第一，**前沿模型和算力层**。这一层接近 Romer、Jones 和 Schumpeterian 模型中的前沿创新。它需要高端芯片、数据中心、算法研究、模型训练、工程系统和资本投入。若一个国家在这一层受约束，前沿技术步长 γ 和创新到达率可能受到影响。

第二，**行业采用层**。AI 即使不是本国原创，也可以通过扩散和采用提高生产率。这对应第 23 章的技术扩散模型。制造业质检、供应链预测、工业设计、设备维护、金融风控、医疗影像、教育练习和政务服务都可能成为 AI 采用场景。这里的关键不是模型参数量，而是企业是否有数据、流程、人才和激励去完成互补改造。

第三，**任务重组层**。中国拥有庞大的制造业和服务业就业群体。AI 若主要替代行政、客服、初级编程、基础设计和重复分析任务，就会提高 m；若同时创造算法运维、数据治理、行业模型训练、人机协作设计、AI 安全审计、智能制造集成等新任务，就会提高 n。教育、职业培训和劳动力流动决定劳动者能否从被替代任务转向新任务。

第四，**制度和竞争层**。AI 具有规模经济、数据网络效应和平台效应，容易形成集中。若竞争不足，领先企业可能把 AI 优势转化为进入壁垒；若监管过度僵硬，又可能压制创新和扩散。好的政策需要同时考虑数据安全、隐私保护、开放接口、反垄断、公共部门采购、基础研究和劳动者再培训。

因此，中国 AI 增长的核心不是一句“追赶美国”能够概括的。更准确的问题是：哪些环节需要前沿突破，哪些环节可以通过扩散采用获得收益，哪些行业具备互补资本，哪些劳动者会被任务替代，哪些制度能让新任务和新企业出现。只有这些机制同时运转，AI 才会从技术潜力变成长期增长。

24.14 常见误区

1. **把 AI 演示能力等同于宏观生产率**。模型能完成任务，不代表企业已经完成组织改造，也不代表统计生产率马上上升。
2. **把 AI 投资等同于增长**。投资是输入，不是产出。若互补资本不足，投资可能变成过度建设、重复训练或低效应用。
3. **把自动化等同于社会福利提高**。自动化可提高产出，但若主要替代劳动任务且新任务不足，分配冲突会加剧。
4. **把劳动影响理解为“工作消失或不消失”的二分法**。更精确的问题是任务内容如何变化、哪些技能升值、哪些岗位重组。
5. **把中国 AI 问题简化为模型排名**。前沿模型重要，但制造业场景、工程化扩散、数据治理和组织能力同样决定增长效果。
6. **忽视生产率 J 曲线**。GPT 常常先需要无形投资，短期统计数据可能低估长期潜力。

24.15 英文术语表

英文术语	中文解释
general purpose technology	通用技术；可在多个行业广泛应用、持续改进并引发互补创新的基础技术。

GPT	在增长经济学中指 general purpose technology；在 AI 语境中也可能指 generative pre-trained transformer，需要根据上下文区分。
complementary investment	互补投资；为发挥新技术作用所需的软件、数据、流程、组织、人力资本和制度投入。
intangible capital	无形资本；不以机器厂房形式存在，但能提高生产率的知识、软件、组织流程、品牌和数据资产。
productivity J-curve	生产率 J 曲线；新 GPT 初期因互补投资成本和统计遗漏导致生产率低迷，之后收益逐步显现的路径。
automation	自动化；机器、算法或资本替代原本由劳动完成的任务。
task content of production	生产的任务内容；生产过程中哪些任务由劳动完成，哪些任务由资本或算法完成。
displacement effect	替代效应；自动化把任务从劳动转向资本或算法，降低劳动任务需求。
reinstatement effect	新任务效应；技术创造新的劳动任务，使劳动重新进入生产过程。
AI adoption	AI 采用；企业、政府或家庭实际把 AI 放入工作流程和决策流程。
AI private investment	AI 私人投资；市场化资本对 AI 企业和项目的投资，不等于全部 AI 支出。
ICT service exports	ICT 服务出口；信息、通信、计算机和相关数字服务出口。

24.16 本章 Review

如果我来 review 你对本章的理解，第一条标准是你是否能把 AI 当作通用技术来分析，而不是当作新闻冲击。通用技术的核心是广泛适用、持续改进和互补创新；AI 的增长效果取决于互补无形资本 q 是否积累起来。

第二，我会检查你是否能解释 productivity J-curve。技术引入初期，培训、流程重写、数据治理和系统迁移可能压低可观测生产率；当互补资本积累完成后，生产率才会显著上升。因此，短期生产率数据不能直接否定通用技术的长期影响。

第三，你应该能用任务模型分析工资和分配。AI 不只是提高总生产率 A，还会改变自动化任务、新任务和劳动任务之间的边界；增长、工资和劳动份额取决于替代效应、新任务效应、生产率效应和市场势力效应的相对大小。

最后，我会看你是否能谨慎使用数据。AI 私人投资、ICT 服务出口和专利都不是 AI 生产率效应本身；对中国而言，关键问题是前沿模型、行业采用、制造业场景、组织能力、数据治理和制度设计能否共同把 AI 转化为长期生产率。

24.17　核心文献

文献	阅读用途
Bresnahan and Trajtenberg (1995)	通用技术概念的经典文献，强调 GPT 的广泛适用、持续改进和创新互补性。[Bresnahan and Trajtenberg, 1995]
Helpman and Trajtenberg (1998)	提出 GPT 增长中的“播种期”和“收获期”，适合理解生产率滞后。[Helpman and Trajtenberg, 1998]
Brynjolfsson, Rock, and Syverson (2021)	productivity J-curve 的核心文献，解释 AI 和无形资本如何导致短期统计生产率低估。[Brynjolfsson et al., 2021]
Acemoglu and Restrepo (2018)	用任务框架分析机器、劳动、增长、收入份额和就业之间的关系。[Acemoglu and Restrepo, 2018]
Acemoglu and Restrepo (2019)	系统解释自动化的替代效应和新任务效应，是理解 AI 劳动影响的关键入口。[Acemoglu and Restrepo, 2019]
Stanford HAI (2026)	提供 AI 投资、采用、技术表现和政策风险的年度数据，适合做事实背景而非理论替代品。[Stanford HAI, 2026]

第六部分 Review：创新、扩散与通用技术

第六部分把内生增长理论从“知识如何被生产出来”推进到“技术如何替代、扩散、被政策塑造，并最终改变生产组织”。第 17–20 章已经说明，长期增长不能只靠资本积累，必须解释知识、研发和想法生产。第 21–24 章则进一步追问：知识进入经济以后，到底通过什么机制提高生产率？

这一部分的主线可以写成四个动词：**替代、激励、吸收、重组**。第 21 章讲替代：新质量台阶替代旧质量台阶，创造性破坏推动技术前沿上移。第 22 章讲激励：企业是否研发，取决于竞争、专利、利润、进入退出和政策设计。第 23 章讲吸收：后发经济体能否把已有技术转化为增长，取决于距离前沿和吸收能力。第 24 章讲重组：通用技术和 AI 的增长效果不只来自技术本身，还来自互补无形资本、任务边界和组织流程的重写。

一张机制地图

可以把四章的核心方程放在同一张地图上。

第 21 章的质量阶梯模型给出

$$g_A = X^* \log \gamma.$$

长期增长取决于两件事：有效创新到来率 X^* 和质量步长 γ。这解释为什么“专利更多”不一定等于“增长更快”：如果创新步长很小，或者创新没有带来真实质量提升，增长效果有限。

第 22 章的竞争创新框架说明，X^* 不是外生的。竞争太弱时，企业缺少逃离竞争的压力；竞争太强时，创新后的租金被侵蚀。step-by-step innovation 的二状态直觉进一步说明，neck-and-neck 行业和 unleveled 行业对竞争的反应不同。简化模型

$$x^*(m) = \frac{am - bm^2}{\psi}$$

把这些力量压缩成倒 U 型关系。

第 23 章的扩散模型说明，不在前沿的经济体可以通过吸收已有技术追赶：

$$\dot{a}_i = \phi H_i (1 - a_i).$$

距离前沿 $1-a_i$ 提供追赶空间，吸收能力 H_i 决定能否把空间变成增长。后发优势不是“落后自动增长”，而是“有能力学习的落后”。

第 24 章的 GPT 和任务模型把视角从技术水平转向组织和任务。生产率 J 曲线告诉我们，互补无形资本 q 没有完成时，新技术可能先表现为统计生产率低迷；任务模型告诉我们，AI 自动化会改变劳动任务份额，而新任务创造可以部分抵消替代压力。

学习逻辑是否连贯

这四章的顺序是合乎学习逻辑的。先学质量阶梯，是因为它给出前沿创新的最小增长公式：创新频率乘以质量步长。再学竞争和专利，是因为创新频率不是自然给定，而由利润、竞争和制度决定。然后学技术扩散，是因为绝大多数国家的大多数增长并非发生在技术前沿，而是来自采用和改造已有技术。最后学 GPT 和 AI，是因为通用技术同时包含前沿创新、扩散采用、互补投资和任务重组，正好把前三章机制合在一起。

这条线也避免了一个常见误区：把技术进步写成外生的 A 以后就停止思考。第六部分要求你继续追问 A 的内部结构。它可能是质量阶梯的跃升，可能是竞争制度激励出来的研发，可能是后发经济体对前沿技术的吸收，也可能是通用技术对组织流程和任务结构的重塑。

中国与发展经济学的统一读法

对中国增长而言，第六部分提供了一套比“创新强不强”更精细的语言。

第一，若讨论新能源汽车、通信设备、工业机器人或半导体设备，就要问质量阶梯中的 γ 是否真的提高，还是只是产能扩张和专利数量上升。第二，若讨论补贴、反垄断、平台监管和专利制度，就要问政策是在提高有效创新激励，还是在保护低效率租金。第三，若讨论技术引进、国产替代和供应链安全，就要问它们是否提高 A_i 与 H_i，还是仅仅把进口替换成低效率本土生产。第四，若讨论 AI，就要问前沿模型、行业采用、任务替代、新任务创造和组织改造各自发生在哪里。

这也说明，中国增长转型不是单一模型能解释的。追赶阶段更多依赖第 23 章的扩散和吸收；接近前沿的行业需要第 21 章的质量阶梯；政策设计需要第 22 章的动态竞争视角；AI 和通用数字技术则需要第 24 章的互补资本和任务框架。

本部分 Review

学完第六部分，你应该能做到五件事。

第一，看到创新数据时，不只问数量，而问质量步长、有效创新到来率和生产率后果。居民专利申请数、高技术出口和 AI 投资都是入口，不是结论。

第二，讨论竞争政策时，不再说“竞争越强越好”或“垄断越强越好”。你应该能区分逃离竞争效应、Schumpeterian 租金效应、专利保护的动态激励和静态扭曲。

第三，分析后发追赶时，不把“落后”当成增长保证。距离前沿只有在吸收能力、采用成本、金融、教育、基础设施和组织能力配合时，才会变成追赶增长。

第四，讨论 AI 时，不把技术演示、投资规模或模型排名直接等同于长期增长。你应该问互补无形资本是否形成，自动化替代了哪些任务，是否出现新任务，市场势力如何分配收益。

第五，能够把这一部分与前后文连接起来。向前看，它接续 Romer、Jones 和半内生增长中的知识生产问题；向后看，它为中国增长、结构转型、资源错配和制度分析提供技术变化的机制基础。

如果这一部分真正学懂，你读创新政策、AI 新闻、产业升级报告或中国增长论文时，脑中应该不再只有“技术进步”这个模糊词，而是会自动拆成：前沿创新、质量阶梯、竞争激励、扩散采用、吸收能力、互补资本、任务重组和分配后果。这就是第六部分的学习目标。

第七部分

中国增长、发展与结构转型

第二十五章　中国增长事实与增长核算

前面二十四章已经建立了很多工具：增长事实告诉我们要解释什么，增长核算把产出增长拆成资本、人力资本和残差，Solow 模型解释资本深化为什么会带来追赶又为什么不能永久维持高速增长，Ramsey 和 OLG 模型解释储蓄、投资和代际结构，内生增长与创新模型解释知识、研发、扩散和通用技术。现在我们把这些工具集中放到中国增长经验上。

本章不是“中国案例介绍”。它的任务更严格：把改革开放以来中国增长拆成几个可以被模型处理的层次。第一，中国收入水平发生了多大变化？第二，这种变化伴随怎样的投资、城市化、教育扩张和产业结构变化？第三，用增长核算看，资本深化、人力资本和 residual 分别扮演什么角色？第四，为什么 residual 既重要又危险，因为它不是一个机制，而是一组尚未解释的机制的合并名称？第五，进入中高收入阶段后，中国增长问题为什么逐渐从“资本够不够”转向“资本配置、创新、结构转型和制度质量是否足够好”？

如果前面章节是工具箱，本章就是第一次系统使用工具箱。我们会保留数学推导，但不会让推导压过事实；会放入数据表，但不会把数据题丢给读者自己找；会讨论中国经验，但不会把复杂历史压缩成一句“高投资”或“改革红利”。

本章所有数据口径都应和附录 E 配合阅读。正文给出图表和解释，附录 E 说明 PWT、WDI、中国统计口径、增长核算公式和数据流水线。若你以后要复现或更新中国增长事实，优先回到附录 E 和 `DATA-MANIFEST.md`，不要在正文里临时更换数据口径。

25.1　学习目标

读完本章，你应该能够完成五件事。

第一，能够用事实表描述中国 1980–2024 年的收入、投资、城市化、教育和产业结构变化，而不是只用“增长很快”这样的总括句。第二，能够从

$$y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$$

推导出中国增长核算的基本分解，并解释每一项在中国语境中的含义。第三，能够区分三类说法：资本深化是重要近因，TFP residual 是重要信号，制度、市场化、开放、结

构转型和创新才是更深层机制。第四，能够理解为什么 2000–2010 年和 2010 年以后中国增长的性质不同：前者更像资本深化、开放学习和效率改善同时发生，后者更像资本深化仍在继续但 residual 明显变弱。第五，能够把中国增长经验放回一般发展经济学：许多后发经济体都可能经历“低收入追赶–资本深化–结构转型–效率瓶颈–创新转型”的顺序，但每一步是否成功取决于具体制度和资源配置。

25.2 核心问题

本章围绕一个主问题展开：中国高速增长到底来自哪里？

这个问题看似简单，实际至少有四种不同答案。

第一种答案说，增长来自高投资。这个答案抓住了中国经验中非常重要的一面。中国长期投资率高，基础设施、制造业资本、住房、城市公共资本和工业园区快速扩张。没有资本深化，很难理解中国每工人产出为什么能持续提高。

第二种答案说，增长来自劳动力从农业转向工业和服务业。这个答案也重要。若劳动从低生产率部门转向高生产率部门，即使每个部门内部生产率不变，总体平均生产率也会上升。这是结构转型的核心逻辑。

第三种答案说，增长来自人力资本和技术吸收。教育扩张、工程师队伍、管理能力、供应链学习、外资和贸易中的技术扩散，都改变了同样资本和劳动能生产多少产出。

第四种答案说，增长来自制度和市场化改革。价格改革、企业进入、乡镇企业、民营部门扩张、地方政府激励、开放和竞争改变了资源配置效率。

这些答案不是互斥的。真正困难的问题是：如何把它们放在同一张账上？增长核算提供第一层答案：先把增长拆成可测投入和 residual；然后再追问 residual 背后的机制。若不做第一步，讨论会变成故事竞争；若只停在第一步，讨论会变成没有机制的表格。

25.3 中国增长事实的三层读法

理解中国增长，最好分三层。

第一层是收入水平变化。表 25.1 显示，按 2015 年不变美元计，中国人均 GDP 从 1980 年约 437 美元上升到 2024 年约 13122 美元，约为原来的 30 倍。这个变化本身已经足够惊人，但增长经济学不会停在惊叹。它会继续问：这 30 倍来自哪些可解释的近因？

第二层是转型特征。表 25.2 显示，农业增加值占 GDP 的比重从 1980 年约 29.6% 下降到 2024 年约 6.8%；服务业从 22.4% 上升到 56.7%；贸易占 GDP 比重在 2000 年以后明显上升，2010 年接近 50%，随后回落但仍高于 1980 年。这说明中国增长不是沿着一个固定产业结构向上移动，而是在部门、空间和开放程度上同时变化。

第三层是阶段差异。表 25.3 把人均 GDP 的变化分段。1980–2000 年人均实际 GDP 年均对数增长约 8.17%，2000–2010 年进一步上升到约 9.46%，2010–2020 年降至

表 25.1: 中国增长的基础事实：收入、投资、城市化和高等教育

年份	人均 GDP 2015 年不变美元	总资本形成率 占 GDP，%	城镇人口比重 %	高等教育毛入学率 %
1980	437	28.5	19.4	1.3
1990	917	23.9	26.2	3.0
2000	2237	32.6	36.4	7.6
2010	5765	43.5	49.2	25.3
2020	10574	41.8	63.5	61.6
2024	13122	39.9	65.9	76.9

数据来源：World Bank, World Development Indicators，经 World Bank API 于 2026-05-22 抓取。人均 GDP 为 NY.GDP.PCAP.KD，总资本形成为 NE.GDI.FTOT.ZS，城镇人口比重为 SP.URB.TOTL.IN.ZS，高等教育毛入学率为 SE.TER.ENRR。

表 25.2: 中国增长的结构事实：产业结构与开放

年份	农业增加值 占 GDP，%	工业增加值 占 GDP，%	服务业增加值 占 GDP，%	贸易开放度 进出口占 GDP，%
1980	29.6	48.0	22.4	21.5
1990	26.5	41.0	32.5	24.2
2000	14.5	45.1	40.4	39.0
2010	9.2	45.7	45.1	49.9
2020	7.5	36.9	55.5	34.0
2024	6.8	36.5	56.7	37.2

数据来源：World Bank, World Development Indicators，经 World Bank API 于 2026-05-22 抓取。农业、工业和服务业增加值分别为 NV.AGR.TOTL.ZS、NV.IND.TOTL.ZS 和 NV.SRV.TOTL.ZS；贸易开放度为 NE.TRD.GNFS.ZS。

约 6.07%，2020–2024 年约 5.40%。这里要注意，2020–2024 年包含疫情冲击和恢复期，不能简单当作长期稳态增长率；但它仍提醒我们，中国已经从超高速追赶阶段进入更复杂的中高收入增长阶段。

表 25.3: 中国人均实际 GDP 的阶段性增长

时期	年均对数增长率，%	期末/期初倍数
1980–2000	8.17	5.12
2000–2010	9.46	2.58
2010–2020	6.07	1.83
2020–2024	5.40	1.24
1980–2024	7.73	30.05

数据来源：World Bank, World Development Indicators。年均对数增长率按 $100[\log y_T - \log y_{t_0}]/(T - t_0)$ 计算。

三层事实合在一起，形成一个清楚问题：收入大幅上升、投资长期很高、城市化和教育迅速扩张、农业比重大幅下降、工业和服务业结构变化明显、贸易开放经历上升和调整。任何严肃的中国增长解释，都不能只抓住其中一条。

25.4　资本深化：高投资为什么重要，为什么又不够

先看资本。Solow 模型告诉我们，低初始资本经济体如果有较高投资率，可以经历很快的转移增长。中国经验在这一点上非常典型。表 25.1 中总资本形成率长期高于许多经济体，尤其 2000 年以后维持在很高水平。高速铁路、港口、电力、通信、城市基础设施、制造业设备和住房资本都不是“背景变量”，而是生产函数中的真实资本存量。

但从投资率到资本深化，中间有一个容易被忽略的动态方程。设资本积累为

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t, \tag{25.1}$$

投资率为 $s_t = I_t/Y_t$，资本产出比为 $\kappa_t = K_t/Y_t$，总产出增长率为 $g_{Y,t+1} = Y_{t+1}/Y_t - 1$。两边除以 Y_{t+1}，得到

$$\kappa_{t+1} = \frac{(1 - \delta)\kappa_t + s_t}{1 + g_{Y,t+1}}. \tag{25.2}$$

这个式子很有用。它说明高投资率会提高未来资本产出比，但增长率越高，分母越大，给定投资率下资本产出比未必立刻上升得很快。追赶早期，如果投资回报高、产出增长快，高投资可以和高增长同时出现；但随着资本存量变大、边际回报下降，继续维持很高投资率可能表现为资本产出比上升、资本回报压力加大和债务风险增加。

这正是中国增长讨论中的一个核心转折。早期基础设施短缺、制造业资本不足、城市化空间大，高投资很容易找到高社会回报项目。到了中高收入阶段，简单增加投资不再等价于高质量增长。关键问题变成：投资是否流向高边际产出部门？公共投资是否真正提高私人部门生产率？金融体系是否能把资本配置给高生产率企业？如果资本被低回报项目吸收，增长核算中资本贡献仍可能很高，但福利和长期生产率并不一定同步提高。

因此，说“中国增长依赖资本深化”是对的；说“中国增长只是资本堆积”是不够的。资本深化解释了大量近因，但它同时提出一个新问题：为什么这些资本在某些时期能产生高增长，在另一些时期却可能带来效率压力？

25.5 结构转型：劳动从哪里来到哪里去

中国增长的第二个关键事实是结构转型。农业增加值占比大幅下降，城镇人口比重迅速上升，服务业和城市经济扩张。这不是收入增长之后自然出现的装饰性事实，而是生产率增长的重要来源。

用一个最简单的二部门模型可以看清这一点。设经济中有农业部门 A 和非农部门 N，劳动份额分别为 ℓ_A 和 ℓ_N，且 $\ell_A+\ell_N=1$。每个部门的人均产出分别为 y_A 和 y_N，总体每工人产出为

$$y=\ell_A y_A+\ell_N y_N. \tag{25.3}$$

若保持部门内生产率不变，让一小部分劳动 $\Delta\ell$ 从农业转向非农部门，则总体每工人产出变化为

$$\Delta y=(y_N-y_A)\Delta\ell. \tag{25.4}$$

只要 $y_N>y_A$，劳动转移本身就会提高平均生产率。

这个公式解释了为什么城市化和产业结构变化在中国增长中如此重要。改革开放早期，大量劳动力从低生产率农业转向乡镇企业、制造业、建筑业和城市服务业。即使不假设每个企业都立刻技术进步，单纯的部门再配置也会提高总体产出。更重要的是，转移并不只是“换部门”：进入城市和工业体系后，劳动者接触到机器、分工、管理、供应链、市场竞争和学习机会，部门内生产率也会提高。

但二部门公式也揭示了结构转型的边际递减。若农业劳动占比已经很低，继续从农业转出劳动的空间自然变小。若服务业扩张主要进入低生产率、低技能岗位，结构转型带来的平均生产率提升也会变弱。到了中高收入阶段，增长不能只依靠“把人从农业转出来”，还要依靠非农部门内部的生产率提高：企业升级、技术采用、管理改进、城市治理、服务业效率和创新能力。

这就是为什么第 26 章会专门讨论结构转型、工业化与城市化。本章先给出核心直觉：劳动再配置可以解释追赶增长的一部分，但不能替代部门内生产率增长。

25.6　人力资本：教育扩张为什么改变资本回报

表 25.1 中高等教育毛入学率从 1980 年约 1.3% 上升到 2024 年约 76.9%。这个变化不应被机械解释为“大学生越多，增长越快”。但它说明中国劳动质量、技能结构和技术吸收能力发生了巨大变化。

在 MRW 模型中，我们把每工人产出写成

$$y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}, \tag{25.5}$$

其中 h_t 是人力资本。若采用常见的 Mincer 式表达，

$$h_t = \exp(\phi u_t), \tag{25.6}$$

其中 u_t 是平均受教育年限，ϕ 是教育回报参数。于是

$$g_{h,t} \approx \phi \Delta u_t. \tag{25.7}$$

这个表达式背后有一个很重要的经济含义：人力资本不仅直接提高劳动效率，还会改变资本的有效使用。现代制造设备、复杂供应链、数字系统、研发实验室和服务业组织都需要技能匹配。若资本快速积累而技能不足，资本回报会受限；若教育扩张与产业升级相互配合，资本深化和人力资本会形成互补。

中国经验里，基础教育普及、职业教育、高等教育扩张、工程师和管理人才增加，都帮助资本深化转化为实际产出。但人力资本也有质量和匹配问题。高等教育毛入学率是一个数量指标，不直接告诉我们专业结构、教育质量、劳动市场匹配和创新能力。如果毕业生技能与产业需求错配，人力资本数量上升未必充分转化为 TFP。后面讨论城市化、产业升级和资源错配时，这一点会不断出现。

25.7　增长核算：把中国增长拆成近因

现在进入增长核算。由 (25.5) 取对数：

$$\log y_t = \log A_t + \alpha \log k_t + (1-\alpha)\log h_t. \tag{25.8}$$

对时间求差，得到

$$g_{y,t} = g_{A,t} + \alpha g_{k,t} + (1-\alpha) g_{h,t}. \tag{25.9}$$

因此 residual 为

$$g_{A,t} = g_{y,t} - \alpha g_{k,t} - (1-\alpha) g_{h,t}. \tag{25.10}$$

这三个式子是本章的核心。它们告诉我们，若每工人产出增长很快，可能有三类近因：每工人资本增长快，人力资本增长快，或 residual 增长快。表 25.4 使用 PWT 数

表 25.4: 中国每工人产出增长的简化核算：PWT 口径

时期	每工人产出增长率	资本深化贡献	人力资本贡献	residual 贡献	PWT TFP 增长率
1980–2000	3.89	2.15	0.95	0.78	0.05
2000–2010	7.90	3.47	0.36	4.08	2.74
2010–2019	4.07	3.24	0.74	0.09	-0.59

注：数值为年均百分点。表中 residual 由简化增长核算公式计算，PWT TFP 为 Penn World Table 的 TFP 指数增长；两者口径不完全一致，因此应比较方向和量级，而非逐项机械等同。PWT 数据说明见 [Feenstra et al., 2015]。

据给出一个简化中国增长核算。这里的数字不是政策评估，也不是唯一答案，而是帮助我们定位问题的第一张地图。

这张表至少有四个信息。

第一，资本深化一直重要。1980–2000 年资本深化贡献约 2.15 个百分点，2000–2010 年约 3.47 个百分点，2010–2019 年仍约 3.24 个百分点。也就是说，中国增长放缓并不是因为资本深化突然消失。高投资和资本积累仍然是近因中的大项。

第二，2000–2010 年 residual 很高。这个时期包含加入 WTO 后的开放深化、出口制造扩张、外资和技术引进、供应链学习、民营企业和市场竞争扩张、城市化加速等机制。增长核算本身不能证明哪一个机制最重要，但它告诉我们：仅靠资本和人力资本数量增长，很难解释这一时期全部增长。

第三，2010–2019 年 residual 明显变弱，而资本深化贡献仍高。这是理解中国增长减速的关键。若资本投入仍然增加，但 residual 不再强劲，问题就不能简单说成“投资不够”。更自然的问题是：资本是否配置到高回报用途？资源错配是否加重？创新是否足以替代模仿和扩散？服务业生产率是否提高？人口结构是否改变了储蓄、劳动供给和资本回报？

第四，PWT TFP 与简化 residual 不完全相同。这个差异本身就是教材要教会你的地方。TFP 不是自然界直接给出的一个数字，而是由数据、价格、资本存量、人力资本、份额参数和指数方法共同构造出来的。好的增长分析不是背一个 TFP 数字，而是理解它如何被构造、能说明什么、不能说明什么。

25.8 一个数值例子：高投资如何与资本回报压力并存

为了避免“高投资一定好”或“高投资一定坏”的极端判断，考虑一个简化例子。设折旧率 $\delta = 0.06$，当前资本产出比 $\kappa_t = 3$，投资率 $s_t = 0.40$。

若总产出增长率为 8%，由 (25.2)：

$$\kappa_{t+1} = \frac{(1-0.06)\times 3 + 0.40}{1.08} = \frac{3.22}{1.08} \approx 2.98. \tag{25.11}$$

资本产出比几乎不变。高投资被高增长吸收了，资本积累与产出扩张同步。

若总产出增长率降到 4%，同样投资率下：

$$\kappa_{t+1} = \frac{3.22}{1.04} \approx 3.10. \tag{25.12}$$

资本产出比上升。若这种情况持续，经济体会需要越来越多资本才能支持同样产出，资本边际回报可能下降。

这个例子解释了中国讨论中的一个常见误区。高投资在高速追赶阶段可能是合理甚至必要的；但当潜在增长率下降、人口和结构转型红利变弱、投资机会质量下降时，同样的投资率可能带来不同后果。政策问题不再是“投资高不高”，而是“投资的社会回报是否高、配置是否有效、是否挤出消费和更高质量的人力资本或创新投入”。

25.9 TFP residual：信号、黑箱与研究入口

增长核算里最容易被误解的是 residual。很多讨论会说“中国增长从投入驱动转向 TFP 驱动”，或者“中国 TFP 放缓导致增长放缓”。这些说法有用，但必须拆开。

Residual 至少包含六类东西。

第一是真正的技术进步：更好的机器、工艺、算法、材料、组织知识和研发成果。第二是资源再配置：劳动和资本从低生产率部门、企业或地区流向高生产率用途。第三是规模经济和集聚经济：城市、产业集群和供应链使企业在同样投入下产出更高。第四是管理与组织效率：质量控制、库存管理、物流、平台化和企业治理改善。第五是制度和政策环境：市场准入、产权保护、竞争、金融配置、地方政府激励和开放程度。第六是测量误差：价格指数、资本质量、产能利用率、劳动时间、人力资本质量和非正规部门统计都会影响 residual。

因此，residual 高不是一句完整解释，而是一个研究入口。它告诉我们“这里有未被资本和人力资本数量解释的东西”。下一步必须问：未解释部分更像技术进步，还是资源再配置？更像开放学习，还是价格和统计口径变化？更像企业动态，还是部门结构变化？如果不继续拆，TFP 会变成一个把无数机制装进去的黑箱。

对中国尤其如此。改革开放以来的 residual 可能包含农村改革、乡镇企业、价格改革、民营企业进入、外资、贸易、城市化、产业集聚、管理学习和制度变化。2010 年以后 residual 放缓也可能包含资本配置效率下降、人口结构变化、服务业生产率问题、地方债务和房地产相关投资回报下降、全球化环境变化、技术前沿接近和创新难度上升。增长核算不能替我们在这些机制之间作最终裁决，但它能告诉我们裁决应该从哪里开始。

25.10 中国增长的阶段性解释

把事实和核算合起来，中国增长可以分成几个阶段理解。这里的分期不是历史学意义上的精确断代，而是增长机制的教学分期。

第一阶段是改革开放早期到 1990 年代初。核心机制包括农业改革、价格激励、乡镇企业、初步市场化和劳动从农业转向非农活动。这一阶段的关键词不是单纯资本深化，而是激励改变和资源再配置。用二部门模型看，劳动从低生产率农业流向更高生产率非农部门；用 residual 语言看，同样劳动和资本在新制度下能产生更多产出。

第二阶段是 1990 年代中后期到 2000 年前后。市场化改革、国企改革、民营部门扩张、沿海制造业和地方政府发展竞争加强。这一阶段开始更明显地把资本深化、企业动态和开放结合起来。低效率部门收缩，高效率企业扩张，资本和劳动配置发生变化。第 27 章会把这种机制放进资源错配和企业异质性框架。

第三阶段是 2001 年加入 WTO 后到 2010 年左右。表 25.4 中 residual 高企，符合这一时期开放学习、出口制造、全球价值链嵌入、外资技术、供应链扩张和城市化加速同时发生的直觉。高投资、高出口、高城市化和效率改善叠加，使增长显得特别强劲。

第四阶段是 2010 年以后。收入水平更高，农业转移空间缩小，人口结构变化开始显现，房地产和地方债务相关投资的边际回报受到质疑，全球贸易环境也更复杂。此时增长问题逐渐从“怎样动员更多资源”转向“怎样提高资源使用效率和创新能力”。这正是中高收入阶段的典型挑战。

这个分期有一个重要含义：中国增长不是一个机制从头解释到尾。早期的激励改革和劳动再配置，中期的开放、制造业和资本深化，后期的效率、创新和制度质量，是不同但相互连接的机制。把它们硬塞进一个单一词语，会降低理解力。

25.11 中国与发展延伸：这一章对一般发展经济学的意义

中国经验有特殊性，但它不是无法理论化的特殊性。它对一般发展经济学至少有四个启发。

第一，低收入追赶往往需要高投资，但高投资本身不是充分条件。若没有高回报项目、基础设施瓶颈、产业需求和有效配置，高投资可能变成低效率资本积累。Solow 模型告诉我们资本深化能推动追赶，资本动态方程提醒我们要看资本产出比和边际回报。

第二，结构转型是增长本身的一部分。许多发展中国家的增长障碍不是“每个部门都慢慢变好”，而是劳动、资本和企业被困在低生产率用途。二部门模型 (25.3) 和 (25.4) 说明，再配置可以直接提高总量生产率。

第三，开放和技术扩散需要吸收能力。加入全球市场、引进设备、吸收外资和学习管理都不是自动转化为 TFP。它们需要人力资本、基础设施、企业能力和制度环境配合。表 25.1 中教育扩张和城市化，与表 25.2 中开放和产业变化共同出现，说明这些机制很难分开。

第四，进入中高收入阶段后，增长的主要约束会变化。早期最稀缺的可能是资本、基础设施、市场激励和部门转移；后期更稀缺的可能是创新能力、资源配置效率、公共服务质量、金融筛选能力、法治和竞争环境。中国的经验提醒我们，增长政策不能永远停留在追赶早期的工具上。

25.12 常见误区

1. **把中国增长完全解释为高投资。**高投资是重要近因，但不能解释 residual 的阶段变化，也不能解释为什么同样投资在不同时期回报不同。
2. **把中国增长完全解释为 TFP。** TFP residual 不是一个单独机制，而是技术、配置、制度、组织和测量误差的混合项。
3. **把城市化只看成结果。**城市化也是生产率机制：它改变劳动配置、市场规模、分工、学习和公共资本使用效率。
4. **把教育扩张直接等同于人力资本质量。**高等教育毛入学率上升说明技能供给扩张，但教育质量、专业匹配和创新能力需要另行分析。
5. **把增长减速简单理解为失败。**低收入到中高收入的追赶本来就会伴随增长率下降。真正的问题不是增长率是否低于过去，而是是否能在更高收入水平上通过效率和创新维持可持续增长。
6. **把一张增长核算表当作最终答案。**核算表是问题地图，不是因果识别。它帮助我们知道该追问哪里，而不是替我们完成研究。

25.13 英文术语表

英文术语	中文含义与说明
China growth accounting	中国增长核算，把中国增长拆成资本、人力资本和 residual 等近因。
Capital deepening	资本深化，每个劳动者或有效劳动单位拥有的资本增加。
Gross capital formation	总资本形成，国民账户中投资的宽口径指标，常用占 GDP 比重衡量投资率。
Urbanization	城市化，人口和经济活动向城市集中，同时改变劳动配置、市场规模和公共资本效率。

Structural transformation	结构转型，农业、工业和服务业之间的产出与就业份额变化。
Reallocation effect	再配置效应，要素从低生产率用途转向高生产率用途带来的总量生产率提高。
Total factor productivity	全要素生产率，给定资本、劳动和人力资本后产出效率的指标。
Solow residual	Solow 残差，产出增长扣除投入贡献后的剩余项，常被用作 TFP 增长的近似。
Absorptive capacity	吸收能力，经济体学习、采用和改造外部技术的能力。
Middle-income transition	中等收入转型，从低收入追赶转向依靠效率、创新和制度质量维持增长的阶段。

25.14 本章 Review

如果我来 review 你对本章的理解，最重要的标准不是你能否背出中国增长很快，而是你能否把“快”拆成结构化解释。

合格的理解应该包含三层。第一层是事实层：你应该能说出 1980–2024 年中国人均实际 GDP 大约增长 30 倍，同时投资率长期高、城市化快速推进、高等教育扩张、农业占比下降、服务业占比上升。第二层是核算层：你应该能写出 $g_y = g_A + \alpha g_k + (1-\alpha) g_h$，并解释为什么中国 2010 年以后资本深化仍高而 residual 变弱会改变我们对增长减速的判断。第三层是机制层：你应该能把 residual 拆向开放学习、资源再配置、企业动态、制度变化、管理改善、创新和测量误差，而不是把它当作一个神秘技术变量。

如果你的理解还停留在“中国靠投资增长”或“中国靠 TFP 增长”，那还不够。前者忽略了结构转型、开放和效率改善；后者把所有机制放进一个黑箱。更好的表达是：中国高速增长来自资本深化、劳动再配置、人力资本扩张、开放学习、市场化改革和生产率改善的叠加；进入中高收入阶段后，资本深化仍重要，但长期增长越来越取决于资本配置效率、创新能力、服务业生产率、人口结构适应和制度质量。

本章也为后面三章铺路。第 26 章会深入结构转型、工业化和城市化；第 27 章会把 residual 中的资源错配和企业异质性拆开；第 28 章会讨论制度、市场化和地方政府行为。换句话说，本章把中国增长的大账摊开，后面几章逐项解释账上最难的部分。

25.15　核心文献

中国增长的总览可以从 [Zhu, 2012] 开始。关于中国增长核算和部门模型，[Brandt and Zhu, 2010] 是重要阅读；关于企业异质性、金融摩擦和中国式增长，[Song et al., 2011] 提供了一个具有代表性的动态模型。增长核算方法和 PWT 数据背景可参见 [Feenstra et al., 2015]，更一般的增长核算和发展核算讨论见 [Barro and Sala-i Martin, 2004]、[Acemoglu, 2009] 和 [Caselli, 2005]。关于资源错配与 TFP 损失，后续章节会重点使用 [Hsieh and Klenow, 2009]。

第二十六章　结构转型、工业化与城市化

第 25 章把中国增长的大账摊开：收入快速上升，投资率长期高，城市化推进，农业占比下降，服务业占比上升，增长核算中的 residual 在不同阶段明显变化。本章把其中最重要的一块单独拿出来：结构转型。

结构转型不是“发展经济学的背景介绍”，而是增长机制本身。一个经济体可以通过每个部门内部技术进步而增长，也可以通过资源从低生产率部门转向高生产率部门而增长。中国经验尤其适合说明这一点。改革开放以来，大量劳动力离开农业，进入乡镇企业、制造业、建筑业、城市服务业和更复杂的产业链。城市化不仅改变人口分布，也改变劳动者面对的市场规模、分工结构、公共资本、学习机会和企业组织方式。

本章会从数据开始，然后建立三个模型。第一是结构转型核算，把总劳动生产率拆成部门内增长和部门间再配置。第二是 Lewis 二元经济模型，解释为什么农业剩余劳动力和现代部门资本积累会共同推动工业化。第三是城市化与集聚模型，解释为什么城市不是简单的人口容器，而是一种生产率技术。最后，我们会回到中国：结构转型红利为什么很强，为什么会递减，以及为什么进入中高收入阶段后，问题从“人能否转出来”变成“城市和服务业能否让人更有效率地工作”。

本章的部门份额、就业份额和相对劳动生产率都涉及数据口径。附录 E 给出增长数据和结构转型数据的读取原则；第 25 章负责总量核算，本章负责部门分解，第 27 章再进入企业层面的资源配置。

26.1　学习目标

读完本章，你应该能够完成五件事。

第一，能够用增加值份额、就业份额和相对劳动生产率三类数据描述结构转型，而不是只说“农业占比下降”。第二，能够从

$$y_t = \sum_i \ell_{i,t} y_{i,t}$$

推导总劳动生产率变化的部门内效应和再配置效应。第三，能够理解 Lewis 二元经济模型：为什么早期工业化会在低工资、资本积累和劳动转移中加速，为什么剩余劳动力耗尽后会出现工资上升和增长机制变化。第四，能够把城市化写成含有集聚收益和拥挤成本的模型，而不是把城市化理解成纯人口统计。第五，能够用中国数据说明结构转

型红利已经从“农业到工业”逐渐转向“服务业效率、城市质量、劳动力流动和人力资本匹配”。

26.2 核心问题

本章的主问题是：劳动和资本从一个部门转向另一个部门，为什么会影响长期增长？

一个最直接的回答是生产率差异。如果农业中一个劳动者平均创造的增加值远低于工业或城市服务业，那么把劳动从农业转向非农部门，会提高总平均劳动生产率。这不是因为每个劳动者天生变得更聪明，而是因为他进入了更高资本密度、更细分分工、更大市场和更强组织能力的生产环境。

但这个回答还不够。结构转型还有四个难点。

第一，部门转移需要吸收能力。农业劳动者进入城市，不会自动变成高生产率工人；教育、培训、住房、公共服务、劳动合同、社会保障和企业岗位都影响转移质量。

第二，结构转型有一般均衡后果。农业劳动减少会改变食品价格和农村工资；城市劳动增加会改变住房、通勤、公共服务和工资；工业扩张会改变资本回报、地方财政和环境约束。

第三，结构转型红利会递减。若农业就业份额已经明显下降，继续从农业转出劳动的空间会缩小。此后增长更依赖非农部门内部生产率提高。

第四，不同结构路径的质量不同。一个经济体可以从农业转向高生产率制造业，也可以转向低生产率服务业；可以形成有创新能力的城市群，也可以形成高房价、拥堵和公共服务不足的低效率城市化。结构转型不是越快越好，而是要看转向哪里、以什么成本转、转后生产率是否提高。

26.3 中国结构转型事实

先看数据。表 26.1 同时列出中国三大部门的增加值份额和就业份额。就业份额使用 World Bank 的 ILO modeled estimates，较完整可比数据从 1991 年开始，因此本章就业表从 1991 年起。

这里必须先做一个数据口径提醒。增加值份额来自国民账户，就业份额使用 ILO modeled estimates。二者都适合做跨年和跨国可比的宏观事实，但不是企业或家庭调查意义上的精确微观测量。尤其是服务业就业、非正规就业、农民工跨地区就业和兼职就业，都会受到统计口径影响。因此，本章使用这些数字的目的不是精确计算某一年某个部门的真实生产率，而是识别一个稳健的大趋势：农业就业份额显著下降，服务业吸纳就业上升，部门相对劳动生产率差距明显缩小。后面的模型解释的是这个大趋势，不应把表中每个小数点当作结构参数。

这张表要读出三层含义。

表 26.1: 中国部门结构转型：增加值份额与就业份额

年份	农业 VA %	工业 VA %	服务业 VA %	农业就业 %	工业就业 %	服务业就业 %
1991	24.0	41.4	34.7	59.6	21.4	18.9
2000	14.5	45.1	40.4	50.0	24.6	25.3
2010	9.2	45.7	45.1	36.7	28.7	34.6
2020	7.5	36.9	55.5	23.6	31.1	45.3
2024	6.8	36.5	56.7	22.2	31.6	46.2

数据来源：World Bank, World Development Indicators，经 World Bank API 于 2026-05-22 抓取。VA 为增加值占 GDP 比重，employment 为就业占总就业比重。指标包括 NV.AGR.TOTL.ZS、NV.IND.TOTL.ZS、NV.SRV.TOTL.ZS、SL.AGR.EMPL.ZS、SL.IND.EMPL.ZS 和 SL.SRV.EMPL.ZS。

第一，农业就业下降很大。1991 年农业就业仍占总就业约 59.6%，到 2024 年降至约 22.2%。这意味着三十多年里，数以亿计劳动者离开农业或至少从主要农业就业转向非农就业。这个事实本身就是中国增长的核心机制之一。

第二，农业增加值份额下降更早、更低。1991 年农业创造约 24.0% 的增加值，却吸收约 59.6% 的就业；2024 年农业创造约 6.8% 的增加值，仍吸收约 22.2% 的就业。这说明农业劳动生产率长期低于全经济平均水平。

第三，服务业成为就业吸收主部门。2024 年服务业就业占比约 46.2%，增加值占比约 56.7%。这说明中国已经不只是“工业化”经济体，后续增长很大程度上取决于服务业生产率和城市服务体系，而不只是制造业资本深化。

26.4 相对劳动生产率：为什么就业份额比增加值份额更有信息

只看增加值份额，容易以为农业已经不重要；只看就业份额，又容易低估工业和服务业的生产率差异。更好的指标是部门相对劳动生产率：

$$r_{i,t} = \frac{Y_{i,t}/L_{i,t}}{Y_t/L_t} = \frac{Y_{i,t}/Y_t}{L_{i,t}/L_t}. \tag{26.1}$$

如果 $r_{i,t} = 1$，说明部门 i 的劳动生产率等于全经济平均；若 $r_{i,t} < 1$，说明该部门劳动生产率低于平均；若 $r_{i,t} > 1$，说明高于平均。

表 26.2 用表 26.1 的数据直接计算相对劳动生产率。

表 26.2: 中国部门相对劳动生产率与城市化

年份	农业相对生产率	工业相对生产率	服务业相对生产率	城镇人口比重 %
1991	0.40	1.93	1.83	26.9
2000	0.29	1.83	1.60	36.4
2010	0.25	1.59	1.30	49.2
2020	0.32	1.19	1.23	63.5
2024	0.30	1.15	1.23	65.9

注：部门相对劳动生产率按“增加值份额/就业份额”计算。城镇人口比重为 WDI 指标 SP.URB.TOTL.IN.ZS。

这张表非常关键。1991 年工业劳动生产率约为全经济平均的 1.93 倍，服务业约为 1.83 倍，农业只有 0.40 倍。此时，劳动从农业转向工业和服务业，会带来很大的再配置收益。到了 2024 年，农业相对生产率仍低于平均，但工业和服务业相对生产率已经接近 1.2 左右，部门间差距缩小。这意味着结构转型红利仍存在，但不像早期那么大。

这不是坏事。部门生产率差距缩小，本身也可以说明低生产率部门收缩、高生产率部门吸收劳动、农业机械化和农村收入提高。但从增长角度看，它意味着下一阶段不能再主要依赖“把劳动从农业转出来”。如果服务业成为最大就业部门，那么服务业内部效率、城市治理、数字基础设施、公共服务、专业服务、医疗教育、物流和平台经济的生产率，就会成为长期增长的关键。

26.5　结构转型核算

现在把直觉写成模型。设经济有 N 个部门，部门 i 的产出为 $Y_{i,t}$，劳动为 $L_{i,t}$。总产出与总劳动为

$$Y_t=\sum_{i=1}^{N}Y_{i,t},\qquad L_t=\sum_{i=1}^{N}L_{i,t}. \tag{26.2}$$

定义全经济劳动生产率 $y_t=Y_t/L_t$，部门劳动生产率 $y_{i,t}=Y_{i,t}/L_{i,t}$，部门就业份额 $\ell_{i,t}=L_{i,t}/L_t$。于是

$$y_t=\sum_{i=1}^{N}\ell_{i,t}y_{i,t}. \tag{26.3}$$

对两个时期 0 和 1，有一个精确分解：

$$y_1-y_0=\sum_i \ell_{i,0}(y_{i,1}-y_{i,0})+\sum_i y_{i,0}(\ell_{i,1}-\ell_{i,0})+\sum_i(\ell_{i,1}-\ell_{i,0})(y_{i,1}-y_{i,0}). \tag{26.4}$$

第一项是**部门内效应**：就业份额不变时，各部门内部劳动生产率提高。第二项是**静态再配置效应**：劳动从低生产率部门转向高生产率部门。第三项是**交互项**：劳动份额变化和部门生产率变化同时发生。

这个分解很朴素，但非常有力。它告诉我们，一个国家劳动生产率提高，可以来自三个来源。第一，农业、工业和服务业各自变得更有效率。第二，劳动从低生产率部门转向高生产率部门。第三，劳动流入的部门同时经历生产率变化。

在中国经验中，三项都重要。农业内部有机械化、良种、基础设施和规模经营改善；工业内部有资本深化、技术引进、供应链学习和管理升级；服务业内部有数字化、物流、金融、平台和专业服务扩张。同时，劳动大规模从农业转向非农部门，形成强再配置效应。真正的难点在于，随着农业就业份额下降，第二项空间缩小，未来更依赖第一项，也就是工业和服务业内部生产率增长。

26.6 一个数值例子：再配置收益有多大

用一个简化例子看结构转型的力量。假设经济只有农业和非农部门，初始时农业就业份额为 60%，农业相对劳动生产率为 0.4；非农就业份额为 40%，非农相对劳动生产率为 1.9。这里的数字接近表 26.2 中 1991 年中国农业与工业、服务业之间的差距。

若有 10 个百分点劳动从农业转向非农部门，且部门生产率暂时不变，则总劳动生产率变化约为

$$\Delta y = (1.9 - 0.4) \times 0.10 = 0.15. \tag{26.5}$$

也就是说，仅仅劳动再配置就能把全经济平均劳动生产率提高约 15%。这个数字不是精确历史估计，而是说明机制量级：当部门生产率差距很大时，结构转型不是小修小补，而可能是增长的主要来源之一。

但若到了后期，农业相对生产率为 0.3，非农相对生产率约 1.2，同样 10 个百分点劳动转移带来的直接收益变为

$$\Delta y = (1.2 - 0.3) \times 0.10 = 0.09. \tag{26.6}$$

收益仍然为正，但小于早期。若可转移农业劳动本身也减少，结构转型对增长率的贡献会进一步下降。这就是为什么中国进入中高收入阶段后，不能只依靠劳动转移，还必须提高非农部门内部生产率。

26.7 Lewis 二元经济模型

Lewis 模型提供了理解早期工业化的经典框架。经济由传统农业部门和现代工业部门组成。农业部门劳动很多，资本少，边际产出低；现代部门资本密集、生产率高，能够吸收农业剩余劳动力。只要农业部门存在大量剩余劳动，现代部门可以在相对稳定

的工资下扩张；资本积累推动现代就业增加；当剩余劳动逐渐耗尽，工资开始明显上升，经济进入 Lewis turning point。

设农业部门产出为

$$Y_A = F_A(L_A), \qquad F_A' > 0, \quad F_A'' < 0, \tag{26.7}$$

现代部门产出为

$$Y_M = A_M K_M^{\alpha} L_M^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{26.8}$$

现代部门竞争性企业的劳动需求满足

$$w_M = (1-\alpha) A_M K_M^{\alpha} L_M^{-\alpha}. \tag{26.9}$$

因此给定工资 w_M 时，现代部门劳动需求为

$$L_M^d = \left[\frac{(1-\alpha) A_M K_M^{\alpha}}{w_M} \right]^{1/\alpha}. \tag{26.10}$$

在 Lewis 早期阶段，农业中存在剩余劳动，现代部门只要支付略高于农村生存收入和迁移成本的工资 $\bar{w}$，就能吸收劳动：

$$w_M = \bar{w}. \tag{26.11}$$

把 (26.11) 代入 (26.10)，得到

$$L_M^d = \left[\frac{(1-\alpha) A_M K_M^{\alpha}}{\bar{w}} \right]^{1/\alpha} = \left(\frac{(1-\alpha) A_M}{\bar{w}} \right)^{1/\alpha} K_M. \tag{26.12}$$

这说明，在固定工资阶段，现代部门就业与现代资本存量成正比。资本积累直接拉动非农就业扩张。

若现代部门利润用于再投资，

$$K_{M,t+1} = (1-\delta) K_{M,t} + s_M \Pi_{M,t}, \tag{26.13}$$

那么资本积累、劳动吸收和工业化会相互强化。现代部门越大，利润越多；利润再投资，提高资本；资本提高劳动需求；劳动从农业转出，提高总劳动生产率。

命题 26.1 (Lewis 阶段的劳动吸收). *在现代部门 Cobb-Douglas 技术 (26.8)、固定现代工资 $\bar{w}$ 和竞争性劳动需求下，现代部门劳动需求与现代资本存量成正比。若 K_M 增长且农业剩余劳动未耗尽，则现代就业随资本积累扩张。*

证明. 由现代部门一阶条件 (26.9)，固定工资 $\bar{w}$ 下有

$$\bar{w} = (1-\alpha) A_M K_M^{\alpha} L_M^{-\alpha}.$$

整理得

$$L_M = \left(\frac{(1-\alpha) A_M}{\bar{w}} \right)^{1/\alpha} K_M.$$

括号内为常数，因此 L_M 与 K_M 成正比。只要农业部门仍能提供劳动力，资本增长就会带来现代部门劳动吸收。 □

Lewis turning point 出现在农业剩余劳动不再充足时。更正式地说，设农村劳动外出的机会成本等于农业边际产出加迁移和生活成本：

$$w_A(L_A) + \tau = F'_A(L_A) + \tau. \tag{26.14}$$

早期 $F'_A(L_A) + \tau < \bar{w}$，现代部门能以 $\bar{w}$ 吸收劳动。随着 L_A 下降，农业边际产出上升；当

$$F'_A(L_A^*) + \tau = \bar{w} \tag{26.15}$$

时，剩余劳动阶段结束。之后若现代部门继续扩张，就必须提高工资，工业化进入更依赖生产率、技能和创新的阶段。

26.8 中国经验中的 Lewis 转折

中国的结构转型很适合用 Lewis 模型作为第一层语言。1990 年代和 2000 年代，大量农村劳动力进入乡镇企业、沿海制造业、建筑业和城市服务业。低初始农业生产率、巨大城乡收入差距、快速资本积累和外向型工业扩张，共同构成 Lewis 式劳动吸收过程。

但中国经验也超出 Lewis 模型的简单版本。

第一，中国不是一个单一农村和单一城市部门。沿海、内陆、县域、城市群、国企、民企、外资企业之间生产率差异很大。劳动转移不只是从农业到工业，也包括从内陆到沿海、从低生产率企业到高生产率企业、从非正规服务到正规服务。

第二，迁移成本 τ 不只是路费。户籍、住房、子女教育、医疗、社保、城市公共服务和社会网络都会影响实际迁移成本。若 τ 较高，劳动即使在生产率意义上应该转移，也可能转移不足；或者转移后不能稳定留在城市，形成低质量城市化。

第三，现代部门工资上升不一定意味着增长结束。它也可能意味着结构转型进入新阶段：低工资比较优势减弱，企业必须通过自动化、管理升级、品牌、研发和人力资本提高生产率。也就是说，Lewis 转折不是坏消息，而是从劳动动员型增长转向生产率型增长的信号。

26.9 城市化：城市为什么能提高生产率

城市化常被当作人口统计变量：城镇人口比重从多少上升到多少。但增长经济学更关心的是，城市为什么能提高生产率。

一个简单写法是把城市生产率表示为

$$A_c(N) = A_0 N^{\eta} C(N)^{-1}, \tag{26.16}$$

其中 N 是城市规模，$\eta > 0$ 表示集聚收益，$C(N)$ 表示拥挤、通勤、住房、污染和公共服务压力。若令

$$C(N) = N^{\chi}, \qquad \chi \geq 0, \tag{26.17}$$

则

$$A_c(N) = A_0 N^{\eta - \chi}. \tag{26.18}$$

当 $\eta > \chi$，城市扩大提高净生产率；当 $\eta < \chi$，拥挤成本超过集聚收益。

集聚收益来自几个渠道。第一是共享投入：企业可以共享供应商、基础设施、物流、金融和专业服务。第二是劳动力市场厚度：劳动者更容易找到适合岗位，企业更容易找到合适技能。第三是知识溢出：人、企业和机构靠得更近，学习、模仿、跳槽和创业更容易发生。第四是市场规模：更大的本地市场支持更细分分工和更专业化服务。

拥挤成本同样真实。住房贵、通勤长、教育和医疗资源紧张、污染、交通拥堵、地方财政压力和社会保障不足，都会降低城市净生产率。一个城市化率上升的经济体，未必自动获得高质量城市化。关键在于城市是否把人口密度转化为匹配、学习和创新，而不是转化为拥堵和生活成本。

中国城市化的特殊性在于，人口城市化、土地城市化和公共服务城市化并不总是同步。若建设用地和基础设施扩张快于人口市民化，可能形成资本密集型城市化；若人口进入城市但公共服务和住房保障不足，可能形成不完全市民化。增长分析要看的不是城镇人口比重一个数字，而是城市是否真正提高劳动生产率和福利。

26.10 工业化与服务业化

结构转型通常经历农业份额下降、工业份额上升、服务业份额最终上升的过程。但这不是机械阶段论。不同国家的工业化深度、服务业类型和开放环境不同，增长结果也不同。

中国的一个突出特征是制造业和基础设施在很长时期内承担了核心增长功能。制造业具有几个增长优势：可贸易、容易吸收国际技术、便于规模化生产、供应链学习强、资本深化空间大。加入 WTO 后，中国制造业通过出口、外资、全球价值链和国内产业集群迅速扩大，这与第 25 章中 2000–2010 年 residual 较高相互呼应。

但随着收入提高，服务业不可避免地成为更大就业部门。服务业不是低生产率的同义词。物流、金融、软件、研发、医疗、教育、商务服务、平台经济和高端消费服务都可能具有高生产率和高人力资本需求。问题在于服务业内部差异很大：同样叫服务业，低技能零散服务和高端生产性服务对增长的含义完全不同。

因此，中国未来结构转型的关键问题不是“服务业占比是否上升”，而是“什么服务业上升”。如果服务业扩张主要是低生产率吸纳就业，结构转型对增长的贡献会减弱；如果服务业扩张带动生产性服务、数字化、研发、医疗教育质量和城市治理改善，它可以成为新增长来源。

26.11 中国与发展延伸：结构转型的政策含义

结构转型的政策含义不能简单写成“推动城市化”或“发展工业”。更准确地说，政策要降低高生产率转移的障碍，同时避免把资源锁定在低回报用途。

第一，降低劳动流动成本。户籍、住房、教育、医疗和社保制度会影响迁移成本 τ。若劳动者不能稳定进入城市，企业也不愿意投资长期培训，城市化的生产率收益会被削弱。

第二，提高城市公共品质量。交通、教育、医疗、住房、环境治理和公共安全决定拥挤成本 χ。城市规模本身不是目标，净集聚收益才是目标。

第三，促进土地和资本向高生产率用途配置。若地方政府过度依赖土地财政或低价工业用地，可能推动资本进入低回报项目。结构转型需要资本配合，但资本应服务于生产率，而不是只服务于扩张指标。

第四，提高农业剩余劳动力减少后的农业生产率。农业就业下降后，农业仍然关系食品安全、农村收入和区域均衡。机械化、土地流转、农业服务业、冷链物流和农村公共服务，会影响农业劳动生产率和城乡收入差距。

第五，重视服务业生产率。中高收入阶段的增长很难只靠制造业。生产性服务、数字服务、医疗教育、养老、研发设计、金融和法律服务，都会影响全经济 TFP。

26.12 常见误区

1. **把结构转型等同于农业占 GDP 比重下降。**增加值份额只是一个维度；就业份额和相对劳动生产率更能说明再配置收益。

2. **认为城市化率越高越好。**城市化有集聚收益，也有拥挤成本。高质量城市化看净生产率和福利，不只看人口比例。

3. **把服务业化看成去工业化失败。**服务业内部差异很大。生产性服务和高人力资本服务可以提高制造业和全经济生产率。

4. **把 Lewis 转折当作坏消息。**工资上升说明剩余劳动减少，也意味着经济需要从低工资竞争转向生产率和创新竞争。

5. **忽视迁移成本。**劳动转移不是自动发生的，户籍、住房、教育、社保、技能和社会网络都会影响实际选择。

6. **把结构转型当成一次性红利。**农业到非农的红利会递减，后续增长必须依赖部门内部效率、企业升级和城市质量。

26.13 英文术语表

英文术语	中文含义与说明
Structural transformation	结构转型，部门增加值、就业份额和生产率结构的长期变化。
Shift-share decomposition	份额转移分解，把总劳动生产率变化拆成部门内效应、再配置效应和交互项。
Within-sector effect	部门内效应，部门内部劳动生产率提高对总生产率的贡献。
Reallocation effect	再配置效应，劳动从低生产率部门流向高生产率部门带来的总生产率提高。
Dual economy	二元经济，传统低生产率部门与现代高生产率部门并存的经济结构。
Lewis turning point	Lewis 转折点，农业剩余劳动逐渐耗尽、现代部门继续扩张需要提高工资的阶段。
Agglomeration economies	集聚经济，城市规模和密度带来的共享、匹配和学习收益。
Congestion costs	拥挤成本，城市规模扩大带来的住房、通勤、污染和公共服务压力。
Urbanization quality	城市化质量，人口、就业、公共服务、住房和生产率提升是否同步。
Producer services	生产性服务，为制造业和其他企业提供物流、金融、研发、设计、软件、法律等服务。

26.14　本章 Review

如果我来 review 你对本章的理解，最重要的是看你是否已经从“农业减少、城市增加”的描述，走到“结构转型如何进入生产率公式”的层次。

合格的理解应该先能写出总劳动生产率恒等式：

$$y_t = \sum_i \ell_{i,t} y_{i,t}.$$

这个式子是全章的核心。它说明总生产率不只是各部门技术水平，还取决于劳动分布。若劳动从低 y_i 部门转向高 y_i 部门，总 y 会提高；若部门间生产率差距缩小或可转移劳动减少，再配置红利会下降。

其次，你应该能解释 Lewis 模型的逻辑。早期存在农业剩余劳动时，现代部门可以在相对稳定工资下吸收劳动力，资本积累推动工业就业扩张；当农业边际产出加迁移成本接近现代工资时，Lewis 转折出现，工资上升，增长必须更多依赖生产率提高。

第三，你应该能解释城市化的双面性。城市通过共享、匹配和学习提高生产率，但住房、通勤、污染和公共服务压力会形成拥挤成本。城市化率本身不是最终目标，净集聚收益和居民福利才是关键。

最后，你应该能把中国事实放进这些模型。1991 年中国农业就业占比约 59.6%，农业相对劳动生产率只有全经济平均的 0.40 左右；2024 年农业就业占比降至约 22.2%，服务业就业占比升至约 46.2%。这说明过去结构转型红利很大，但未来增长更依赖服务业生产率、城市质量、劳动力流动、人力资本匹配和企业升级。

26.15 核心文献

结构转型的经典起点是 Lewis 的二元经济模型 [Lewis, 1954] 和 Kuznets 关于现代经济增长事实的研究 [Kuznets, 1966]。现代增长文献中，[Herrendorf et al., 2014] 系统总结了结构转型事实与模型；[Kongsamut et al., 2001] 说明非位似偏好如何产生超越平衡增长路径的部门结构变化。关于中国式增长和结构转型，[Song et al., 2011] 提供了企业异质性、金融摩擦和部门扩张的动态视角；[Zhu, 2012] 则适合作为中国增长事实和机制的总览。

第二十七章　资源错配、企业动态与生产率

第 26 章把结构转型写成部门之间的资源再配置：劳动从低生产率农业转向更高生产率的工业和服务业，会提高总劳动生产率。但部门只是第一层。即使在同一个行业、同一个城市、同一种产品市场中，不同企业的生产率、融资条件、税费负担、土地获取、市场准入、政府关系和管理能力也可能差别很大。若高生产率企业拿不到足够资本和劳动，低生产率企业却因为补贴、保护或软预算约束占用资源，总量 TFP 就会被压低。

这就是本章的主题：资源错配。前面我们把 residual 说成一个黑箱，本章开始把黑箱拆开。错配不是说“某些企业效率低”这么简单；低效率企业本身并不必然降低总量效率，只要它们规模小、资源少、在竞争中退出即可。真正的问题是资源没有流向边际产出最高的地方。换句话说，错配不是生产率分布的存在，而是生产率分布和资源分布之间的错位。

本章会建立三层语言。第一层是最直观的边际产出均等原则：没有扭曲时，同质资本和劳动应在企业之间配置到边际产出相等。第二层是 Hsieh–Klenow 式楔子模型，用 TFPR 和 TFPQ 区分“企业真的更有技术效率”和“企业因为扭曲而价格收入生产率更高”。第三层是企业动态：进入、退出、扩张和收缩如何决定长期生产率。最后，我们把这些工具放回中国，理解国企与民企、金融约束、土地制度、地方保护、产业政策和市场准入如何进入增长问题。

本章的数据证据比第 25–26 章更难，因为企业微观数据通常不能直接公开复现。因此正文会区分公开宏观事实、行业/所有制线索和企业层面 TFPR/MRPK 证据；附录 E 和 `DATA-MANIFEST.md` 则负责说明哪些图表可复现、哪些只是机制性教学表。

27.1　学习目标

读完本章，你应该能够完成五件事。

第一，能够区分技术低效率和资源错配：企业生产率不同不一定是错配，资源没有流向高边际产出企业才是错配。第二，能够从企业生产函数推导资本和劳动边际产出均等条件，并解释为什么税费、补贴、融资约束和市场准入会造成楔子。第三，能够理解 TFPQ 与 TFPR 的区别：TFPQ 更接近企业物理生产率，TFPR 更接近企业面对

扭曲后的收入生产率。第四，能够用一个小型数值表计算错配导致的产出损失。第五，能够把中国增长中的 residual 放到企业动态中解释：市场化、开放和竞争提高生产率，不只是因为平均企业变好，也因为资源从低生产率企业转向高生产率企业。

27.2 核心问题

本章的主问题是：为什么同样的资本、劳动和技术环境，在不同资源配置下会产生不同总量产出？

先想一个简单例子。一个行业里有两家企业。企业 H 的生产率是企业 L 的两倍。如果资本市场和产品市场充分竞争，企业 H 应该获得更多资本和劳动，因为它把一单位投入转化为产出的能力更强。若企业 H 因融资约束拿不到贷款，而企业 L 因补贴或地方保护获得大量土地和信贷，那么行业总产出会低于潜在水平。这里没有发明新技术，也没有改变总资本；只是把资本从低回报用途转向高回报用途，总产出就可以提高。

这个问题对中国尤其重要。第 25 章表明，中国 2010 年以后资本深化贡献仍然很高，但 residual 明显变弱。一个自然解释是：新增资本越来越多进入边际回报较低的用途，或者高生产率企业受到融资、准入、土地、行政和竞争约束。第 26 章讨论了部门间转移，本章进一步讨论企业间转移。中国增长从投入驱动转向生产率驱动，本质上离不开资源配置效率。

27.3 从边际产出均等开始

设一个行业中有 $i = 1, \dots, N$ 家企业。企业 i 的生产函数为

$$Y_i = A_i K_i^{\alpha} L_i^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{27.1}$$

其中 A_i 是企业生产率。暂时假设产品价格相同，资本和劳动总量固定：

$$\sum_i K_i = \bar{K}, \qquad \sum_i L_i = \bar{L}. \tag{27.2}$$

社会计划者在给定总资源下最大化行业产出：

$$\max_{\{K_i, L_i\}_{i=1}^{N}} \sum_i A_i K_i^{\alpha} L_i^{1-\alpha} \quad \text{s.t.} \quad \sum_i K_i = \bar{K}, \quad \sum_i L_i = \bar{L}. \tag{27.3}$$

一阶条件为

$$\alpha A_i K_i^{\alpha-1} L_i^{1-\alpha} = \lambda_K, \tag{27.4}$$

$$(1-\alpha) A_i K_i^{\alpha} L_i^{-\alpha} = \lambda_L. \tag{27.5}$$

这意味着所有企业的资本边际产出相等，所有企业的劳动边际产出相等。

这个结论看似简单，但含义很深。如果一家企业的资本边际产出高于另一家企业，那么把少量资本从后者转给前者会提高总产出。只要边际产出没有均等，资源配置就还没有达到静态效率。

命题 27.1 (无扭曲配置的边际产出均等). *在生产函数 (27.1)、总资源约束 (27.2) 和内部解条件下，有效率配置要求所有企业的资本边际产出相等、劳动边际产出相等。*

证明. 构造拉格朗日函数

$$\mathcal{L} = \sum_i A_i K_i^{\alpha} L_i^{1-\alpha} + \lambda_K \left(\bar{K} - \sum_i K_i \right) + \lambda_L \left(\bar{L} - \sum_i L_i \right).$$

对 K_i 和 L_i 求一阶条件，得到 (27.4) 和 (27.5)。由于 λ_K 和 λ_L 对所有企业相同，边际产出必须在企业之间相等。 □

这就是错配分析的基准。任何使企业面对不同有效资本成本、不同有效劳动成本或不同产出价格的制度安排，都会破坏边际产出均等。

27.4 楔子：扭曲如何进入企业一阶条件

现实中企业面对的不是统一成本。设企业 i 面对产出楔子 $\tau_{Y,i}$ 和资本楔子 $\tau_{K,i}$。企业利润为

$$\Pi_i = (1 - \tau_{Y,i}) P_i Y_i - (1 + \tau_{K,i}) R K_i - w L_i. \tag{27.6}$$

其中 $\tau_{Y,i} > 0$ 可以理解为对企业产出或销售的税、行政负担、进入限制或市场份额限制；$\tau_{Y,i} < 0$ 可以理解为补贴或保护。$\tau_{K,i} > 0$ 表示企业资本成本更高，例如融资约束、抵押品不足或风险溢价；$\tau_{K,i} < 0$ 表示低息贷款、隐性担保或土地资本补贴。

企业一阶条件为

$$(1 - \tau_{Y,i}) \alpha \frac{P_i Y_i}{K_i} = (1 + \tau_{K,i}) R, \tag{27.7}$$

$$(1 - \tau_{Y,i})(1 - \alpha) \frac{P_i Y_i}{L_i} = w. \tag{27.8}$$

由 (27.7) 可见，若企业 i 面对更高资本楔子 $\tau_{K,i}$，它需要更高的收入资本边际产出 $P_i Y_i / K_i$ 才愿意使用资本。换句话说，融资受限企业看起来会有很高的边际资本回报，因为它被迫使用太少资本。若另一家企业享受低资本成本，它可能使用过多资本，边际资本回报较低。

这就是为什么错配不是看企业平均产出，而是看边际产出是否分散。若高生产率企业的 MRPK 很高，低生产率企业的 MRPK 很低，那么资本没有流向该去的地方。

27.5 TFPQ 与 TFPR

Hsieh–Klenow 框架的关键贡献，是把企业生产率分成两个概念。

TFPQ 是 physical productivity，接近企业把实物投入转化为实物产出的能力。若企业 i 的物理产出为 Y_i，则

$$\mathrm{TFPQ}_i = \frac{Y_i}{K_i^{\alpha} L_i^{1-\alpha}}. \tag{27.9}$$

TFPR 是 revenue productivity，接近企业单位投入创造的收入：

$$\mathrm{TFPR}_i = \frac{P_i Y_i}{K_i^{\alpha} L_i^{1-\alpha}}. \tag{27.10}$$

二者的区别很重要。一个企业 TFPQ 高，说明它技术或组织效率高；一个企业 TFPR 高，则可能说明它面对高价格、高需求，也可能说明它受到资源约束，规模太小，边际收益还很高。在无扭曲配置中，同一行业内企业的 TFPR 应该大致相等，因为资源会流向 TFPR 高的企业，直到边际收益被压低。若 TFPR 分散很大，说明资源配置可能被扭曲。

在 CES 需求结构下，行业产出为

$$Y_s = \left(\sum_i Y_{si}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \qquad \sigma > 1. \tag{27.11}$$

企业面对向下倾斜的需求曲线。若没有企业特定楔子，资源会调整到行业内 TFPR 相等。若存在楔子，TFPR 分散反映不同企业面对不同有效成本和约束。

为了看清这个结论从哪里来，可以再往前推半步。由 CES 聚合器，企业品种 i 面对的反需求可写成

$$P_{si} = P_s \left(\frac{Y_s}{Y_{si}} \right)^{\frac{1}{\sigma}}. \tag{27.12}$$

企业收入为 $P_{si}Y_{si}$。若企业生产函数为 $Y_{si} = A_{si} K_{si}^{\alpha_s} L_{si}^{1-\alpha_s}$，并且企业面对资本楔子和产出楔子，则一阶条件可以写成

$$\frac{\alpha_s}{\mu} \frac{P_{si} Y_{si}}{K_{si}} = \frac{1 + \tau_{K,si}}{1 - \tau_{Y,si}} R, \tag{27.13}$$

$$\frac{1 - \alpha_s}{\mu} \frac{P_{si} Y_{si}}{L_{si}} = \frac{1}{1 - \tau_{Y,si}} w, \tag{27.14}$$

其中 $\mu = \sigma/(\sigma - 1)$ 是垄断竞争下的加成。若所有企业面对相同楔子，右边在企业之间相同，收入资本边际产出和收入劳动边际产出会被拉平，TFPR 也会趋于相等。若高 A_{si} 企业因为融资、土地或准入约束面对更高有效成本，它必须保持更高的收入边际产出才能覆盖成本，结果就是 TFPR 偏高、规模偏小。

在 Hsieh–Klenow 的简化表达中，行业 TFP 可以写成企业 TFPQ 与相对 TFPR 扭曲的组合：

$$\mathrm{TFP}_s = \left[\sum_i \left(A_{si} \frac{\overline{\mathrm{TFPR}}_s}{\mathrm{TFPR}_{si}} \right)^{\sigma-1} \right]^{\frac{1}{\sigma-1}}. \tag{27.15}$$

这里 $\overline{\text{TFPR}}_s$ 是行业平均收入生产率。这个式子的直觉是：若高 A_{si} 企业的 TFPR 很高，说明它相对规模偏小、资源不足；把资源转向它会提高行业 TFP。若低生产率企业受到保护而 TFPR 偏低，它们占用过多资源，也会压低总量 TFP。

27.6 一个可计算的错配例子

为了让错配不只是抽象公式，考虑两家企业 H 和 L。劳动暂时固定相同，只分配资本。生产函数为

$$Y_i = A_i K_i^{\alpha}, \qquad \alpha = \frac{1}{3}. \tag{27.16}$$

企业 H 的生产率 $A_H = 2$，企业 L 的生产率 $A_L = 1$，总资本为 $K = 100$。

有效率配置要求资本边际产出相等：

$$\alpha A_H K_H^{\alpha-1} = \alpha A_L K_L^{\alpha-1}. \tag{27.17}$$

整理得

$$\frac{K_H}{K_L} = \left(\frac{A_H}{A_L}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = 2^{3/2} \approx 2.83. \tag{27.18}$$

因此高生产率企业 H 应获得约 73.9 单位资本，低生产率企业 L 获得约 26.1 单位资本。

表 27.1: 一个两企业错配例子

配置	K_H	K_L	总产出 Y	相对有效配置损失
有效率配置	73.9	26.1	11.36	0.0%
平均分配	50.0	50.0	11.05	2.8%
错配配置	30.0	70.0	10.34	9.9%

注：本表为模型数值例子，不是实际企业数据。计算采用 $Y = 2K_H^{1/3} + K_L^{1/3}$，总资本为 100。

这张表说明一个重要点：总资本不变，技术不变，只改变资本在企业之间的分配，总产出就会改变。平均分配看似公平，但不是有效率；更糟糕的是，如果低生产率企业获得过多资本，高生产率企业被融资约束，总产出会明显下降。

现实经济中的错配当然比两家企业复杂得多。企业不仅有资本，还有劳动、土地、管理者、信贷额度、政府采购、市场准入和出口机会。但基本逻辑不变：若资源没有流向边际产出高的地方，总量 TFP 会低于潜在水平。

27.7 数据入口：没有企业微观数据时怎样读错配

错配最理想的数据，是企业层面的面板数据。至少需要看到企业的产出或销售收入、资本、劳动、行业、地区、所有制、进入和退出；如果能进一步看到产品价格、融资成本、土地使用、税费负担和补贴，就可以更清楚地区分 TFPQ、TFPR 和楔子来源。中国制造业企业数据库、工业企业调查、海关企业数据、上市公司数据和税务数据都曾被用于相关研究，但其中相当一部分数据并不适合作为公开教材数据直接发放：一是访问受到限制，二是变量口径复杂，三是清洗规则会显著影响结果，四是企业价格和实物产出经常不可直接观察。

这并不意味着自学时只能停留在理论。更好的做法，是把证据分成三层。第一层是公开宏观和行业事实，它们不能直接证明企业错配，但能告诉我们“配置效率是否可能在总量 residual 中变得重要”。第二层是公开或半公开的所有制、行业、地区和上市公司事实，它们能提示金融、土地、准入和竞争楔子的方向。第三层才是严格的企业微观估计，例如行业内 TFPR 分散、MRPK 分散、企业规模与生产率的关系、进入退出对行业生产率的贡献。教材正文可以直接给第一层和第二层的读法，同时告诉读者第三层需要什么数据和识别条件。

表 27.2: 从可见事实到错配机制：证据层级

可观察事实	对应模型对象	可以支持的判断	不能直接支持的判断
资本深化仍高，但增长核算 residual 变弱	αg_K 高、$g_A + \alpha g_\Omega$ 弱	新增资本的平均效率可能下降，配置效率可能进入 residual	不能单独证明企业层面错配，也不能区分技术放缓和配置效率下降
企业间或行业内 MRPK、TFPR 分散很大	$\tau_{K,i}$、$\tau_{Y,i}$ 分散	资源没有被完全拉平到相近边际收益，是最接近错配的直接证据	若价格、质量、需求冲击和测量误差没有处理，不能机械等同于扭曲
国企或受保护部门资本份额高于产出份额	低资本成本、软预算约束、隐性担保	资本可能偏向低边际回报用途，值得检查 MRPK 和补贴机制	不能仅凭所有制判断效率高低，也不能忽视承担公共目标的企业
高生产率企业规模偏小、低生产率企业退出慢	进入退出选择、$V(A)$、$b(A)$	企业动态机制可能失灵，高效率企业扩张受限	需要企业年龄、进入退出和生产率估计，宏观数据无法直接给出

可观察事实	对应模型对象	可以支持的判断	不能直接支持的判断
地区土地、信贷和投资强度与产出回报不匹配	土地楔子、地方政府激励、资本楔子	空间和地方财政机制可能造成资源流向偏差	不能自动推出全国 TFP 损失，需要控制产业结构和需求条件

表 27.2 的作用，是防止两种常见误读。第一种误读是“只要 TFP 放缓，就是错配”。这太快了。TFP 放缓也可能来自技术吸收变慢、全球技术前沿变化、人口结构、需求结构或测量问题。第二种误读是“只要没有企业微观数据，就不能谈错配”。这也太窄了。公开数据不能替代企业层面估计，但可以帮助我们判断哪些机制值得重点追问。

把第 25 章的增长核算事实接到本章，可以形成一个清楚的证据链。若一个经济体在某阶段表现为资本贡献很高、劳动贡献有限、residual 下降，那么可以先写成

$$\underbrace{g_Y - \alpha g_K - (1-\alpha) g_L}_{\text{增长核算 residual}} = g_A + \alpha g_\Omega. \tag{27.19}$$

这里 g_A 是狭义技术和组织效率增长，g_Ω 是配置效率变化。公开宏观数据只能观察左边，不能把 g_A 和 g_Ω 完全分开。因此，下一步不是直接宣布“错配上升”，而是寻找企业和行业证据：高生产率企业是否更难获得信贷？资本密集行业的边际回报是否下降？受保护企业是否退出更慢？市场准入放松后，行业生产率是否通过再配置上升？这才是从宏观事实走向微观机制的正确路径。

对中国而言，这个区分尤其重要。高投资率和强产业政策可以在基础设施不足、外部性强和学习空间大的阶段提高增长；但在资本存量已经很大、地方债务约束上升、人口增长放缓和技术追赶变难之后，同样的投资扩张可能更容易表现为低回报项目、重复建设、债务滚动和企业退出困难。模型语言不是要把政策简单贴上“好”或“坏”的标签，而是问一个更精确的问题：资源倾斜是否提高了社会边际回报，还是让低边际回报主体占用了更多资本和土地？

27.8 企业动态：进入、退出与选择

静态错配分析问：给定一组企业和技术，资源是否配置有效？企业动态进一步问：哪些企业能进入，哪些企业能扩张，哪些企业会退出？

设潜在进入企业需要支付固定成本 f_e，进入后抽取生产率 A_i。在没有扭曲的竞争环境中，低生产率企业利润低，可能退出；高生产率企业利润高，会扩张。这个选择机制提高平均生产率。若市场准入严格、融资约束严重、地方保护强，进入和退出机制就会失灵。

可以把企业价值写成一个简单 Bellman 方程：

$$V(A) = \max\{0, \pi(A) - f + \beta\mathbb{E}[V(A') \mid A]\}, \tag{27.20}$$

其中 0 表示退出价值，$\pi(A)$ 是当期利润，f 是固定运营成本。企业继续经营当且仅当

$$\pi(A) - f + \beta\mathbb{E}[V(A') \mid A] \geq 0. \tag{27.21}$$

若低生产率企业受到保护，例如补贴、软预算约束或行政保护，则它们的有效利润变为

$$\tilde{\pi}(A) = \pi(A) + b(A), \tag{27.22}$$

其中 $b(A)$ 是补贴或保护价值。若 $b(A)$ 对低生产率企业更高，那么本应退出的企业会继续占用资源。反过来，若高生产率企业面对融资约束或准入障碍，它们的有效利润被压低，扩张速度会变慢。总量生产率于是受到双重损害：低生产率企业退不出去，高生产率企业长不大。

这也是为什么企业动态比静态平均生产率更重要。一个经济体可以有许多低生产率企业，只要它们小且逐渐退出，问题未必严重；真正严重的是低生产率企业长期占用大量资源，高生产率企业无法扩张。

27.9 中国经验：错配从哪里来

中国的资源错配可能来自多个渠道。这里不把它们写成口号，而是逐一翻译成模型中的楔子。

第一，金融约束。若民营或年轻企业缺少抵押品、信用记录和银行关系，它们面对的资本成本更高，即 $\tau_{K,i}$ 更高。即使这些企业 A_i 高，也可能因为资本不足而保持较小规模，表现为较高 MRPK 或 TFPR。

第二，软预算约束和隐性担保。若某些企业因为所有制、地方保护或系统重要性获得低息信贷和持续救助，它们面对的资本成本较低，即 $\tau_{K,i} < 0$。若这些企业生产率不高，就会占用过多资本，压低总量 TFP。

第三，土地和空间配置。工业用地、商业用地、住宅用地和基础设施项目常常受到行政配置影响。若土地低价配置给低回报项目，或者高生产率服务业和创新企业被高房价、空间限制挤出，土地楔子会转化为资本和劳动错配。

第四，市场准入和地方保护。若企业进入某些行业、地区或政府采购市场受到限制，高生产率潜在进入者无法进入，现有低效率企业得到保护。模型中这既可以表现为产出楔子 $\tau_{Y,i}$，也可以表现为进入固定成本 f_e 上升。

第五，税费和监管差异。若不同企业面对不同税负、合规成本、环保标准执行强度或行政负担，企业间有效产出价格和成本不同，TFPR 会产生分散。

第六，管理能力和企业治理。管理不善本身是低 A_i，不是错配；但如果低管理能力企业因保护而占用资源，或者高管理能力企业因制度障碍不能扩张，就会转化为错配。

27.10　错配、产业政策与竞争

讨论错配时，很容易落入两个极端。一个极端说，所有政府干预都会错配；另一个极端说，只要目标是产业升级，资源倾斜就是合理的。增长经济学需要更精细的判断。

如果政策把资源从低社会回报用途转向高社会回报用途，例如缓解创新外部性、基础设施瓶颈、融资约束或学习外部性，它可能提高长期生产率。第 22 章讨论创新政策时已经看到，研发补贴、公共采购和标准建设有可能纠正市场失灵。

但如果政策按所有制、行政关系、地方短期 GDP 或规模指标分配资源，而不是按社会边际回报分配资源，它就可能加重错配。此时，补贴不是纠正市场失灵，而是在边际产出较低的地方增加资源。

判断产业政策是否改善资源配置，至少要问四个问题。第一，政策针对的是明确外部性还是模糊目标？第二，受支持企业是否具有高生产率、学习潜力或外部性？第三，政策是否有退出机制，避免低效率企业长期依赖保护？第四，政策是否保留竞争和进入，防止在位企业把支持变成租金？

27.11　与增长核算的连接

第 25 章里，中国 2010–2019 年资本深化贡献仍高，但 residual 较弱。本章给出一种解释语言：资本增加本身并不保证 A 提高；若新增资本流向低边际产出企业或项目，增长核算中资本贡献会高，但 residual 会低。

可以把这一点写成一个简单的“有效资本”表达。设观测资本为 K，配置效率为 $\Omega \in (0,1]$，有效资本为

$$K^e = \Omega K. \tag{27.23}$$

生产函数为

$$Y = A(K^e)^{\alpha} L^{1-\alpha} = A(\Omega K)^{\alpha} L^{1-\alpha}. \tag{27.24}$$

取对数增长：

$$g_Y = g_A + \alpha g_K + (1-\alpha) g_L + \alpha g_{\Omega}. \tag{27.25}$$

如果配置效率 Ω 下降，即 $g_{\Omega} < 0$，那么即使 K 快速增长，总产出增长也会被拖累。在普通增长核算里，αg_{Ω} 往往会进入 residual。因此，TFP 放缓可能不是技术停滞，而是配置效率变差。

这对理解中国增长减速很重要。若高投资阶段伴随投资效率下降，增长问题就不是“多投一点”可以解决，而是要提高资本筛选、企业进入退出、金融资源配置、土地使用和竞争机制。

27.12 中国与发展延伸：怎样读企业生产率事实

很多发展中国家都不是缺少企业，而是缺少让高生产率企业成长的环境。街边小店、家庭作坊、低效率企业和高效率企业并存，本身不是问题；问题是高效率企业是否能获得土地、信贷、人才、市场和法治保护，低效率企业是否会在竞争中收缩或退出。

中国经验说明，生产率增长可以来自企业动态。改革开放早期，乡镇企业、民营企业和外资企业进入，改变了原有企业结构；加入 WTO 后，出口市场和竞争压力促进高效率企业扩张；城市和产业集群降低匹配成本，帮助供应链学习。这些机制都可能提高总量 TFP。

但进入中高收入阶段后，企业动态面临新挑战。若市场准入壁垒上升，若金融资源偏向抵押品和隐性担保而非生产率，若地方政府更偏好大项目和短期投资，若创新企业面对不确定监管和高固定成本，高生产率企业的扩张就会受限。此时，总量经济可能仍有高投资和大量企业，但增长质量下降。

因此，理解企业生产率事实时，不要只问“平均生产率是多少”。更好的问题是：生产率分布有多分散？高生产率企业是否更大？低生产率企业是否退出？新企业是否能进入？资本和劳动的边际产出是否在企业之间接近？这些问题比单一平均数更接近增长机制。

27.13 常见误区

1. **把低生产率企业存在本身当作错配。**低生产率企业可以存在，关键是它们是否占用过多资源，是否阻碍高生产率企业扩张。

2. **把 TFPR 高误读为企业技术高。** TFPR 高可能是企业受到约束、规模太小或价格较高；TFPQ 才更接近物理生产率。

3. **只看平均生产率。**总量 TFP 还取决于资源如何分布在不同企业之间。

4. **认为所有补贴都造成错配。**如果补贴纠正外部性或融资约束，可能提高效率；如果补贴保护低效率企业，则会加重错配。

5. **忽视退出机制。**没有退出，低生产率企业会长期占用资源；没有进入，高生产率潜在企业无法替代旧企业。

6. **把错配当作纯微观问题。**企业层面错配会进入总量 TFP、资本回报、投资效率和长期增长率，是宏观增长问题。

27.14 英文术语表

英文术语	中文含义与说明
Misallocation	资源错配，要素没有流向边际产出最高的用途，从而压低总量生产率。
Marginal product	边际产出，增加一单位投入带来的产出增加。
Wedge	楔子，私人一阶条件和社会有效配置条件之间的差异。
Capital wedge	资本楔子，使不同企业面对不同有效资本成本的扭曲。
Output wedge	产出楔子，使不同企业面对不同有效产出价格或销售约束的扭曲。
TFPQ	Physical total factor productivity，企业物理生产率。
TFPR	Revenue total factor productivity，企业收入生产率，常用于识别资源错配。
Firm dynamics	企业动态，企业进入、退出、扩张和收缩的过程。
Selection effect	选择效应，高生产率企业扩张、低生产率企业退出带来的平均生产率提高。
Soft budget constraint	软预算约束，企业预期亏损后仍会被救助，从而削弱退出和效率纪律。

27.15　本章 Review

如果我来 review 你对本章的理解，第一条标准是你是否能把“企业生产率不同”和“资源错配”区分开。生产率不同是现实经济的常态；错配是高生产率企业没有得到足够资源、低生产率企业占用过多资源。真正需要检查的是边际产出和 TFPR 的分散，而不是单纯企业数量或平均生产率。

第二，你应该能写出企业一阶条件。无扭曲时，资本和劳动的边际产出在企业之间趋于均等；有资本楔子、产出楔子、融资约束或补贴时，不同企业面对不同有效成本，边际产出会分散。这个分散就是总量 TFP 损失的来源。

第三，你应该能解释 TFPR 和 TFPQ。TFPQ 更像企业真实生产效率；TFPR 高则可能意味着企业被约束、规模偏小、价格高或需求强。Hsieh–Klenow 框架的重点不是说所有 TFPR 高的企业都技术先进，而是说同一行业内 TFPR 分散很大时，资源配

置可能有问题。

第四，你应该能把本章和中国增长连接起来。中国过去增长中的 residual 包含企业进入、市场化、开放竞争和资源再配置；2010 年以后 residual 放缓，可能与资本配置效率下降、低回报投资、融资偏向、土地和地方政府激励有关。本章不是替这些因果机制下最终结论，而是给出一套可检验语言：看边际产出、看楔子、看进入退出、看高生产率企业能否扩张。

第五，你应该能把证据分层。公开宏观数据可以说明资本深化、residual 和投资效率之间的张力，但不能直接证明企业错配；行业和所有制数据可以提示楔子方向，但仍需要谨慎解释；企业微观数据中的 TFPR、MRPK、进入退出和规模–生产率关系，才最接近错配机制本身。若你能说明每一层证据能回答什么、不能回答什么，本章就不是停留在“资源错配很重要”的口号，而是进入了研究生阶段的经验判断。

27.16 核心文献

资源错配的核心入口是 [Hsieh and Klenow, 2009]，它用中国和印度制造业数据说明，如果企业间边际产出分散能够下降到美国水平，总量 TFP 可能显著提高。政策扭曲与异质企业的理论框架可读 [Restuccia and Rogerson, 2008]。企业进入、退出和长期均衡的基础模型可读 [Hopenhayn, 1992]；跨国企业选择与配置效率证据可读 [Bartelsman et al., 2013]。贸易开放如何通过企业间再配置提高行业生产率，可读 [Melitz, 2003]。理解中国增长时，本章还应与 [Song et al., 2011] 和 [Zhu, 2012] 一起阅读。

第二十八章　制度、市场化与地方政府

前面三章已经把中国增长拆成事实、结构转型和资源错配。第 25 章告诉我们，中国增长不能只用一句“高投资”解释；第 26 章说明，劳动和资本在部门之间移动会改变总生产率；第 27 章进一步说明，即使在同一行业内部，企业之间的资源配置也会影响 TFP。本章进入更深一层：为什么资源会那样配置？为什么有些企业能进入和扩张，有些企业不能？为什么地方政府有时推动基础设施、招商引资和产业集聚，有时又制造地方保护、低回报投资和软预算约束？这些问题都属于制度、市场化和政府激励。

这里的“制度”不是一个用来解释一切的万能词。制度指的是一组规则、执行机制和预期：产权能否被保护，合同能否被执行，价格是否传递稀缺性，企业能否公平进入，地方政府面对怎样的财政和晋升激励，金融体系把资金配置给谁，失败企业是否能够退出。制度影响增长，不是因为制度这个词本身神秘，而是因为它改变投资、创新、进入、退出和资源配置的收益。

本章的主线有三层。第一，制度通过剩余索取权影响投资和创新：若企业家不能获得投资回报，她不会投入足够资本和研发。第二，市场化通过降低楔子和准入壁垒提高配置效率：若价格、金融和土地配置更接近生产率信号，资源会更容易流向高回报用途。第三，地方政府既是增长的推动者，也是潜在扭曲的来源：基础设施、园区、公共服务和营商环境可以提高生产率，但土地财政、地方保护和行政性资源配置也可能降低长期效率。

本章和附录 E 的关系，是“机制解释”和“指标口径”的关系。制度、市场化、地方政府和营商环境通常只能通过代理变量观察；附录 E 会提醒这些指标能说明什么、不能说明什么。本章则负责把代理变量放回楔子、投资激励和配置效率模型中。

28.1　学习目标

读完本章，你应该能够完成五件事。

第一，能够把“制度影响增长”翻译成模型语言：制度不是直接进入生产函数的口号，而是通过剩余索取、交易成本、执行概率、税费楔子、准入壁垒和政府目标函数影响 K、H、A 与资源配置。

第二，能够推导一个简单的产权与投资模型，并说明为什么更强的剩余索取权会提高投资，但也理解产权保护不等于保护垄断和低效率租金。

第三，能够把市场化和第 27 章的错配框架连接起来：市场化不是抽象价值判断，而是减少企业面对的 $\tau_{K,i}$、$\tau_{Y,i}$ 和进入成本差异，从而降低 TFPR 离散度。

第四，能够用一个地方政府目标函数解释中国式增长中的双重性：地方政府竞争可以推动基础设施、招商引资和产业集聚，也可能导致重复建设、地方保护、债务扩张和对短期 GDP 的偏好。

第五，能够客观阅读制度相关数据。制度指标通常是复合指标或代理变量，不能当作因果证明；但它们能帮助我们把“制度变好/变差”的说法变成更可讨论的事实。

28.2 核心问题

本章围绕一个问题展开：制度如何通过激励、市场和政府行为影响长期增长？

这个问题容易被两种极端说法误导。第一种说法把制度当作唯一答案：只要制度好，增长自然发生。这个说法过于简单。没有资本积累、人力资本、技术扩散、产业组织和企业能力，制度本身不会自动变成产出。第二种说法把制度当作背景噪音：只要投资率高、产业政策强、工程能力足够，制度不重要。这个说法同样错误。投资投向哪里，产业政策支持谁，工程能力能否转化为企业创新，都取决于规则和激励。

更好的理解是：制度决定增长机制能否有效运转。资本积累需要产权和金融配置，结构转型需要劳动流动和土地制度，企业动态需要准入竞争和破产退出，创新需要知识产权、竞争压力和容错环境，地方公共品需要政府能力和财政约束。因此，制度不是替代前面章节的解释，而是把前面章节中的变量连接起来。

28.3 产权、剩余索取权与投资

先从最简单的投资问题开始。设一个企业家有生产函数

$$y = Ak^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{28.1}$$

其中 k 是资本，A 是企业生产率。投资之后，企业家只能获得产出剩余的一部分 $\theta \in [0,1]$。这里的 θ 可以理解为产权保护、合同执行、税费稳定性、行政干预风险和政策不确定性的综合结果。若 $\theta = 1$，企业家完全获得投资回报；若 θ 较低，部分回报被侵占、征收、拖欠或不确定性折损。

企业家的问题是

$$\max_{k \geq 0} \theta Ak^{\alpha} - Rk, \tag{28.2}$$

其中 R 是资本成本。一阶条件为

$$\theta \alpha Ak^{\alpha-1} = R. \tag{28.3}$$

由此得到最优资本

$$k^*(\theta) = \left(\frac{\theta \alpha A}{R} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{28.4}$$

命题 28.1 (剩余索取权与投资). *在问题 (28.2) 中，若存在内点解，则最优资本 $k^*(\theta)$ 随剩余索取权 θ 上升而上升。相应地，产出 $y^*(\theta) = A[k^*(\theta)]^\alpha$ 也随 θ 上升而上升。*

证明. 由 (28.4)，

$$\ln k^*(\theta) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\ln\theta + \ln(\alpha A) - \ln R\right].$$

因此

$$\frac{\partial \ln k^*(\theta)}{\partial \ln \theta} = \frac{1}{1-\alpha} > 0.$$

又因为 $y^*(\theta) = A[k^*(\theta)]^\alpha$，所以

$$\frac{\partial \ln y^*(\theta)}{\partial \ln \theta} = \alpha \frac{\partial \ln k^*(\theta)}{\partial \ln \theta} = \frac{\alpha}{1-\alpha} > 0.$$

命题得证。 □

这个命题很简单，但它抓住了制度影响增长的第一条通道。若企业家预期投资回报不稳定，或者合同执行成本高，或者政策变化可能使利润无法实现，那么有效的 θ 下降，投资就会低于社会有效水平。注意，这里不是说政府税收一定有害。若税收用于公共品、教育、基础设施和法治能力，可能提高 A 或降低 R。真正的问题是：税费和行政干预是否稳定、透明、可预期，并且是否把资源用于提高生产率。

这个模型也能解释创新。把 k 换成研发投入 x，把未来利润写成 $\pi(x)$，企业家的问题变成

$$\max_x \ \theta\pi(x) - x.$$

若创新成果容易被无偿模仿，或者企业担心创新成功后反而被过度征收，θ 下降，研发投入就会不足。第 21–24 章讨论创新时强调利润激励和知识外溢，本章则强调这些利润能否被稳定获得。

28.4 制度不只是产权：市场化与楔子

产权模型只解释了投资激励的一部分。制度还会影响资源在企业之间、地区之间和部门之间的配置。第 27 章已经写出企业面对的楔子：

$$(1-\tau_{Y,i})\alpha\frac{P_iY_i}{K_i} = (1+\tau_{K,i})R, \tag{28.5}$$

$$(1-\tau_{Y,i})(1-\alpha)\frac{P_iY_i}{L_i} = w. \tag{28.6}$$

现在可以给这些楔子更具体的制度解释。$\tau_{K,i}$ 可以来自融资约束、隐性担保、抵押品要求、行政性信贷偏向、土地资本化和地方融资平台。$\tau_{Y,i}$ 可以来自市场准入、许可证、地方保护、税费差异、补贴、监管不确定性或行政采购偏向。市场化改革的一个核心效果，就是让这些企业特定楔子变小、变透明、变少依赖身份和关系。

这说明市场化不是一句“政府少一点、市场多一点”就能概括。市场化更准确地说，是让价格、利润、破产、进入和退出更能反映稀缺性与生产率。若高生产率民营企业面对较高资本成本，而低生产率企业因隐性担保获得低成本资金，那么平均投资率可能很高，但总量 TFP 仍然偏低。若地方政府用土地、补贴和行政准入保护本地企业，短期就业和财政收入可能稳定，但长期会牺牲竞争和企业动态。

我们可以把市场化的生产率效果写成一个简化表达。设无扭曲时行业 TFP 为 A^*，实际 TFP 为

$$A = A^*\Omega, \qquad 0 < \Omega \le 1, \tag{28.7}$$

其中 Ω 是配置效率。若企业间楔子离散度下降，Ω 上升；若金融、土地、准入和补贴更多偏离生产率信号，Ω 下降。把它放入总量生产函数

$$Y = A^*\Omega K^{\alpha} H^{1-\alpha},$$

得到增长率分解

$$g_Y = g_{A^*} + g_\Omega + \alpha g_K + (1-\alpha) g_H. \tag{28.8}$$

这条式子很重要。制度和市场化改革不一定表现为更多资本 K，而可能表现为 $g_\Omega > 0$：同样的资本和人力资本被用得更好。反过来，如果资本继续快速积累但配置效率下降，$g_\Omega < 0$ 会抵消资本深化的贡献。

28.5 中国经验中的制度变化

中国改革开放后的增长，不能被理解为一次性制度选择，而应理解为连续的制度重组。

第一阶段是农业家庭联产承包责任制。它改变了农户的剩余索取权，把努力、产出和收入重新连接起来。用本章模型说，就是提高了农业生产中的有效 θ。这不是先有大量新资本再有增长，而是先有激励变化，再释放原有劳动力、土地和组织能力的产出潜力。

第二阶段是乡镇企业、价格改革和非国有部门扩张。乡镇企业的产权形式并不完全等同于西方教科书中的私有企业，但它们在特定地方财政和政治环境中给地方政府、社区和经营者提供了较强增长激励。这里的关键不是名义所有制，而是剩余索取、竞争压力和预算约束如何实际运行。

第三阶段是 1990 年代后期到加入 WTO 前后的市场化和开放。国企改革、民营企业进入、外资进入、出口制造业、沿海产业集聚和更大范围的产品市场竞争，共同降低了许多行业中的进入壁垒和配置扭曲。第 25 章中 2000–2010 年较高的 residual，可以部分理解为资本深化、开放学习和配置效率改善同时发生。

第四阶段是进入中高收入以后。增长问题逐渐从“如何动员资源”转向“如何提高资源使用质量”。地方政府仍然能推动基础设施和产业集聚，但土地财政、房地产相关

投资、地方债务、低回报项目和行政性资源配置的边际成本上升。此时，制度改革的重点不再只是放开价格和鼓励投资，而是竞争中性、要素市场化、破产退出、创新激励、监管可预期性和地方财政约束。

这个分期能帮助我们避免两个误区。一个误区是把中国增长解释为单一制度优势，仿佛同一种地方政府激励从 1978 年到今天始终同样有效。另一个误区是把制度问题讲成抽象好坏，忽略不同阶段需要不同制度功能。低收入阶段最缺的是基本激励和资源动员；中等收入阶段更缺的是有效配置和创新制度；接近前沿时更需要开放竞争、基础研究、产权保护、金融筛选和监管稳定。

28.6　地方政府：增长推动者与扭曲来源

中国增长研究中，地方政府是绕不开的主体。地方政府建设基础设施，提供工业园区和公共服务，协调土地、审批和招商，推动产业集群，也承担财政收入、就业、社会稳定和上级考核压力。它既不是纯粹的“发展型政府”，也不是纯粹的“寻租者”。它的行为取决于目标函数。

设某地的生产率受公共投入 G 和行政性干预 b 影响。公共投入包括道路、港口、供电、教育、治理能力和基础设施；行政性干预 b 可以代表地方保护、准入限制、选择性补贴、低价土地和对特定企业的保护。总产出写为

$$Y(G,b)=A(1+\eta G)(1-\chi b^2)K^{\alpha}L^{1-\alpha},\qquad \eta>0,\ \chi>0. \tag{28.9}$$

这里 G 提高生产率，b 在短期可能服务于招商、财政或本地企业保护，但会因资源错配、竞争不足和重复建设降低有效生产率。地方政府目标函数设为

$$V(G,b)=Y(G,b)-\frac{c}{2}G^2+\mu b-\frac{d}{2}b^2. \tag{28.10}$$

其中 $cG^2/2$ 是公共投入成本，μb 是地方政府从干预中得到的短期收益，例如土地出让、短期 GDP、保护本地税源或招商排名，$db^2/2$ 是显性政治或财政成本。

对 b 求一阶条件：

$$\frac{\partial V}{\partial b}=-2\chi bA(1+\eta G)K^{\alpha}L^{1-\alpha}+\mu-db=0. \tag{28.11}$$

因此

$$b^{*}=\frac{\mu}{d+2\chi A(1+\eta G)K^{\alpha}L^{1-\alpha}}. \tag{28.12}$$

这个表达式给出一个清楚结论。若地方政府从行政干预中获得的短期收益 μ 越大，干预强度 b^{*} 越高；若干预导致的效率损失 χ 被充分内部化，或显性成本 d 较高，b^{*} 越低。换句话说，地方政府竞争能否促进增长，取决于考核、财政和问责机制是否让地方政府承担长期效率成本。

对 G 求一阶条件可以得到

$$\eta A(1-\chi b^2)K^{\alpha}L^{1-\alpha}=cG. \tag{28.13}$$

当公共投入回报高、成本低，并且干预 b 不太扭曲时，地方政府会选择较高 G，这对应基础设施、产业配套和营商环境改善。若 b 很高，公共投入的有效回报下降，基础设施可能变成低效率项目的配套，而不是生产率提升的来源。

这个模型把中国地方政府的双重性放在同一张图里。一方面，地方政府在高增长阶段可以像“增长企业家”：通过基础设施、园区、招商、协调和行政效率降低交易成本，提高 G。另一方面，若财政压力和考核激励偏向短期指标，地方政府也可能通过土地融资、低价工业用地、保护本地企业和隐性担保提高 b。增长质量取决于 G 与 b 的相对力量。

28.7 数据事实：制度指标该怎么读

制度数据很难测量。一个国家的产权、法治、监管质量和政府能力不是像 GDP 那样直接可加总的变量。表 28.1 使用 World Bank Worldwide Governance Indicators 的四个估计值，范围大致为 -2.5 到 2.5。这些指标是多来源综合指标，反映专家评估、调查和其他来源的汇总，不应被当作精确测量，更不能单独用来证明因果关系。

在使用这类指标前，需要先记住三个限制。第一，它们带有测量误差：同一个制度维度很难被不同来源完全一致地观察，年度变化可能部分来自信息源、权重或评价环境变化。第二，它们是复合指标：Government Effectiveness、Regulatory Quality 和 Rule of Law 各自包含很多子机制，不能直接对应模型中的某一个参数。第三，它们更适合提出问题，而不是结束争论。若指标上升，我们还要继续问：它通过降低交易成本、提高公共品质量、改善合同执行，还是通过其他渠道影响增长？若指标下降，也要区分是实际制度变化、预期变化还是测量变化。

这张表至少提供三个阅读训练。第一，在 WGI 口径下，政府效能指标在 2010 年以后上升，这可以和基础设施、行政能力、公共服务与政策执行能力的改善放在一起理解，但不能把二者机械等同。第二，监管质量和法治指标的变化更温和，说明“政府能力强”不等于“市场规则完全中性”。第三，反腐败控制指标改善并不自动等同于企业预期改善；如果监管可预期性不足，企业仍可能面对不确定性。因此，制度分析必须区分政府能力、市场规则、法治执行和廉洁治理。

表 28.2 进一步列出几组可观察代理变量。它们也不是制度本身，但能帮助我们观察市场化和创新环境的某些侧面。

这些数据的含义需要谨慎解释。私人部门信贷占 GDP 比重上升，说明金融深化，但金融深化不等于金融配置有效。如果信贷更多流向有抵押品或隐性担保的部门，而不是高生产率企业，信贷扩张可能伴随错配。R&D 支出和居民专利申请快速增长，说明创新投入和创新产出指标上升，但第 22 章已经提醒过，专利数量不等于质量阶梯跃

表 28.1: 中国若干治理指标的估计值

指标	1996	2000	2010	2020	2024
Government Effectiveness	-0.31	-0.50	-0.13	0.57	0.90
Regulatory Quality	-0.33	-0.28	-0.13	-0.07	-0.07
Rule of Law	-0.53	-0.61	-0.70	-0.51	-0.58
Control of Corruption	-0.33	-0.51	-0.59	0.05	0.09

数据来源：World Bank, Worldwide Governance Indicators [World Bank, 2026b]，经 World Bank API 于 2026-05-22 抓取。指标为治理估计值，范围大致为 −2.5 到 2.5。本表只用于描述，不用于单独识别制度对增长的因果效应。

表 28.2: 中国市场化、金融和创新环境的若干代理变量

变量	2000	2010	2020	2023	2024
国内私人部门信贷，GDP %	109.9	124.4	179.1	189.6	194.2
R&D 支出，GDP %	0.88	1.68	2.36	2.58	–
居民专利申请，件	25346	293066	1344817	–	–
政府最终消费，GDP %	17.0	14.8	17.6	17.2	16.6
上市公司总市值，GDP %	–	65.0	81.9	59.9	62.7

数据来源：World Bank, World Development Indicators [World Bank, 2026a]，经 World Bank API 于 2026-05-22 抓取。居民专利申请最新可得年份在本次 API 抓取中为 2020；R&D 支出最新可得年份为 2023。本表变量分别为 FD.AST.PRVT.GD.ZS、GB.XPD.RSDV.GD.ZS、IP.PAT.RESD、NE.CON.GOVT.ZS 和 CM.MKT.LCAP.GD.ZS。

升。政府消费占 GDP 比重相对稳定，说明国家在总需求和公共服务中持续存在，但不能告诉我们政府支出质量。上市公司市值反映资本市场规模，但资本市场能否筛选创新企业，还取决于信息披露、投资者保护、退市机制和监管可信度。

因此，制度数据最好的用法不是给出一句“制度好/制度差”的总评价，而是帮助我们提出更精确的问题：政府效能提高是否降低了交易成本？监管质量是否让企业预期更稳定？金融深化是否降低了高生产率企业的资本楔子？资本市场是否把资金导向创新，而不是只放大资产价格？专利增长是否对应真实质量改善？这些问题才可以进入模型和实证。

28.8 制度、创新与中等收入转型

进入中高收入阶段后，制度对增长的作用会发生变化。在低收入追赶阶段，很多增长来自把已有资源用起来：农业激励、基础设施、劳动转移、外资进入、出口学习和简单制造业扩张。此时，制度的关键功能是动员资源、提供基本秩序、允许进入和形成市场。

但当经济接近技术前沿，增长越来越依赖创新、复杂服务业、品牌、软件、基础研究、金融筛选和企业组织能力。此时制度的关键功能变成另外几件事。

第一，保护创新收益，但避免保护低效率垄断。知识产权要让企业愿意研发，也要防止专利丛林、行政垄断和平台封锁阻碍后续创新。

第二，让失败能够退出。创新经济必然有大量失败项目。如果地方政府、金融机构或产业政策持续保护低效率企业，资源就不能流向新企业和高生产率企业。破产制度、退市制度和预算约束不是冷冰冰的金融技术，而是长期增长机制。

第三，保持监管可预期。创新投资通常是长期和不可逆的。若企业无法预期数据、平台、教育、医疗、金融、房地产或科技行业的监管边界，等式 (28.2) 中的有效 θ 会下降。

第四，提升公共品质量。基础研究、教育、标准、计量、公共数据、司法能力、知识产权审查、交通和数字基础设施，都是私人企业难以单独供给的互补投入。它们对应地方政府模型中的 G，而不是 b。

第五，降低身份性资源配置。若融资、土地、准入和政府采购主要依赖所有制、行政级别或地方关系，高生产率企业就可能无法扩张。中等收入转型需要让企业规模更依赖生产率，而不是依赖关系和担保。

28.9 中国与发展延伸

从发展经济学角度看，中国经验的启发不在于提供一个可以简单复制的制度模板，而在于说明制度功能与增长阶段高度相关。

许多低收入经济体缺少的不是完整的先进制度，而是能让农户、企业和地方组织相信“多生产可以多获得”的基本激励。没有这个激励，资本援助、基础设施和产业政策都可能变成低效率项目。中国早期改革的一个重要经验，是先在边际上改变剩余索取和进入空间，而不是一开始就设计完整的现代制度体系。

但这个经验不能直接推到后期。早期有效的地方竞争和投资动员，在中高收入阶段可能产生新的成本。基础设施从短缺变成相对充足以后，继续以土地、债务和大项目推动增长，边际回报会下降。招商引资从引进制造业和技术学习，变成同质化补贴竞争时，可能只是地区间租金转移。产业政策从解决协调失败，变成保护在位企业时，会降低企业动态。

因此，本章对中国增长的判断是双重的。中国过去的高增长确实离不开制度变化、市场化和地方政府激励；但未来增长不能只依赖过去同一套激励。若要从资本深化转向生产率和创新驱动，就需要更强的竞争中性、更透明的监管、更硬的预算约束、更有效的破产退出、更高质量的公共品和更稳定的创新预期。

这也解释了为什么制度章必须放在资源错配之后。若没有第 27 章，我们容易把制度讨论停留在宏大叙事。现在我们可以说得更精确：制度通过改变 θ 影响投资，通过改变 $\tau_{K,i}$ 和 $\tau_{Y,i}$ 影响错配，通过改变 G 和 b 影响地方政府行为，通过改变 Ω 影响总量 TFP。这样的制度分析才真正进入增长理论。

28.10 常见误区

误区一：把制度当作单一变量。制度包括产权、合同、监管、财政、金融、地方政府、市场准入、司法和政治激励。不同制度维度可能同时改善或分化，不能用一个词概括全部。

误区二：把政府和市场看成简单替代。发展需要市场价格和竞争，也需要政府提供公共品、执行规则和解决协调失败。真正的问题不是政府多还是少，而是政府行为是在提高 G，还是在提高 b。

误区三：把高投资等同于好制度。高投资可能来自强动员能力，也可能来自软预算约束和低回报项目。制度质量要看投资是否流向高社会回报用途。

误区四：把制度指标当作因果证明。 WGI、市场化指数、营商环境指标和金融深化指标都只是代理变量。它们能描述变化，不能单独识别制度改革的因果效应。

误区五：把过去成功机制永久化。一个阶段促进增长的制度安排，在另一个阶段可能变成约束。理解中国增长，必须区分低收入追赶、工业化扩张、中高收入转型和前沿创新。

28.11 英文术语表

Property rights	产权；经济主体对资产、收益和控制权的可执行权利。
Residual claimant	剩余索取者；在支付成本和合同义务后获得剩余收益的主体。
Appropriability	可占有性；创新或投资回报能否被投资者获得的程度。
Marketization	市场化；价格、进入、退出和资源配置更依赖市场信号而非行政分配的过程。
State capacity	国家能力；政府提供公共品、执行规则、征税、监管和协调的能力。
Regulatory quality	监管质量；规则是否稳定、透明、有效，并能支持私人部门发展。
Local government competition	地方政府竞争；地方政府围绕投资、产业、财政和绩效展开的竞争。
Soft budget constraint	软预算约束；低效率主体预期亏损后会获得救助或保护，从而缺乏退出压力。
Fiscal decentralization	财政分权；不同层级政府之间收入、支出和责任的划分。
Competition neutrality	竞争中性；不同所有制、地区和企业身份在准入、融资、监管和政府采购中面对相近规则。

28.12 本章 Review

合格的理解应该包含三层。

第一层是模型层。你应该能写出企业家问题 $\max_k \theta Ak^\alpha - Rk$，并推导 $k^*(\theta)$ 随 θ 上升而上升。你也应该能把制度扭曲写入企业一阶条件，说明融资、土地、准入和补贴如何转化为 $\tau_{K,i}$ 与 $\tau_{Y,i}$。

第二层是机制层。你应该能区分三种制度作用：产权和预期影响投资与创新，市场化影响资源配置和企业动态，地方政府目标函数影响公共投入与行政干预的权衡。制度不是替代增长核算，而是解释 A、Ω、K 和创新激励为什么变化。

第三层是中国层。你应该能说明中国增长中的制度机制具有阶段性：早期改革提高剩余索取和进入空间，中期市场化和开放改善配置效率，地方政府竞争推动基础设施和产业集聚；进入中高收入阶段后，同一套激励可能带来债务、低回报投资、地方保护和创新不确定性。未来增长更依赖竞争中性、预算约束、监管可预期和高质量公共品。

如果你的理解还停留在“制度很重要”或“地方政府推动增长”，那还不够。更好

的表达是：制度通过具体激励和约束进入增长模型；地方政府既能提高公共投入 G，也可能提高扭曲 b；市场化改革的核心，是让资源配置更接近生产率信号，从而提高 Ω。

28.13　核心文献

制度与增长的经典入口是 [North, 1990] 和 [Hall and Jones, 1999]；[Acemoglu et al., 2001] 提供了制度与长期发展差异的代表性实证研究。中国地方政府和财政激励可从 [Qian and Weingast, 1997]、[Jin et al., 2005] 和 [Xu, 2011] 开始。关于市场分割和地方保护，[Young, 2000] 是重要讨论。关于中国增长的制度化理解，还应结合第 25–27 章引用的 [Zhu, 2012]、[Song et al., 2011] 和 [Hsieh and Klenow, 2009] 一起阅读。

第七部分 Review：中国增长、结构转型、错配与制度

第七部分的任务，是把前面二十四章的增长理论放回一个真实而复杂的发展经验中。中国增长不是单独验证某一个模型的案例，而是一个包含资本深化、劳动转移、人力资本扩张、开放学习、企业动态、地方政府激励和制度变化的综合过程。因此，这一部分最重要的学习成果，不是记住几组中国数据，而是学会把数据、模型和机制放在同一张图里。

四章的顺序是有意安排的。第 25 章先摊开总账：收入、投资、城市化、教育、产业结构和增长核算告诉我们要解释什么。第 26 章进入部门：劳动从农业转向工业和服务业，为什么能提高平均劳动生产率，又为什么这种红利会递减。第 27 章进入企业：即使部门结构给定，资源是否流向高生产率企业，仍然决定总量 TFP。第 28 章进入制度：产权、市场化、金融、土地、地方政府和监管预期，决定资源为什么这样配置。

机制总览

一条总公式

如果要用一个公式概括第七部分，可以写成

$$Y_t = A_t^* \Omega_t K_t^{\alpha} H_t^{1-\alpha}, \tag{28.14}$$

其中 A_t^* 表示技术、组织知识和前沿吸收能力，K_t 是资本，H_t 是广义人力资本，Ω_t 是配置效率。这个式子不是一个新的结构模型，而是一张学习地图。第 25 章处理 K_t、H_t 和 residual；第 26 章说明 Ω_t 的一部分来自部门间劳动再配置；第 27 章说明 Ω_t 的另一部分来自企业间资源配置；第 28 章说明制度和地方政府行为会影响 A_t^*、Ω_t、K_t 和 H_t。

对 (28.14) 取增长率，有

$$g_Y = g_{A^*} + g_\Omega + \alpha g_K + (1-\alpha) g_H. \tag{28.15}$$

这条式子能解释为什么第七部分一直反复强调 residual 不能被当作神秘技术。若 g_Ω 上升，增长核算会把一部分效果放进 residual；若 g_Ω 下降，即使资本深化仍然很强，总量增长也会放缓。因此，中国增长的研究问题经常不是“资本重要还是 TFP 重要”，而是“资本如何配置，配置效率如何变化，制度如何影响配置”。

为了更具体，可以把配置效率写成

$$\Omega_t = \Omega_t^{sector} \cdot \Omega_t^{firm} \cdot \Omega_t^{institution}. \tag{28.16}$$

这里的乘法只是概念分解，不是可直接估计的恒等式。Ω_t^{sector} 对应第 26 章的部门转移，Ω_t^{firm} 对应第 27 章的企业错配，$\Omega_t^{institution}$ 对应第 28 章的产权、市场准入、金融配置、地方政府和监管环境。这个分解提醒我们：结构转型、企业动态和制度不是三条互相替代的解释，而是同一配置效率问题的不同层级。

四章之间的逻辑

第 25 章给出的最重要信息，是中国增长具有阶段性。1980–2000 年，中国人均收入快速上升，投资率提高，城市化推进，产业结构变化开始加速。2000–2010 年，资本深化、开放学习和 residual 改善同时较强。2010 年以后，资本深化仍然重要，但 residual 明显变弱。这个事实逼着我们追问：如果资本还在增加，为什么增长放缓？答案不能只在总量资本里找，必须进入结构和配置。

第 26 章回答了结构层面的第一部分。劳动从低生产率农业转向更高生产率非农部门，会提高全经济平均劳动生产率。shift-share 分解把这个直觉写成部门内效应、静态再配置效应和交互项。Lewis 模型进一步说明，在农业剩余劳动较多时，现代部门可以以相对稳定工资吸收劳动力；当剩余劳动减少，工资上升，增长机制必须从劳动动员转向生产率提升。因此，结构转型不是一次性故事，而是一个会改变自身边际收益的过程。

第 27 章把问题推到企业层面。即使劳动已经从农业转向工业和服务业，如果高生产率企业拿不到资本、土地、人才和市场，低生产率企业却因为保护和补贴占用资源，总量 TFP 仍会被压低。边际产出均等原则、TFPQ/TFPR 区分和 Hsieh–Klenow 楔子框架，给了我们一套更细的语言：错配不是“有低效率企业”，而是资源没有流向高边际产出用途。

第 28 章说明，错配背后往往是制度和激励。产权决定投资和创新的剩余索取权，市场化决定价格和进入退出能否反映生产率，地方政府目标函数决定公共投入与行政干预之间的权衡。地方政府既能提高 G，通过基础设施、园区、公共服务和协调能力降低交易成本；也可能提高 b，通过地方保护、软预算约束、低价土地和债务扩张制造扭曲。制度分析的关键，是把这些机制放进模型参数，而不是停留在“制度重要”的口号。

本部分 Review：怎样判断自己真正理解了这一部分

第一，你应该能从事实走向模型。看到中国人均 GDP、投资率、城市化和产业结构变化，不应只说“增长很快”，而要能问：资本深化贡献多少，人力资本贡献多少，residual 在什么阶段变化，结构转型和配置效率可能在哪里进入 residual。

第二，你应该能从总量走向结构。看到农业就业份额下降，不应只把它当作现代化现象，而要能写出

$$y_t = \sum_i \ell_{i,t} y_{i,t}$$

并解释劳动份额变化如何改变平均劳动生产率。你还应该能说明为什么早期结构转型红利大，后期红利递减。

第三，你应该能从结构走向企业。看到某个行业产能过剩或某类企业融资困难，不应只说“产业结构不好”，而要问 MRPK、MRPL、TFPR 和 TFPQ 是否分散，企业规模是否与生产率匹配，进入退出是否顺畅。

第四，你应该能从企业走向制度。看到金融偏向、土地财政、地方保护、产业补贴或监管不确定性，不应只做价值判断，而要问它们是提高 θ、降低 $\tau_{K,i}$ 和 $\tau_{Y,i}$，还是相反；是提高公共投入 G，还是扩大扭曲 b。

第五，你应该能把中国经验放回一般发展经济学。中国经验不是“所有国家都应照做”的模板，也不是“特殊到无法理论化”的例外。它说明后发增长可能经历激励改革、资源动员、结构转型、开放学习、资本深化、配置效率改善和创新转型，但每个阶段的约束不同，政策含义也不同。

本部分最容易犯的错误

第一，把中国增长说成单一机制。高投资、劳动转移、市场化、开放、地方政府、制度变化和创新都重要，但它们不是同一层次的解释。高投资是近因，制度和市场化是更深层机制，结构转型和企业再配置是连接二者的通道。

第二，把 residual 当作技术进步。 residual 包含技术、配置、制度、组织、开放学习和测量误差。若不拆 residual，就无法解释为什么资本深化继续存在而增长放缓。

第三，把结构转型当作自然过程。劳动不会自动流向高生产率部门。户籍、住房、教育、社保、土地、金融和城市治理都会影响转移成本和转移后的生产率。

第四，把错配当作企业效率低。企业效率分散本身不是错配；错配是资源分配与生产率分布不匹配。低效率企业若规模小并能退出，不一定造成大问题；高效率企业若不能扩张，才是增长损失。

第五，把制度指标当作最终答案。 WGI、市场化指数、信贷指标和专利数量都只是代理变量。它们可以帮助提出问题，但不能替代机制分析和识别。

与后续研究训练的连接

第七部分结束后，本书将进入研究前沿与论文训练。这里已经准备好三类研究入口。

第一类是事实型研究：重新做中国增长核算、结构转型分解、城市化事实包、部门相对生产率比较。目标不是提出复杂识别，而是把事实做准、口径说清、图表讲明白。

第二类是机制型研究：研究融资约束、土地配置、地方保护、产业政策、企业进入退出和城市公共品如何影响 Ω_t。这类研究需要把模型里的楔子和现实变量对应起来。

第三类是制度型研究：研究地方政府激励、监管可预期性、财政约束、产权保护和市场准入如何影响投资、创新和企业动态。这类研究最难，因为制度变量测量误差大，因果识别也更困难；但它恰恰是理解中高收入转型的核心。

如果这一部分学得扎实，后面做 replication、文献综述和 mini paper 时，你已经不只是“找一个中国问题”，而是能把问题放进增长理论：它影响哪一个变量、哪一个楔子、哪一个配置效率层级、哪一个长期增长机制。

第八部分

研究前沿与论文训练

第二十九章　增长实证：数据、识别与因果

前面二十八章主要在回答“增长机制是什么”。从这一章开始，本书进入最后一部分：如何把增长理论变成研究。这里的难点不是会不会跑回归，而是能不能清楚地说出一个经验结果到底识别了什么。

增长实证尤其困难。原因很简单：国家、地区、城市和企业不是随机分配到不同制度、不同教育水平、不同产业政策和不同技术环境中的。富国之所以富，可能因为制度好；但制度好本身也可能是长期富裕、国家能力和历史路径的结果。一个地区增长快，可能因为产业政策有效；也可能因为它本来就在上升趋势上，所以更容易被选为试点。企业获得信贷后扩张，可能因为信贷促进了投资；也可能因为银行本来就把钱贷给预期会扩张的企业。

本章的核心态度是：相关性是研究的起点，不是终点。增长回归、面板固定效应、工具变量、双重差分和事件研究，都是把相关性推向因果解释的工具，但每一种工具都要付出假设。真正的实证训练，不是记住哪种方法“高级”，而是能说清楚：比较组是谁，反事实是什么，识别变化来自哪里，哪些假设如果错了结果就不能解释为因果。

29.1　学习目标

读完本章，你应该能够完成五件事。

第一，能够区分增长实证中的三类数据结构：跨国截面、国家或地区面板、微观企业或家庭数据，并知道每类数据适合回答什么问题。

第二，能够写出基准增长回归，并解释为什么它通常只能作为条件相关，而不能自动解释为因果。

第三，能够理解固定效应、工具变量、双重差分和事件研究各自依赖什么来源的识别变化。

第四，能够用审稿人的眼光检查一个增长实证设计：处理变量是否内生，比较组是否可信，标准误是否合适，稳健性是否围绕核心识别假设展开。

第五，能够把第七部分中的中国增长问题转化为可研究问题，例如结构转型、资源错配、地方政府激励或制度变化如何进入可观测数据和识别策略。

29.2 核心问题

本章围绕一个问题展开：为什么增长回归难以做因果解释，如何从相关走向可信识别？

先看一个最常见的增长回归：

$$g_i = \alpha + \beta \log y_{i0} + X_i'\gamma + u_i, \tag{29.1}$$

其中 g_i 是国家 i 在某个时期的人均收入增长率，y_{i0} 是初始收入，X_i 是投资率、教育、人口增长、制度、开放、地理等控制变量。若 $\beta < 0$，研究者可能说“存在条件收敛”：在控制稳态决定因素后，初始收入较低的经济体增长更快。

这条回归很有用，但它不是因果机器。X_i 中的许多变量并非外生。教育可能影响增长，但增长预期也会影响教育投资；制度可能影响增长，但长期增长也会改变制度；开放可能促进技术扩散，但开放程度本身可能由地理、政治和产业结构决定。若把这些变量直接放进回归，系数描述的是条件相关，不一定是政策效应。

29.3 先从数据读起

表 29.1 使用前面章节已经整理过的 WDI 数据，列出若干经济体 1980 年与 2024 年的人均实际 GDP 以及 1980–2024 年平均对数增长率。这个表不是为了证明某个因果关系，而是为了训练增长实证的第一步：先看事实，然后问哪些事实需要解释。

这张表能立刻说明三件事。第一，低初始收入不保证高增长。中国、印度和埃塞俄比亚都从较低收入出发，但增长表现差异很大。第二，中等收入经济体之间差异很大。巴西和墨西哥 1980 年已经比中国富很多，但 1980–2024 年增长率明显较低。第三，高收入经济体增长较慢不等于表现差。美国 1.74% 的长期人均增长率，在高初始收入水平下仍然意味着巨大的绝对收入增加。

因此，增长实证不能只问“穷国是否增长更快”。更好的问题是：在什么条件下穷国增长更快？哪些变量决定稳态？哪些机制使国家偏离或接近稳态？哪些政策变化真正改变了增长路径？

29.4 为什么相关不等于因果

设研究者想估计教育对增长的因果效应：

$$g_i = \alpha + \beta S_i + u_i, \tag{29.2}$$

其中 S_i 是平均受教育年限。若真实模型其实是

$$g_i = \alpha + \beta S_i + \delta Q_i + \varepsilon_i, \tag{29.3}$$

表 29.1: 若干经济体的人均实际 GDP 与长期增长

经济体	1980 人均 GDP 2015 美元	2024 人均 GDP 2015 美元	年均增长率 %	收入组
中国	437	13122	7.73	中高收入
韩国	4140	37048	4.98	高收入
印度	394	2397	4.10	中低收入
美国	30930	66356	1.73	高收入
博茨瓦纳	2003	6937	2.82	中高收入
巴西	6473	9567	0.89	中高收入
墨西哥	8290	10316	0.50	中高收入
尼日利亚	2177	2325	0.15	中低收入
埃塞俄比亚	292	883	2.51	未分类

数据来源：World Bank, World Development Indicators，经 World Bank API 于 2026-05-24 抓取。人均 GDP 为 NY.GDP.PCAP.KD，单位为 2015 年不变美元；增长率为 1980–2024 年对数平均增长率。收入组为 WDI 数据中的当期分类，表中中文为作者整理。

其中 Q_i 表示制度质量、家庭背景、健康、国家能力或其他未观察因素，并且研究者遗漏了 Q_i，那么 OLS 估计的 β 通常有偏。

命题 29.1 (遗漏变量偏误). *若真实模型为 (29.3)，但研究者估计 (29.2)，则在大样本下*

$$\operatorname{plim} \hat{\beta} = \beta + \delta \frac{\operatorname{Cov}(S_i, Q_i)}{\operatorname{Var}(S_i)}.$$

因此，只有当 $\delta = 0$ 或 $\operatorname{Cov}(S_i, Q_i) = 0$ 时，遗漏 Q_i 不会造成偏误。

证明. 由真实模型，

$$\hat{\beta} = \frac{\operatorname{Cov}(S_i, g_i)}{\operatorname{Var}(S_i)} = \frac{\operatorname{Cov}(S_i, \alpha + \beta S_i + \delta Q_i + \varepsilon_i)}{\operatorname{Var}(S_i)}.$$

常数项与 S_i 协方差为零，若 $\operatorname{Cov}(S_i, \varepsilon_i) = 0$，则

$$\operatorname{plim} \hat{\beta} = \beta + \delta \frac{\operatorname{Cov}(S_i, Q_i)}{\operatorname{Var}(S_i)}.$$

命题得证。 □

这个命题是增长实证的警钟。若教育较高的国家同时制度更稳定、健康更好、基础设施更强，那么教育系数可能混合了这些因素。若制度较好的地区也更容易吸引企业，制度系数可能混合了地理、历史和产业基础。控制变量越多，不一定越接近因果；若控制变量本身是机制变量或坏控制，反而可能把真实效应切掉。

29.5 三类增长数据结构

增长实证常用三类数据。

第一类是跨国截面。单位是国家，变量是长期平均增长率、初始收入、投资率、教育、制度、开放、地理和人口增长。优点是视野广，适合发现大事实；缺点是样本小，变量粗，遗漏变量严重，因果解释最困难。

第二类是面板数据。单位可以是国家、省份、城市或企业，时间可以是年份、五年期或十年期。面板数据允许加入单位固定效应和时间固定效应，控制不随时间变化的单位差异和共同冲击。优点是能利用同一单位内部变化；缺点是许多政策和制度变化仍然不是随机发生的。

第三类是微观数据。单位是企业、家庭、劳动者、项目或地理网格。微观数据可以更接近机制，例如企业融资、生产率、进入退出、工资、专利、迁移和土地交易。优点是样本大、机制细；缺点是外推到长期增长时需要额外理论桥梁。

表 29.2 总结了三类数据结构的用途和风险。

表 29.2: 增长实证中的常见数据结构

数据结构	适合回答的问题	核心风险
跨国截面	长期收入差异、收敛、制度与发展大事实	遗漏变量、反向因果、样本小、测量误差
国家/地区面板	政策变化、制度变化、产业结构变化与增长	政策选择性、动态趋势、序列相关、共同冲击
企业/家庭/网格微观数据	资源错配、企业动态、迁移、创新、项目效果	外部有效性、机制聚合、样本选择、空间相关

29.6　面板固定效应：控制不变差异

面板回归常写成

$$y_{it} = \beta D_{it} + X_{it}'\gamma + \mu_i + \lambda_t + \varepsilon_{it}, \tag{29.4}$$

其中 y_{it} 是地区 i 在年份 t 的结果，D_{it} 是政策或处理变量，μ_i 是地区固定效应，λ_t 是年份固定效应。

固定效应做了两件事。μ_i 控制地区不随时间变化的因素，例如地理、历史、文化、长期制度基础。λ_t 控制所有地区共同面对的冲击，例如全球金融危机、全国宏观政策、技术趋势。识别 β 的变化来自同一地区随时间变化的 D_{it} 与 y_{it} 的共同变化，并与其他地区同期变化比较。

但固定效应不是魔法。若政策 D_{it} 的变化本身由预期增长趋势决定，固定效应仍然不能解决内生性。比如高增长城市更容易获得新区政策，高增长企业更容易获得信贷支持，高潜力产业更容易获得补贴，估计的 β 就会混合政策效果和选择效应。

29.7　工具变量：寻找外生变化

工具变量的目标，是找到一个变量 Z_i，它影响内生变量 D_i，但不直接影响结果 Y_i。最简单的两阶段最小二乘写成

$$D_i = \pi_0 + \pi_1 Z_i + X_i'\pi_2 + v_i, \tag{29.5}$$

$$Y_i = \alpha + \beta \widehat{D}_i + X_i'\gamma + u_i. \tag{29.6}$$

工具变量需要三个核心条件。第一是相关性：Z_i 必须显著影响 D_i。第二是排除限制：Z_i 不能通过 D_i 之外的渠道影响 Y_i。第三是单调性或局部解释：若处理效应异质，IV 估计的通常是受工具影响而改变处理状态那部分单位的 LATE。

增长文献中，工具变量很常见，也最容易被滥用。历史变量、地理变量、距离变量、殖民变量、天气变量都可能被用作工具。但越是长期历史变量，越容易同时影响许多发

展渠道。一个看似外生的地理工具，可能同时影响贸易、疾病、制度、农业生产率和国家能力；若研究只把它解释成某一个变量的工具，排除限制就很脆弱。

29.8 双重差分与事件研究

当某个政策在某些地区、某些时间发生，而其他地区没有发生时，研究者常使用双重差分。最简单的 DiD 估计式为

$$y_{it} = \alpha + \beta(Treat_i \times Post_t) + \mu_i + \lambda_t + \varepsilon_{it}. \tag{29.7}$$

这里 β 比较处理组政策前后变化与对照组同期变化的差异。核心假设是平行趋势：若没有政策，处理组和对照组的结果会沿着相同趋势变化。

事件研究进一步把政策前后的动态效应展开：

$$y_{it} = \mu_i + \lambda_t + \sum_{k \neq -1} \beta_k \mathbf{1}\{t - T_i = k\} + \varepsilon_{it}. \tag{29.8}$$

其中 T_i 是地区 i 的政策发生时间，k 是相对时间。政策前的 β_k 可以帮助检查处理组在政策前是否已经有不同趋势；政策后的 β_k 展示效应随时间如何演化。

需要注意，事件研究图不是装饰图。它是识别论证的一部分。若政策前系数已经明显上升或下降，说明处理组在政策前就不同，平行趋势可疑。若政策发生时间是错开的，传统双向固定效应在处理效应异质时还可能产生负权重问题，此时应使用更适合 staggered adoption 的估计方法，并报告组别和时间维度的效应。

29.9 增长研究中的识别设计地图

表 29.3 把几种常见识别设计放进增长问题中。它不是方法排行榜，而是提醒你：每一种方法都需要说明反事实从哪里来。

29.10 标准误、聚类与增长数据的相关性

增长数据常有空间相关和时间相关。相邻地区受到相同产业链、交通网络、气候和政策环境影响；同一地区的误差项也会随时间持续。如果把这些相关性当作独立观测，标准误会过小，显著性会被夸大。

经验规则是：标准误至少应在处理分配层级聚类。若政策在省级实施，不能只在城市或企业层面聚类；若冲击具有空间扩散，可能需要空间稳健标准误或更保守的聚类层级；若处理单位很少，普通聚类稳健标准误也可能不可靠，需要 wild cluster bootstrap 或随机化推断。

表 29.3: 增长实证中的识别设计地图

方法	适合的问题	关键假设
固定效应面板	政策、制度或产业结构随时间变化	未观察冲击在控制固定效应后与处理无关
工具变量	教育、制度、开放、金融等内生变量	工具只通过处理变量影响结果，且足够相关
双重差分	分地区、分时间实施的政策变化	没有政策时处理组和对照组平行趋势
事件研究	政策动态效应、预趋势检查	相对时间效应可解释，政策时点不是由预期结果驱动
合成控制	单个地区或少数地区的重大政策冲击	处理前拟合足够好，供体池能构造反事实
断点回归	资格线、行政阈值、地理边界附近政策	阈值附近单位可比，不能精确操纵阈值

这个问题在增长研究中很关键。跨国样本本来就不大，地区政策又常常成批实施。如果识别设计只有少数处理省份、少数试点城市或少数行业，显著星号并不能自动说明结果可靠。

29.11　把第七部分转成实证问题

第七部分提供了很多可以转化为实证设计的问题。表 29.4 给出几个例子。

这个表的作用，是把宏大问题压成可研究问题。比如“地方政府是否促进增长”太大；更好的问题是“某类财政激励变化是否改变了地方基础设施投资、企业进入和生产率”。“市场化是否重要”也太大；更好的问题是“某项准入改革是否降低了新企业进入成本，并提高行业内资源再配置效率”。

29.12　一份增长实证的审稿式检查表

如果我来 review 一篇增长实证论文，我会按以下顺序检查。

第一，研究问题是否清楚。论文估计的是教育、制度、金融、产业政策、城市化，还是某个更具体的政策冲击？结果变量是增长率、生产率、企业进入、工资，还是福利？

第二，处理变量是否内生。处理发生在哪里、什么时候、为什么发生？是否由预期增长、政治选择、历史基础或企业自选择决定？

表 29.4: 从中国增长机制到实证设计

机制问题	可观测变量	识别困难
结构转型是否提高生产率	部门就业份额、增加值、城市化率、劳动生产率	劳动转移由增长机会吸引，存在反向因果
金融约束是否造成企业错配	企业贷款、利率、抵押品、TFPR、投资率	银行选择高潜力企业，贷款不是随机分配
地方政府激励是否推动低回报投资	地方债务、土地出让、基建投资、资本回报	高增长地区也更容易融资和扩张
市场准入改革是否促进企业动态	新企业进入、退出、注册时间、行业集中度	改革试点可能选择更有潜力地区
城市公共品是否提高服务业生产率	通勤、教育医疗、数字基础设施、服务业工资	城市公共品与人才流入相互强化

第三，比较组是否可信。对照组在政策前是否与处理组趋势相近？若用工具变量，工具组和非工具组除了处理变量外是否还有其他系统差异？若用断点，阈值附近是否可操纵？

第四，估计式是否对应识别故事。若论文讲 DiD，却没有政策前趋势；若论文讲 IV，却没有充分讨论排除限制；若论文讲固定效应，却没有说明时间变化的混杂因素，那么模型和识别故事不匹配。

第五，推断是否合适。标准误是否在正确层级聚类？处理单位是否足够多？是否存在多重检验、空间相关和序列相关？

第六，稳健性是否围绕核心威胁。稳健性不是换十种控制变量，而是针对最可能破坏识别的威胁：预趋势、样本选择、测量误差、替代渠道、空间溢出和政策同时发生。

29.13 常见误区

误区一：把控制变量越多当作越可信。若控制变量是政策影响的中介变量，加入它会切掉真实效应；若控制变量测量误差大，也可能引入新偏误。

误区二：把固定效应当作因果保证。固定效应只能控制不随时间变化的差异和共同时间冲击，不能解决处理变量随预期趋势变化的问题。

误区三：把工具变量的相关性当作有效性。强一阶段只是必要条件，不是充分条件。排除限制通常无法直接检验，必须靠经济机制和反驳替代渠道。

误区四：把事件研究图当作漂亮图。事件研究首先是识别检验。政策前趋势异常时，政策后效应再漂亮也要谨慎。

误区五：把显著性当作重要性。增长研究关心长期数量级。一个统计显著但经济量级很小的结果，不一定能解释发展差异。

29.14　英文术语表

Growth regression	增长回归；以增长率或收入水平为结果变量的经验回归。
Identification	识别；使估计量能够解释为因果效应的变化来源和假设。
Omitted variable bias	遗漏变量偏误；遗漏变量同时影响解释变量和结果变量导致的偏误。
Fixed effects	固定效应；控制单位不变差异或共同时间冲击的参数。
Instrumental variable	工具变量；影响处理变量但不直接影响结果变量的外生变化来源。
Exclusion restriction	排除限制；工具变量只能通过处理变量影响结果。
Difference-in-differences	双重差分；比较处理组和对照组政策前后变化差异的方法。
Parallel trends	平行趋势；没有处理时处理组和对照组趋势相同的假设。
Event study	事件研究；估计政策前后不同相对时间效应的动态方法。
Clustered standard errors	聚类标准误；允许同一聚类内误差相关的推断方法。

29.15　本章 Review

本章最重要的结论是：增长实证不是“跑一个增长回归”，而是构造一个可信反事实。

第一，你应该能写出基准增长回归 (29.1)，并解释为什么它通常只是条件相关。初始收入、教育、制度、投资和开放都可能内生；若没有识别设计，系数不能直接解释为政策效应。

第二，你应该能说明固定效应、IV、DiD 和事件研究的区别。固定效应依靠单位内部变化，IV 依靠外生工具，DiD 依靠处理组和对照组的平行趋势，事件研究进一步

检查动态效应和预趋势。

第三，你应该能用审稿式语言批评实证设计。一个好的批评不是“内生性可能存在”这种空话，而是具体指出：处理为什么被选择，比较组为什么不可信，工具变量可能通过哪些替代渠道影响结果，标准误为什么需要聚类。

第四，你应该能把增长理论转化为实证问题。第七部分讲的结构转型、资源错配和制度激励，都可以变成可观测变量和识别设计；但每一步都需要说清楚反事实。

29.16 核心文献

增长回归和条件收敛的经典入口是 [Barro, 1991]、[Barro and Sala-i Martin, 1992] 和 [Mankiw et al., 1992]。制度与长期发展差异的代表性实证研究可读 [Hall and Jones, 1999] 和 [Acemoglu et al., 2001]。关于因果识别和应用微观计量，[Angrist and Pischke, 2009] 是最重要的入门之一；双重差分推断问题可读 [Bertrand et al., 2004]，现代错位政策时点 DiD 可参考 [Callaway and Sant'Anna, 2021] 和 [Sun and Abraham, 2021]。增长和发展研究中的经验设计，也应与前面各章的模型机制一起读，而不是把方法当作独立技巧。

第三十章　论文复制：从表格到研究理解

上一章讲的是识别：一个增长或发展实证结果为什么可以被解释为因果，或者为什么不能。本章讲的是另一个同样重要的问题：一个结果是怎样被生产出来的。

许多学生第一次读论文时，会把注意力放在摘要、引言和主表格上。主表格里某个系数显著，似乎论文就“证明”了某个结论。但真正进入研究训练后，你会发现，表格只是最后一层表面。一个系数背后有原始数据、清洗规则、样本选择、变量定义、估计命令、标准误设置、缺失值处理、固定效应选择、稳健性安排，以及作者对异常结果的判断。论文复制的意义，正是把这一整条生产链拆开。

复制论文不是机械地重跑代码。更准确地说，它是一种研究阅读方式：你要先让自己站在作者的位置，尽量重建作者的分析环境，复现论文中的关键数字；然后再站在审稿人的位置，检查这个结果是否真的由论文声称的机制支持；最后才站在研究者的位置，思考能否改进、扩展或提出新的问题。

本章的目标，是把 replication 从“下载代码试试看”变成一种系统训练。读完本章，你应该能够拿到一篇增长或发展实证论文，完成一份规范的 replication note：说明复制对象、列出目标表格、重建样本、运行基准结果、解释差异、审计可复现性，并判断这篇论文的研究设计是否值得进一步扩展。

30.1　学习目标

读完本章，你应该能够完成六件事。

第一，能够区分三种复制：结果复制、计算复制和概念复制。结果复制问“我能否得到论文表格里的数字”；计算复制问“从原始数据到最终表格的每一步是否可追踪”；概念复制问“换一组可比较的数据、样本或设定，核心机制是否仍然成立”。

第二，能够为一篇论文建立复制清单，包括论文信息、主结果、数据来源、代码结构、目标表格、目标系数和容许误差。

第三，能够读懂 replication package 的常见结构：原始数据、清洗代码、中间数据、估计代码、输出表格、README、环境文件和日志文件。

第四，能够判断复制失败的来源。一个系数对不上，可能不是理论错了，而是样本年份少了一年、权重设错了、标准误聚类层级不同、固定效应少了一组、缺失值处理不同，或者软件默认选项不一致。

第五，能够写出一份研究型 replication note。它不是流水账，而是回答三个问题：我复制了什么、我是否复制成功、复制过程改变了我对论文贡献和局限的理解吗？

第六，能够把复制训练连接回增长经济学。复制 Hall and Jones 式跨国制度回归、MRW 式条件收敛回归、Hsieh–Klenow 式企业错配核算，训练的是三种不同能力：跨国数据口径意识、面板和横截面识别意识、以及微观数据构造意识。

30.2 核心问题

本章围绕一个问题展开：为什么复制论文是进入研究前沿的最佳训练之一？

答案不是因为复制最容易。恰恰相反，好的复制很难。它要求你同时理解理论、数据、代码和识别。只读论文正文时，你看到的是作者整理后的论证；做复制时，你会看到研究的真实细节：变量如何从原始数据中生成，哪些观测被排除，哪张表最脆弱，哪个结果依赖于某个样本限制，哪一步其实包含了大量判断。

设一篇论文的核心估计式为

$$y_{it} = \beta D_{it} + X_{it}'\gamma + \mu_i + \lambda_t + \varepsilon_{it}, \tag{30.1}$$

论文表格报告 $\hat{\beta} = -0.120$，括号内标准误为 0.045。表面上，你只需要知道这个系数是否显著。但复制训练会追问更多问题：y_{it} 的单位是什么？D_{it} 是虚拟变量、强度变量还是连续政策变量？样本是否包括所有地区？μ_i 是地区固定效应还是地区乘行业固定效应？λ_t 是年份固定效应还是省份年份固定效应？标准误聚类在地区、政策批次还是更高层级？如果少掉其中任何一个细节，$\hat{\beta}$ 都可能变化。

所以，复制不是在论文后面补一个技术附录，而是在学习如何把“研究结论”还原成“可检查的生产过程”。

30.3 复制的三层含义

复制至少有三层。

第一层是结果复制。给定作者的数据和代码，你能否得到论文主表中的数字？这一步看似最低级，却非常重要。若连作者自己的代码都不能生成论文里的表格，后续讨论识别、机制和政策含义就缺少基础。

第二层是计算复制。你不只运行最终回归，还要检查从原始数据到分析数据的链条。原始数据从哪里来？是否有访问限制？清洗代码是否完整？中间数据是否由代码生成，而不是手工编辑？表格中的每一个数字是否能追溯到某个脚本？

第三层是概念复制。在理解原始论文后，你尝试改变样本、替换变量、使用相近数据或改进估计方法，观察核心结论是否仍然成立。概念复制最接近真正研究，但它必须建立在前两层之上。若你还没有复制基准结果，就直接做扩展，很容易把自己的代码错误误认为新的经济发现。

表 30.1 总结这三层的区别。

表 30.1: 论文复制的三层含义

复制层级	核心问题	合格产出
结果复制	能否得到论文表格里的关键数字	目标系数、标准误、样本量与论文逐项对照
计算复制	从原始数据到最终表格是否可追踪	数据来源表、脚本地图、输出地图、环境记录
概念复制	改变合理设定后结论是否仍然有解释力	扩展表格、机制检验、异质性分析或替代数据结果

30.4 选择复制对象

第一次做增长论文复制，不要选择过于庞大的结构估计论文，也不要选择数据完全不可得的论文。更好的对象具有四个特征：研究问题清楚、主表格集中、数据相对可得、代码或变量说明较完整。

本章建议从三类论文中选择。

第一类是增长回归和收敛论文。例如 MRW 风格的条件收敛回归，数据主要来自跨国宏观数据。优点是变量直观、样本不太大、模型与前面 Solow–MRW 部分直接相连。缺点是跨国变量口径复杂，识别通常较弱。

第二类是制度与长期发展论文。例如制度、殖民历史、地理或国家能力与收入差异的论文。优点是理论联系深，能训练你理解 IV、历史变量和排除限制。缺点是数据构造更复杂，许多变量来自历史资料或手工整理。

第三类是企业生产率和资源错配论文。例如 Hsieh–Klenow 式企业错配核算。优点是与第 27 章高度相关，能训练你从微观数据构造生产率、楔子和配置效率。缺点是企业微观数据往往受限，完整复制可能需要公开替代数据或模拟数据。

为了让本章可操作，我们使用一个“教学复制对象”作为贯穿例子。它不是声称复现某篇具体论文的真实结果，而是模拟一篇增长实证论文中常见的主表结构：研究某项制度改革是否提高地区生产率。设论文主表第 2 列报告如下：

复制工作从这张表开始，而不是从写代码开始。你必须先明确“金标准”是什么：要复制哪张表、哪一列、哪个系数、哪个标准误、哪个样本量。否则你运行出任何一个结果，都不知道它是否成功。

表 30.2: 教学复制对象：论文主表中的目标数字

目标	表格位置	论文数值	标准误	样本量
改革对劳动生产率的影响	Table 2, Col. 2	0.084	0.031	1860
加入地区固定效应后	Table 2, Col. 3	0.061	0.028	1860
加入地区趋势后	Table 2, Col. 4	0.044	0.026	1860
以 TFP 为结果变量	Table 3, Col. 2	0.037	0.018	1725

说明：本表为教学用复制目标表，用来展示 replication note 中应如何记录目标数字。真实复制时，应逐项摘录原论文主表、附录表和正文中的关键统计量。

30.5 从论文到复制计划

一份好的复制计划应包含五个部分。

第一，论文信息：作者、年份、题目、期刊或工作论文版本、复制包来源、下载日期。

第二，核心问题：论文估计的因果对象是什么？它是政策效应、制度效应、技术扩散效应，还是资源配置效率变化？

第三，目标结果：主表、关键附录表、核心图形、正文关键数字。每个目标都应记录论文数值、标准误、样本量和页码。

第四，数据和代码地图：原始数据在哪里，清洗脚本是什么，分析数据如何生成，估计脚本如何输出表格。

第五，验收标准：哪些目标必须精确匹配，哪些目标允许四舍五入差异，哪些目标因为随机过程或软件版本可能有小误差。

表 30.3 给出一个可以直接仿照的计划模板。

这里的关键是顺序。先读 README，再读主运行脚本，再读清洗代码，最后才改代码。不要一开始就“优化”作者的代码。复制的第一原则是：先尽可能保持原样，匹配原结果；确认基准结果后，再做扩展。

30.6 Replication package 的常见结构

一个规范的 replication package 通常包含如下结构：

目录或文件	作用
`README.md`	说明数据来源、运行步骤、软件环境、输出地图和限制数据处理方式。

`data/raw/`	原始数据。理想情况下不应被代码改写。若数据不能公开，应说明如何获得。
`data/interm./`	清洗后但尚未进入最终估计的数据。
`data/final/`	最终分析数据，通常是一张或多张可直接用于估计的表。
`code/01_clean.*`	数据清洗脚本，负责从原始数据生成中间数据。
`code/02_build.*`	样本构造、变量合并、权重和固定效应变量生成。
`code/03_est.*`	主回归、稳健性、异质性和机制检验。
`output/tables/`	论文表格，最好由代码自动生成 `.tex` 或 `.csv`。
`output/figures/`	论文图形，最好由代码自动生成。
`environment.yml` 或 `renv.lock`	软件包版本和运行环境。

很多复制失败，原因不是估计式复杂，而是文件结构混乱。若一个项目没有主运行文件，没有说明哪些脚本生成哪些表，没有记录数据来源，或者依赖作者电脑上的绝对路径，那么即使论文识别设计很好，复制体验也会很差。

30.7 从目标数字到容许误差

复制不是要求所有数字在无限小数位上完全一致。论文表格通常经过四舍五入，不同软件版本也可能在自由度调整、聚类标准误或优化算法上略有差异。合理做法是为不同对象设置不同验收标准。

注意，容许误差不是为“不认真”开口子，而是为了把注意力放在实质差异上。若样本量从 1860 变成 1812，不能说“差不多”；这说明样本构造不同。若系数从 0.061 变成 0.060，则可能只是四舍五入。若标准误从 0.028 变成 0.045，则很可能是聚类层级、权重或自由度调整不同，必须追查。

30.8 一个复制失败的诊断例子

设论文报告基准结果为 $\hat{\beta}^{paper} = 0.061$，标准误为 0.028，样本量为 1860。你运行作者代码后得到 $\hat{\beta}^{ours} = 0.049$，标准误为 0.041，样本量为 1812。这不是一个可以轻轻带过的差异。

复制诊断应从最容易验证的对象开始：样本量。若 N 不一致，先不要讨论系数。表 30.6 展示一种排查顺序。

表 30.3: 复制计划模板

项目	应记录的内容
论文信息	作者、年份、题目、版本、复制包链接、下载日期
研究问题	处理变量、结果变量、目标参数、理论机制
目标表格	主表、附录表、图形、正文数字及其金标准数值
数据地图	原始数据、中间数据、分析数据、数据来源和限制
代码地图	清洗脚本、估计脚本、表格脚本、主运行文件
环境信息	软件版本、包版本、操作系统、随机种子、运行时间
验收标准	系数、标准误、样本量、图形和文本数字的容许误差

表 30.5: 复制验收标准示例

对象	建议标准	原因
样本量、组数、年份范围	必须完全一致	样本构造若不同，后续系数比较意义有限
主系数	通常误差小于 0.005 或 0.01	表格四舍五入会造成小差异
标准误	通常误差小于 0.01 或保持同一显著性层级	聚类和自由度调整可能略有不同
图形趋势	形状和关键拐点一致	图形坐标、平滑方式和输出格式可能不同
随机模拟结果	固定种子后应高度一致	若不一致，应检查随机种子和软件版本

表 30.6: 复制失败的排查顺序

检查对象	可能问题	处理方式
样本量	年份范围不同、缺失值处理不同、样本限制遗漏	逐步打印每次筛选后的 N
变量均值	变量单位、取对数方式、价格指数、权重不同	对照描述统计和变量标签
固定效应	少加地区、年份、行业或趋势项	重建估计式并检查自由度
权重	未使用人口、就业或抽样权重	查看原文表注和代码选项
标准误	聚类层级、自由度调整或 bootstrap 设置不同	对照估计命令和软件默认值
输出格式	表格截取了不同样本或不同模型	追踪表格生成脚本

一个好习惯是建立样本构造日志。不要只在最终回归里看到 $N = 1812$，而要知道这 48 个观测在哪一步消失。表 30.7 是一个示例。

表 30.7: 样本构造日志示例

步骤	剩余观测	删除观测
原始地区年份面板	2100	–
保留 2000–2019 年	2000	100
删除缺失结果变量	1940	60
删除缺失处理变量	1900	40
删除缺失控制变量	1860	40
最终估计样本	1860	0

如果你的复制结果最终只有 1812 个观测，你就应沿着这张日志逐步比较：是哪一步比作者多删了 48 个观测？是某个控制变量在新版本数据中缺失？是作者把缺失值填为零而你直接删除？还是你读取数据时把地区编码弄错，导致合并失败？这类细节看起来琐碎，但它们决定表格是否可信。

30.9 复制误差的一个分解

为了更清楚地理解“为什么系数对不上”，可以把复制差异写成一个分解。设论文报告的估计量为

$$\hat{\beta}^{paper} = B(S^{paper}, V^{paper}, M^{paper}, C^{paper}),$$

其中 S 表示样本，V 表示变量构造，M 表示估计模型，C 表示计算环境和软件选项。你的估计量为

$$\hat{\beta}^{ours} = B(S^{ours}, V^{ours}, M^{ours}, C^{ours}).$$

则复制差异可以概念性地写成

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}^{ours} - \hat{\beta}^{paper} &= [B(S^{ours}, V^{ours}, M^{ours}, C^{ours}) - B(S^{paper}, V^{ours}, M^{ours}, C^{ours})] \\
&\quad + [B(S^{paper}, V^{ours}, M^{ours}, C^{ours}) - B(S^{paper}, V^{paper}, M^{ours}, C^{ours})] \\
&\quad + [B(S^{paper}, V^{paper}, M^{ours}, C^{ours}) - B(S^{paper}, V^{paper}, M^{paper}, C^{ours})] \\
&\quad + [B(S^{paper}, V^{paper}, M^{paper}, C^{ours}) - B(S^{paper}, V^{paper}, M^{paper}, C^{paper})] .
\end{aligned} \tag{30.2}$$

四个括号分别对应样本差异、变量差异、模型差异和计算差异。

这个分解不一定能在实践中完全数值化，因为你未必能得到所有中间对象。但它提供了排查逻辑：先让 S 对齐，再让 V 对齐，再让 M 对齐，最后检查 C。若样本都没对齐，就去比较稳健性或解释理论差异，顺序就错了。

命题 30.1 (复制排查的顺序原则). *若目标是解释 $\hat{\beta}^{ours} - \hat{\beta}^{paper}$，并且样本差异会改变变量分布，则在样本 S 对齐之前，变量定义、模型设定和计算选项的比较都可能被样本变化混淆。*

证明. 回归系数可以写成样本矩阵的函数。以最简单的 OLS 为例，

$$\hat{\beta}(S) = (X_S' X_S)^{-1} X_S' Y_S.$$

若 $S^{ours} \neq S^{paper}$，则 $X_S' X_S$ 和 $X_S' Y_S$ 同时变化。此时，即使变量定义和估计命令完全相同，系数也会因为样本矩不同而变化。反过来，如果在样本不一致时观察到系数不同，无法判断差异来自样本、变量还是模型。故复制排查应先对齐样本，再比较变量和模型。命题得证。 □

这条命题很朴素，却能避免大量混乱。复制不是一口气修所有问题，而是一次只改变一个环节。

30.10　代码阅读：从主运行文件开始

拿到复制包后，最好的入口通常不是最长的清洗脚本，而是主运行文件。它可能叫 `master.do`、`run_all.R`、`main.py` 或 `Makefile`。主运行文件回答三个问题：脚本运行顺序是什么，哪些文件是输入，哪些文件是输出。

阅读代码时，可以按如下顺序做笔记。

1. 找到主运行文件，记录运行顺序。
2. 找到原始数据读取语句，记录每个数据源。
3. 找到样本筛选语句，记录每次删除观测的条件。
4. 找到变量生成语句，尤其是核心处理变量、结果变量、控制变量和权重。
5. 找到估计命令，记录固定效应、聚类层级、权重和样本限制。
6. 找到表格输出脚本，确认每个输出文件对应论文哪张表。

如果复制包有绝对路径，例如 `C:/Users/.../raw.csv`，这是一个可复现性问题。若代码需要手工打开 Excel 改几行，或者中间数据没有生成脚本，也是问题。研究训练中，你不必苛刻地要求每个历史复制包都完美，但你必须知道这些问题会怎样影响结果可信度。

30.11　把复制和识别连起来

复制训练最常见的误区，是把它当成纯代码任务。事实上，复制和识别紧密相连。

假设论文使用 DiD 估计政策对地区生产率的影响。你复制主表后，下一步不应只是再跑十个控制变量，而应检查与识别最相关的对象。

第一，政策前趋势是否可复现。事件研究图是否由代码生成？政策前的系数是否接近零？置信区间是否足够宽？若你改变样本后政策前趋势变得明显，基准识别就更脆弱。

第二，处理组和对照组构造是否可追踪。哪些地区被定义为处理组？政策时间如何编码？是否存在提前试点、部分实施或政策强度差异？

第三，标准误是否在正确层级聚类。如果政策在省级实施，却在企业层面聚类，显著性可能被夸大。

第四，稳健性是否围绕识别威胁展开。真正有用的稳健性不是机械加入控制变量，而是针对选择性政策、空间溢出、测量误差、替代政策同时发生等威胁设计。

表 30.8 把常见识别设计和复制重点对应起来。

因此，一份好的 replication note 会同时报告两类结果：一类是“数字是否对上”，另一类是“复制过程如何改变我对识别可信度的判断”。

表 30.8: 识别设计与复制重点

识别设计	复制时必须检查	最常见风险
固定效应面板	样本内变化、固定效应维度、聚类层级	处理变量随趋势内生变化
工具变量	一阶段、排除限制论证、弱工具诊断	工具通过其他渠道影响结果
DiD	处理时间、政策前趋势、对照组构造	政策选择性和错位处理效应异质性
事件研究	相对时间编码、基准期、政策前系数	事件时间错设和动态选择
合成控制	供体池、处理前拟合、安慰剂检验	供体池不合适或处理前趋势差
结构估计	参数校准、矩匹配、数值算法、初值	局部最优和不可识别参数

30.12 增长论文复制的三个典型训练项目

为了让本章与整本书连接起来，这里给出三个可作为课程项目的复制方向。它们不要求你在第一次学习时全部完成，但它们代表从中级到高级训练的阶梯。

项目 A：MRW 式条件收敛回归。目标是复制一张跨国增长回归表。核心训练是数据口径、变量构造和 Solow 模型解释。你需要构造人均 GDP 增长率、投资率、人口增长率、教育代理变量，并比较非条件收敛与条件收敛。重点不是证明收敛，而是理解为什么加入稳态决定变量后初始收入系数会变化。

项目 B：制度与长期发展回归。目标是复制制度变量与收入水平之间的主回归或 IV 回归。核心训练是历史变量、工具变量和排除限制。你需要特别关注样本国家、殖民历史变量、地理控制、第一阶段强度和替代渠道。

项目 C：企业错配核算。目标是复制企业层面 TFPQ、TFPR 或错配损失的核心表。核心训练是从微观数据到模型对象。你需要理解企业销售额、资本、劳动、行业价格指数和成本份额如何进入第 27 章的公式。若真实企业数据不可得，可以先用公开工业企业样本、模拟数据或教学数据完成方法复制。

表 30.9 总结三类项目的难度和产出。

表 30.9: 增长论文复制训练项目

项目	对应章节	核心能力	难度
条件收敛回归	Solow–MRW、增长实证	跨国数据、稳态变量、回归解释	中等
制度与长期发展	制度、增长实证	IV、历史变量、排除限制	较高
企业错配核算	资源错配、生产率	微观数据清洗、模型变量构造	高

30.13 Replication note 应该怎么写

Replication note 不是把代码运行截图粘在一起。它应当像一篇短论文，结构清楚、证据集中、判断克制。

建议结构如下。

1. **复制对象。**说明论文、版本、复制包来源和你复制的表格。
2. **研究问题与识别。**用一段话概括论文要估计什么，以及依赖什么识别假设。
3. **数据与代码结构。**说明数据来源、样本、脚本顺序和输出文件。
4. **复制结果。**用表格比较论文数值和你的数值。
5. **差异解释。**若有差异，逐项解释可能来源和排查结果。
6. **识别审计。**讨论复制过程暴露出的识别强项和弱点。
7. **扩展或下一步。**只在基准复制完成后，提出一个小而清楚的扩展。

表 30.10 是复制结果比较表的示例。

注意“状态”不应只写“差不多”。若未通过，应说明原因；若原因未知，也应诚实写“未解决”，并记录你排查过哪些可能来源。

30.14 复制中的数据伦理和可复现性

增长和发展研究经常使用受限数据：企业税务数据、海关交易数据、工业企业微观数据、家庭调查、行政记录、卫星图像或商业数据库。复制训练必须尊重数据许可。若数据不能公开，复制包应至少说明数据来源、申请方式、访问限制、不可公开的原因，以及哪些中间结果可以公开。

表 30.10: Replication note 中的结果比较表

目标	论文值	复制值	差异	状态	说明
Table 2, Col. 2 系数	0.084	0.084	0.000	通过	完全一致
Table 2, Col. 2 标准误	0.031	0.032	0.001	通过	自由度调整导致微小差异
Table 2, Col. 3 系数	0.061	0.049	-0.012	未通过	样本量少 48 个观测
Table 3, Col. 2 样本量	1725	1725	0	通过	一致

可复现性还包括路径和环境。一个可复现项目不应依赖作者电脑上的私人路径，不应要求读者手工点击软件界面，不应把关键中间数据保存在没有生成代码的文件中。理想情况下，读者在获得合法数据后，只需按 README 运行一个主脚本，就能重建所有表格和图形。

这并不是形式主义。若研究结果影响政策讨论，别人必须能够知道结果从何而来。可复现性是研究可信度的一部分。

30.15 中国与发展研究中的复制问题

中国增长研究特别适合复制训练，也特别容易暴露复制困难。

第一，数据口径变化频繁。地区 GDP、就业、工业增加值、城市边界、企业行业代码、价格指数和行政区划都可能随时间调整。复制时必须记录口径，否则跨年比较会混入统计制度变化。

第二，许多微观数据存在访问限制。工业企业数据库、海关数据库、税务数据和企业注册数据往往不能随论文自由公开。此时复制可能只能分为两步：公开复制代码结构和公开数据字典；完整结果复制需要在受限环境中完成。

第三，政策变化常常不是随机发生。开发区、产业政策、基础设施投资、金融支持、户籍改革和地方试点往往选择在特定地区实施。复制主表之后，必须特别检查政策前趋势、样本选择和替代政策同时发生。

第四，中国研究中的地理和空间溢出很强。一个城市的高铁、开发区或产业政策可能影响周边地区。若复制时只把每个城市当作独立观测，标准误和解释都可能过于乐观。

因此，做中国增长论文复制时，不能只问“表格能否跑出来”。还要问：行政区划

是否一致，价格是否可比，政策时间是否准确，对照组是否可信，空间溢出是否可能改变解释。

30.16 常见误区

误区一：一开始就改进作者代码。初次复制的目标是匹配原结果。若你同时改变量、改样本、改估计器，即使结果不同，也无法知道差异来自哪里。

误区二：只复制显著的主结果。论文的可信度也取决于样本构造、描述统计、机制表、安慰剂检验和附录稳健性。主结果只是入口。

误区三：把标准误差异当作小问题。在增长和发展实证中，聚类层级、空间相关和处理组数量常常决定显著性。标准误对不上，可能比系数小幅对不上更严重。

误区四：复制成功就等于论文正确。复制成功只说明你能重建作者结果，不说明识别假设成立。结果复制是可信讨论的起点，不是终点。

误区五：复制失败就等于论文错误。复制失败也可能来自软件版本、数据更新、路径问题或你的操作错误。合格的 replication note 应区分“未能复制”和“发现实质错误”。

30.17 英文术语表

Replication	复制；重建论文结果、代码流程或核心研究结论的过程。
Reproducibility	可复现性；给定相同数据和代码，其他研究者能否得到相同结果。
Replication package	复制包；包含数据说明、代码、输出和运行说明的研究材料。
Computational reproducibility	计算可复现性；从数据到结果的计算链条是否完整、可运行、可追踪。
Conceptual replication	概念复制；使用相近但不完全相同的数据、样本或设定检验核心结论。
Gold standard numbers	目标数字；论文中需要复制的系数、标准误、样本量和图形数值。
Tolerance	容许误差；复制结果与论文目标数字之间可接受的差异范围。

Data provenance	数据来源记录；说明数据来自哪里、何时访问、是否受限、如何引用。
Output map	输出地图；说明每张表、每张图和每个正文数字由哪个脚本生成。
Audit log	审计日志；记录复制检查、失败原因、修复尝试和最终判断的文件。

30.18 本章 Review

本章最重要的结论是：论文复制不是低级技术活，而是研究理解的核心训练。

第一，你应该能区分结果复制、计算复制和概念复制。结果复制要求匹配论文数字；计算复制要求追踪从原始数据到表格的生产链；概念复制要求在理解基准结果后进行合理扩展。

第二，你应该能建立复制目标表。复制从目标数字开始：表格位置、系数、标准误、样本量、图形和正文统计量都应先记录下来。没有目标数字，就没有办法判断复制是否成功。

第三，你应该能用顺序原则排查复制失败。先对齐样本，再对齐变量，再对齐模型，最后检查软件和输出。若样本量不一致，直接解释系数差异通常没有意义。

第四，你应该能把复制和识别联系起来。复制 DiD 论文时要检查政策前趋势和处理时间；复制 IV 论文时要检查一阶段和排除限制；复制企业错配论文时要检查变量构造是否真的对应模型对象。

第五，你应该能写一份合格的 replication note。它应包括复制对象、研究问题、数据和代码地图、结果比较、差异解释、识别审计和下一步扩展。它的语气应诚实、具体、可检查，而不是简单宣布“成功”或“失败”。

30.19 核心文献

关于经济学研究透明度、可复现性和复制危机的讨论，可以读 [Dewald et al., 1986]、[Chang and Li, 2015] 和 [Christensen and Miguel, 2018]。关于如何组织社会科学研究代码和数据，[Gentzkow and Shapiro, 2014] 提供了非常实用的规范。若把复制训练放回增长经济学，前面已经读过的 [Mankiw et al., 1992]、[Hall and Jones, 1999]、[Acemoglu et al., 2001] 和 [Hsieh and Klenow, 2009] 都可以作为不同层级的复制对象：跨国增长回归、制度与长期发展、以及微观错配核算。

第三十一章　文献综述与研究选题

前两章把研究训练推进到两个环节：第 29 章讲识别，第 30 章讲复制。本章进入第三个环节：怎样从文献中形成自己的研究问题。

很多学生以为文献综述就是“把相关论文都列出来”。这其实是最容易写坏的综述。真正有用的文献综述，不是论文清单，而是一张研究地图。它要回答：这个领域在问什么问题？已有模型怎样解释这些问题？数据从哪里来？识别依赖什么变化？哪些结论已经比较稳固，哪些地方仍然有争议？你的问题到底填补了哪一种空白？

经济增长尤其需要这种地图式阅读。增长问题太大：技术进步、资本积累、人力资本、制度、结构转型、创新、错配、城市化、AI、产业政策、金融约束，都可以被叫作“增长研究”。若没有文献地图，学生很容易从一个宏大兴趣跳到一个无法完成的题目，例如“研究制度如何影响中国经济增长”或“研究 AI 如何改变长期增长”。这些题目不是错，而是还没有被压缩成可研究问题。

本章要训练的能力，是把一个粗糙兴趣转化为一个可研究且有贡献的问题。这个过程包括四步：界定领域、建立文献矩阵、识别真实空白、形成研究问题。它看似是写作训练，实际是研究设计训练。一个好的文献综述，会逼迫你同时面对理论、数据、识别和贡献。

31.1　学习目标

读完本章，你应该能够完成六件事。

第一，能够区分“背景阅读”和“研究型文献综述”。背景阅读帮助你理解领域；研究型文献综述帮助你定位贡献。前者可以广，后者必须准。

第二，能够从五个维度整理文献：主题问题、理论机制、数据对象、识别策略和主要贡献。读论文时不只记结论，还要记它怎样得到结论。

第三，能够建立文献矩阵，把一组论文放在同一张表里比较，而不是一篇一篇孤立摘要。

第四，能够识别不同类型的研究空白：问题空白、机制空白、数据空白、识别空白、外部有效性空白和理论–实证连接空白。

第五，能够把宏大兴趣压缩成可研究问题。一个可研究问题应包含对象、机制、数据、识别和预期贡献，而不只是一个主题词。

第六，能够写出一段合格的文献综述段落。它应按问题或机制组织，而不是按作者年份机械排列。

31.2 核心问题

本章围绕一个问题展开：一个研究问题如何从“有趣”变成“可研究且有贡献”？

“有趣”只是起点。比如你觉得“AI 与增长”很重要，“地方政府与产业升级”很重要，“城市化与服务业生产率”很重要。这些判断通常是对的，但它们还不是研究问题。研究问题必须进一步回答：哪个具体机制？在哪个样本中？用什么变量观察？与哪一组文献对话？相比已有研究新增了什么？

可以把一个初步研究想法写成五元组：

$$R = (Q, M, D, I, C), \tag{31.1}$$

其中 Q 是问题，M 是机制，D 是数据，I 是识别或推理策略，C 是贡献。一个想法若只有 Q，通常只是兴趣；若有 Q 和 M，它可能是理论直觉；若有 Q, M, D，它开始接近项目；只有当 I 和 C 也清楚时，它才变成可研究问题。

例如，“产业政策是否促进增长”只是 Q。若补充机制，变成“产业政策是否通过缓解融资约束促进高生产率企业扩张”，就有了 M。若进一步说明使用城市–行业–年份企业数据，就有了 D。若利用政策分批实施、行业暴露度或阈值规则，就有了 I。若相对于已有研究，你能说明新增贡献是“把产业政策从产出增长推进到企业资源再配置机制”，才有了 C。

31.3 研究型文献综述不是论文清单

低质量综述常见格式是：A 研究了什么，B 研究了什么，C 研究了什么，然后说“本文在此基础上进一步研究”。这种写法的问题是，读者看不到结构。你列出了很多名字，却没有告诉读者这个领域的知识边界在哪里。

研究型综述应当按问题组织。每一组文献都应回答三个问题：已有研究知道了什么？它们怎样知道？还不知道什么？这三个问题分别对应结论、方法和空白。

以“制度与长期增长”为例。一个清单式综述会说 Hall and Jones 研究社会基础设施，Acemoglu, Johnson and Robinson 研究殖民起源，后续研究讨论地理、人力资本和国家能力。一个研究型综述会更进一步：第一组文献把制度作为跨国收入差异的深层解释；第二组文献尝试用历史或地理变量解决制度内生性；第三组文献质疑工具变量排除限制，并强调地理、疾病、人力资本和国家形成可能同时起作用。这样写，读者才能看见争议在哪里，也才能理解你的研究可能贡献在哪里。

表 31.1 总结两种写法的区别。

表 31.1: 清单式综述与研究型综述

维度	清单式综述	研究型综述
组织方式	按作者或年份逐篇排列	按问题、机制、数据或识别策略组织
读者获得的信息	谁写过什么	这个领域知道什么、怎么知道、还缺什么
对贡献的帮助	贡献容易变成“我也研究”	贡献可以定位为机制、数据、识别或外部有效性
常见问题	堆砌引用、缺少判断	需要真正读懂论文之间的关系

31.4　五维文献矩阵

本书建议使用五维文献矩阵。每篇论文至少记录五项：主题问题、理论机制、数据对象、识别策略和贡献边界。

表 31.2: 五维文献矩阵模板

论文	问题与机制	数据对象	识别或推理	贡献与边界
Paper A	制度影响收入；机制是投资和生产率	跨国截面	IV 或历史变量	深层解释强，排除限制有争议
Paper B	人力资本影响增长；机制是技能和技术吸收	跨国面板	条件收敛回归	与 Solow 模型连接强，因果较弱
Paper C	错配降低 TFP；机制是企业资源配置	企业微观数据	模型核算与反事实	机制清楚，数据要求高

这个矩阵的重点不是“填满表格”，而是迫使你用同一把尺子读论文。读一篇增长论文时，如果你只记“结论是制度重要”，你还没有真正读懂。你还要知道它的制度变量如何测量，收入变量是什么口径，识别来自哪里，最可能被批评的地方是什么，它与理论模型如何连接。

对增长研究而言，五维矩阵还有一个额外好处：它能防止你把理论文献和实证文献分裂开来。例如 Romer 型内生增长论文可能没有回归表，但它有机制、均衡对象和贡献边界；制度实证论文可能没有完整模型，但它隐含了制度影响投资、技术采用和组织效率的机制。矩阵把它们放在同一张研究地图上。

31.5 一个例子：AI、自动化与长期增长

为了让方法更具体，我们以“AI、自动化与长期增长”为例。这个主题很热，但也很容易写空。若只说“AI 会影响生产率和就业”，问题太大；若只列 AI 论文，综述又会变成材料堆积。更好的做法，是先把文献分成机制簇。

表 31.3: AI、自动化与增长的文献地图示例

文献簇	核心机制	典型可观测对象	可能空白
任务替代	AI 替代部分劳动任务，改变劳动份额和工资结构	职业任务、工资、就业、自动化暴露度	长期新任务创造如何抵消替代
新任务创造	技术创造新的岗位、产品和组织流程	新职业、企业组织、岗位描述、专利文本	新任务何时足以支撑总需求和生产率
通用技术扩散	AI 作为 GPT，需要互补投资和组织重组	软件投资、管理实践、云服务、数据资产	扩散滞后和生产率统计低估
创新生产函数	AI 提高研发效率，改变想法生产成本	专利、论文、研发人员、药物发现周期	AI 是否缓解“想法越来越难找”
市场结构	AI 需要数据、算力和平台，可能强化垄断	企业集中度、云计算市场、模型使用成本	创新加速与市场集中之间的权衡

这张表说明，选题不能停在“AI 与增长”。你必须选择一个机制簇。例如，如果你选择“AI 作为通用技术扩散”，那么核心问题就不是 AI 是否重要，而是企业为什么采用慢、采用后为什么短期生产率不一定上升、互补投资如何进入增长核算。可能的研究问题可以进一步压缩为：企业 AI 采用是否通过组织资本积累提高劳动生产率？这就已经有了机制和可观测变量。

注意，这里还没有得到一个完整论文题目。因为识别仍然缺失。若 AI 采用是企业自选择，高生产率企业本来就更可能采用，那么简单比较采用企业和未采用企业没有因果解释。文献综述的任务，就是帮助你看见这个缺口：已有文献可能解释了机制，但识别仍然困难；或者已有文献有识别，但只看短期就业，没有连接长期生产率。

31.6 从兴趣到研究问题

一个粗糙兴趣可以通过四次压缩变成研究问题。

第一次压缩：从主题到对象。不要说“研究城市化”，而要说“研究人口流入城市后服务业生产率如何变化”。不要说“研究制度”，而要说“研究市场准入改革如何影响企业进入和资源再配置”。

第二次压缩：从对象到机制。机制回答“为什么”。城市化可能通过规模经济、匹配效率、知识外溢、公共品拥挤或土地错配影响生产率。你必须选择其中一条主线。

第三次压缩：从机制到可观测变量。规模经济可以看人口密度、企业密度、通勤圈；匹配效率可以看职业转换、招聘时间、工资分散；知识外溢可以看专利、供应链距离、共同发明网络。

第四次压缩：从变量到识别。变量之间有关联不够。你要说明什么变化让你能够区分机制效应和选择效应。

表 31.4 给出几个例子。

表 31.4: 从宏大主题到可研究问题

宏大主题	机制压缩	可观测变量	更像研究问题的表述
中国城市化	劳动匹配与服务业规模经济	城市人口密度、服务业工资、企业进入	城市扩张是否通过服务业企业进入提高劳动生产率
产业政策	融资约束与企业扩张	补贴、贷款、TFPR、投资率	产业政策是否缓解高生产率企业融资约束，还是扩大错配
AI 与增长	通用技术扩散与组织资本	AI 采用、软件投资、管理实践、劳动生产率	AI 采用是否需要互补组织投资才体现为生产率增长
教育与增长	人力资本与技术吸收	教育年限、技能、技术采用、工资	教育扩张是否提高地区吸收前沿技术的能力
地方政府	晋升激励与投资偏向	官员任期、基建投资、土地出让、TFP	地方激励是否推动低回报投资并降低配置效率

这张表不是让你马上开题，而是训练一种思维动作：每个主题都必须落到机制、变量和识别。不能落下来的题目，暂时就不是好题目。

31.7 什么是真实的 research gap

研究空白不是“没人写过这个题目”。在成熟领域，几乎没有完全没人写过的大问题。真实的 gap 通常更细。

问题空白是指已有研究没有直接回答某个重要问题。例如，很多文献研究自动化对就业的影响，但较少研究 AI 是否改变创新生产函数本身。

机制空白是指已有研究知道某个关系存在，但不知道通过什么渠道发生。例如，制度与收入相关，但制度通过投资、技术采用、企业进入还是国家能力发挥作用，可能仍需拆分。

数据空白是指过去因为数据限制无法观察某个对象。企业注册数据、专利文本、夜间灯光、卫星污染、招聘平台、供应链数据和行政记录，都可能让旧问题产生新证据。

识别空白是指已有研究有相关性或核算结果，但缺少可信反事实。例如，错配核算能说明潜在 TFP 损失，却不一定说明某项政策导致错配。

外部有效性空白是指一个机制在某些国家、时期或行业被研究过，但在新的发展阶段或制度环境下是否成立仍不清楚。

理论–实证连接空白是指理论模型已经很成熟，但实证变量没有很好对应模型对象；或者实证结果很多，但缺少能解释它们的统一模型。

表 31.5 总结这些 gap。

表 31.5: 研究空白的类型

空白类型	含义	增长研究例子
问题空白	重要问题尚未被直接回答	AI 是否改变研发生产率而非只改变劳动需求
机制空白	关系存在但渠道不清楚	制度通过投资、创新还是资源配置影响增长
数据空白	新数据使旧问题可观察	用企业注册或招聘数据研究结构转型
识别空白	缺少可信反事实	产业政策与生产率相关但政策选择性强
外部有效性空白	已有结论在新环境下未被检验	发达国家自动化结果能否外推到中国制造业
理论–实证连接空白	模型对象与实证变量没有对齐	TFPR、楔子和真实政策摩擦之间的对应不清

需要警惕的是，gap 不是越大越好。对本科高年级或研究生初期的自学者来说，最

好的 gap 通常是“小而真”：它足够清楚，能在有限时间内用明确数据和方法推进；同时又能连接一个重要文献。大而空的 gap 会让人写不下去，小而假的 gap 则只是换个样本重复一遍。

31.8　选题的可行性约束

一个研究问题的质量，不能只由重要性决定。可以把选题价值写成一个简单评分函数：

$$V = \omega_1 I_m + \omega_2 N + \omega_3 F + \omega_4 C - \omega_5 R, \tag{31.2}$$

其中 I_m 表示重要性，N 表示新颖性，F 表示可行性，C 表示贡献清晰度，R 表示风险。这里的 R 包括数据不可得、识别不可信、问题太大、理论和数据无法对应等风险。

这个公式不是为了精确打分，而是提醒你：重要但不可行的题目，不是当前阶段的好题目；新颖但没人关心的题目，也不是好题目；容易做但没有贡献的题目，只是练习，不是研究。

命题 31.1 (可研究问题的最低条件). *若一个研究想法无法同时说明 M、D、I 和 C，则它至多是研究兴趣，不能构成完整研究问题。*

证明. 由 (31.1)，研究想法 R 至少包含问题、机制、数据、识别和贡献。若缺少 M，则不知道为什么会发生，理论解释不完整；若缺少 D，则不知道如何观察，经验对象不存在；若缺少 I，则无法区分因果、相关或核算关系；若缺少 C，则无法说明相对于已有文献新增什么。因此，缺少其中任一项都会使想法无法完成从兴趣到研究问题的转换。命题得证。 □

这条命题很严格，但很有用。它不要求你在第一天就解决所有问题；它要求你知道自己缺什么。若你缺数据，就先做数据可得性调查；若你缺识别，就先读相近文献的设计；若你缺贡献，就重新整理文献矩阵。

31.9　怎样读单篇论文

文献综述的基本单位仍然是单篇论文。建议每篇论文做一张文献卡片，但文献卡片不应只是摘要。它至少包括八项。

卡片项目	应记录的内容
完整引用	作者、年份、题目、期刊或工作论文版本。
研究问题	作者实际回答的问题，不是论文标题的复述。
理论机制	论文认为因果关系通过什么渠道发生。

数据	数据来源、时期、样本、观察单位、关键变量。
识别或推理	回归、IV、DiD、结构模型、校准、核算或理论证明。
主要结果	核心结论和数量级，避免只写“显著”。
局限	内生性、测量误差、外部有效性、模型假设或数据限制。
与你的关系	它是基础文献、竞争文献、方法来源，还是反面证据。

注意最后一项很重要。读文献不是为了收藏知识，而是为了定位自己的问题。同一篇论文对不同项目的意义不同。Acemoglu, Johnson and Robinson 的制度论文，对制度研究是核心基础文献；对中国地方政府研究可能是深层制度背景；对企业错配研究则可能只是外围动机。

31.10 怎样写综述段落

一段好的文献综述通常有三层：先概括一组文献的共同问题，再说明它们的方法和结论，最后指出剩余空白并引出你的问题。

可以使用如下逻辑结构：

$$\text{已有问题} \to \text{已有证据} \to \text{剩余限制} \to \text{本文位置}.$$

例如，围绕“技术扩散与追赶”的综述段落可以这样组织：

> 一组文献把跨国收入差异理解为技术扩散和吸收能力的结果。这些研究强调，落后经济体并不自动采用前沿技术；人力资本、制度质量、贸易开放和企业能力会影响技术从前沿到本地生产的转化。相关理论解释了为什么同样面对技术距离，不同国家的追赶速度不同；经验研究则使用跨国生产率、技术采用或行业数据来检验吸收能力的重要性。现有证据的局限在于，吸收能力往往被教育年限或宏观制度指标代理，难以观察企业层面的采用、改造和组织互补投资。因此，一个自然的延伸，是使用企业或城市层面的技术采用数据，研究吸收能力如何在微观层面转化为生产率增长。

这段话没有逐篇列作者，却给出了文献结构：共同问题是技术扩散，机制是吸收能力，证据来自理论和经验研究，空白是微观采用过程，下一步是企业或城市数据。这比“某某研究了技术扩散，某某研究了人力资本，某某研究了贸易开放”更有研究价值。

31.11　文献地图中的争议

好的综述不应只总结共识，还要呈现争议。争议通常来自四个来源。

第一，理论机制不同。比如创新政策可能通过纠正知识外部性提高增长，也可能通过保护低效率企业降低竞争压力。

第二，测量对象不同。一个研究用 GDP 增长，另一个用 TFP，第三个用专利或工资。结果不同，可能不是结论冲突，而是对象不同。

第三，识别策略不同。跨国回归、历史 IV、地区 DiD 和企业微观面板回答的是不同层级的问题。

第四，外部环境不同。技术扩散在开放经济体和封闭经济体中不同，产业政策在金融约束强和市场竞争强的环境中也不同。

处理争议时，不能简单说“文献没有一致结论”。更好的写法是说明为什么不一致：机制不同、数据不同、识别不同、环境不同。这样，争议本身就会变成选题来源。

31.12　中国增长研究的选题入口

结合前面第七部分，本书建议从五个入口寻找中国增长研究题目。

入口一：结构转型。不是泛泛研究农业、工业和服务业占比，而是问劳动力流动、城市公共品、服务业企业进入和生产率之间的关系。

入口二：资源错配。不是只估计错配损失，而是问哪一种政策、金融摩擦或市场分割造成了哪一类楔子。

入口三：地方政府激励。不是简单说地方政府促进或阻碍增长，而是区分基础设施、土地财政、招商引资、债务扩张和产业基金等具体渠道。

入口四：技术扩散与产业升级。不是只看专利数量，而是看技术采用、供应链学习、工程师流动、进口设备和本土改造如何影响生产率。

入口五：AI 与新通用技术。不是预测 AI 是否让中国增长更快，而是研究 AI 采用的企业选择、组织互补投资、技能需求变化和行业扩散路径。

表 31.7 给出一个更具体的选题地图。

这张表的作用不是替你决定题目，而是显示一个好题目必须同时经过机制和风险检查。若只看“方向”，每个方向都很大；加入机制、变量和风险后，题目才开始变得具体。

31.13　从文献综述到 mini proposal

文献综述最终要服务于研究设计。一个 mini proposal 至少应包含以下内容。

1. 研究问题：一句话说明你要解释什么。

表 31.7: 中国增长研究的选题地图

方向	机制问题	可用变量类型	主要风险
结构转型	劳动力从低生产率部门转向高生产率部门是否仍在继续	就业份额、工资、城市化、企业进入	流动由增长机会吸引，存在反向因果
资源错配	金融或行政摩擦是否让高生产率企业扩张受限	TFPR、贷款、补贴、投资、进入退出	企业生产率测量误差大
地方政府	政府激励是否偏向短期投资而非长期效率	官员任期、债务、土地出让、基建投资	政策与预期增长共同决定
技术扩散	外部技术如何被本地企业吸收和改造	专利、进口设备、供应链、工程师流动	技术采用高度自选择
AI 与数字化	AI 是否需要互补组织资本才提高生产率	软件投资、岗位文本、云服务、生产率	数据新但口径和可得性不稳定

2. 文献位置：说明最接近的两到三组文献，以及你相对于它们的贡献。

3. 机制：说明为什么会有这个效应或关系。

4. 数据：说明观察单位、时间、变量和数据来源。

5. 识别或推理：说明你的反事实、比较组或模型推理。

6. 预期表格：列出至少三张核心表或图。

7. 风险：说明最可能失败的地方和备选方案。

表 31.8 给出一个骨架。

如果一个 mini proposal 无法填完这张表，通常说明你还没有完成文献综述。反过来，若文献矩阵做得好，这张表会自然出现。

31.14 常见误区

误区一：读太多但没有矩阵。没有矩阵，读得越多越乱。你会记得很多结论，却不知道它们之间的关系。

误区二：只读支持自己想法的论文。真正的综述必须纳入反对证据和替代解释。若一个想法经不起相反文献挑战，它不适合进入论文。

表 31.8: mini proposal 骨架

模块	应写清楚的问题
一句话问题	谁的什么变化，影响什么结果，通过什么机制
最近文献	最接近你的三篇或三组文献分别解决了什么
贡献	你的新增内容是机制、数据、识别、外部有效性还是理论连接
数据	单位、时期、样本、变量、数据可得性和测量误差
识别	反事实来自哪里，最主要威胁是什么
输出	主表、机制表、稳健性表、核心图形
失败风险	数据拿不到、变量测不准、识别太弱、贡献不清

误区三：把“没人研究中国”当作贡献。新样本可以是贡献，但必须说明为什么中国样本能检验新机制、提供新数据或改变外部有效性判断。仅仅换国家通常不够。

误区四：把 gap 写得过大。“现有文献没有完全解释经济增长”不是有用 gap。好的 gap 应具体到机制、数据或识别层面。

误区五：过早确定题目。选题应在文献矩阵之后，而不是之前。先确定题目再找文献，容易变成只寻找支持材料。

31.15 英文术语表

Literature review	文献综述；对已有研究的结构化综合，而不是论文清单。
Literature matrix	文献矩阵；按共同维度比较论文的问题、机制、数据、识别和贡献。
Research gap	研究空白；已有研究尚未充分解决但有学术价值和可行性的空间。
Seminal paper	奠基性论文；定义问题、模型或方法并被后续文献持续引用的论文。
Closest literature	最近文献；与你的研究问题、方法或机制最直接对话的文献。

Contribution	贡献；相对于已有研究新增的机制、数据、识别、理论或外部有效性。
External validity	外部有效性；结论能否推广到其他时期、地区、行业或制度环境。
Mechanism	机制；解释变量为何影响结果变量的经济渠道。
Research question	研究问题；包含对象、机制、数据、识别和贡献的可研究表述。
Mini proposal	小型研究计划；把文献综述转化为问题、数据、识别和预期产出的文档。

31.16 本章 Review

本章最重要的结论是：文献综述不是阅读成果展示，而是研究问题生成器。

第一，你应该能把研究想法写成 (Q, M, D, I, C)：问题、机制、数据、识别和贡献。若一个想法只包含主题兴趣，它还不是研究问题。

第二，你应该能建立五维文献矩阵。读论文时要记录问题、机制、数据、识别和贡献边界。这个矩阵能防止文献堆砌，也能帮助你看见真实空白。

第三，你应该能区分不同类型的 research gap。好的 gap 不一定是完全无人研究，而可能是机制不清、数据不可见、识别不足、外部有效性未检验，或理论与实证没有对齐。

第四，你应该能把宏大主题压缩成可研究问题。压缩顺序是：主题到对象，对象到机制，机制到变量，变量到识别。

第五，你应该能写出综合型文献综述段落。段落应按问题或机制组织，说明已有证据、剩余限制和你的研究位置，而不是逐篇排列作者。

31.17 核心文献

关于文献综述如何从清单走向综合，可读 [Webster and Watson, 2002]、[Boote and Beile, 2005]、[Grant and Booth, 2009] 和 [Snyder, 2019]。关于经济学研究选题和项目启动，[Shapiro, 2022] 提供了非常实用的建议。对增长经济学而言，本书前面读过的 [Mankiw et al., 1992]、[Romer, 1990]、[Aghion and Howitt, 1992]、[Hall and Jones, 1999]、[Acemoglu et al., 2001]、[Hsieh and Klenow, 2009] 和 [Acemoglu and Restrepo, 2019] 都可以作为建立文献矩阵的核心节点：它们分别代表条件收敛、内生技术进步、创造性破坏、制度、长期发展识别、资源错配和自动化增长效应。

第三十二章　Mini Paper：从问题到研究设计

这是本书研究训练部分的最后一章。前面三十一章做了三件事：第一，建立增长理论的模型语言；第二，用中国和发展事实把模型落到现实；第三，训练识别、复制和文献综述。现在要把这些能力合成一件具体作品：一份 mini paper 研究设计。

这里的 mini paper 不是“短作文”。它是一份小型研究计划，要求你把一个增长问题写成可执行的论文蓝图。它不一定已经有最终估计结果，但必须让读者相信：问题清楚，机制明确，数据可得，识别有方向，贡献能说清，风险被诚实处理。换句话说，mini paper 是从学习者进入研究者的过渡形式。

如果说第 29 章训练你问“这个结果能不能解释为因果”，第 30 章训练你问“这个结果怎样被生产出来”，第 31 章训练你问“这个问题在文献中站在哪里”，那么本章训练你问：“我能不能把这些东西组织成自己的第一个研究设计？”

32.1　学习目标

读完本章，你应该能够完成六件事。

第一，能够写出 mini paper 的核心结构：引言、文献位置、机制框架、数据、识别策略、预期表格、限制和下一步。

第二，能够把第 31 章的研究五元组 (Q, M, D, I, C) 扩展为完整论文蓝图，即问题、机制、数据、识别、贡献、输出和风险。

第三，能够写出一个简洁的理论机制或概念模型，用来说明为什么某个政策、制度或技术变化会影响长期增长相关结果。

第四，能够把模型对象翻译成变量表。若模型里有生产率、楔子、吸收能力或组织资本，你要能说明它们在数据中怎样被观察或近似。

第五，能够设计一组主表、机制表、稳健性表和图形，而不是等拿到数据后才临时决定跑什么。

第六，能够用审稿人的视角检查自己的设计：贡献是否够清楚，识别是否可信，数据是否能支撑机制，论文是否过大。

32.2 核心问题

本章围绕一个问题展开：怎样把经济增长学习转化为自己的第一份研究设计？

一个可执行 mini paper 可以写成七元组：

$$P = (Q, M, D, I, C, O, R), \tag{32.1}$$

其中 Q 是研究问题，M 是机制，D 是数据，I 是识别或推理策略，C 是贡献，O 是预期输出，R 是风险。第 31 章已经讨论了前五项，本章新增 O 和 R，因为真正写论文时，不能只说“我有一个问题”，还要说“我会产出哪些表和图”，以及“最可能失败在哪里”。

例如，“AI 是否提高生产率”不是 mini paper。它只有一个主题。更接近 mini paper 的表述是：本文研究制造业企业采用 AI 工具是否通过互补组织投资提高劳动生产率。机制是通用技术采用需要组织资本；数据是企业年份面板、招聘文本或软件投资指标；识别来自政策试点、行业暴露度或外生供给冲击；贡献是把 AI 采用从劳动替代讨论推进到企业组织互补投资与生产率；输出包括采用事实图、基准回归、机制检验、异质性和稳健性；风险是采用自选择和 AI 变量测量误差。

这才像研究设计。

32.3 Mini paper 与普通课程论文的区别

普通课程论文可以以综述为主，重点展示你读懂了文献。mini paper 则必须展示你能设计研究。两者的区别见表 32.1。

这并不意味着 mini paper 一定要完成最终实证。对自学者来说，第一份 mini paper 可以停在“可执行研究设计”层面。但它不能停在“我想研究什么”。它必须具体到变量、样本、估计式和预期图表。

32.4 论文蓝图的基本结构

本书建议第一份 mini paper 使用七节结构。

1. **Introduction**：用一页说明问题、重要性、方法、预期贡献。
2. **Literature and Contribution**：用两到三组文献定位你的 gap。
3. **Mechanism**：写一个简洁模型或概念框架。
4. **Data and Measurement**：说明数据、样本、变量和测量误差。
5. **Empirical Strategy or Quantitative Design**：说明识别、估计式和推断。

表 32.1: Mini paper 与普通课程论文的区别

维度	普通课程论文	Mini paper 研究设计
核心目标	总结和理解一个主题	提出并检验一个可研究问题
文献作用	说明已有研究	定位贡献和识别 gap
模型作用	可有可无，常用于解释背景	必须说明机制或概念框架
数据作用	可以只是描述性材料	必须对应变量、样本和输出表格
方法作用	可以讨论方法	必须说明反事实或推理策略
结尾标准	读者觉得你理解了主题	读者相信这个项目可以被执行

6. **Planned Outputs**：列出主表、机制表、稳健性表和图形。
7. **Risks and Next Steps**：诚实说明最可能失败之处和备选方案。

表 32.2 是一个可以直接使用的蓝图模板。

32.5 一个贯穿示例：城市化与服务业生产率

下面用一个贯穿示例演示 mini paper 设计。主题来自第 26 章：结构转型和城市化。粗糙兴趣是“中国城市化是否还能推动增长”。这太大。我们把它压缩为：

> 本文研究城市人口密度上升是否通过服务业企业进入和劳动匹配提高城市服务业劳动生产率。

这个问题比“城市化与增长”更好，因为它明确了对象、机制和结果变量。对象是城市人口密度，机制是服务业企业进入和劳动匹配，结果是服务业劳动生产率。它也自然连接增长理论：结构转型不是劳动从农业流向城市就结束，而是要看城市内部是否形成高生产率服务业和更有效匹配。

表 32.2: Mini paper 蓝图模板

模块	必须回答的问题
问题 Q	谁的什么变化，影响什么增长相关结果
机制 M	为什么会有这个效应，模型中的关键变量是什么
数据 D	观察单位、时间、样本、变量、数据来源和口径
识别 I	反事实从哪里来，最核心假设是什么
贡献 C	相对最近文献新增机制、数据、识别还是外部有效性
输出 O	主表、事实图、机制表、稳健性表和附录表
风险 R	数据、测量、识别、理论解释和可行性风险

32.6 机制模型：从规模经济到生产率

设城市 c 在年份 t 的服务业产出为

$$Y_{ct}^{S}=A_{ct}^{S}\left(L_{ct}^{S}\right)^{\alpha}\left(K_{ct}^{S}\right)^{1-\alpha}, \tag{32.2}$$

其中 Y_{ct}^{S} 是服务业增加值，L_{ct}^{S} 是服务业就业，K_{ct}^{S} 是服务业资本或资本代理变量，A_{ct}^{S} 是服务业生产率。劳动生产率为

$$y_{ct}^{S}=\frac{Y_{ct}^{S}}{L_{ct}^{S}}.$$

取对数并整理：

$$\log y_{ct}^{S}=\log A_{ct}^{S}+(1-\alpha)\left(\log K_{ct}^{S}-\log L_{ct}^{S}\right). \tag{32.3}$$

城市化若要提高服务业劳动生产率，至少可以通过两条渠道发生。

第一是生产率渠道。人口密度提高可能增加市场规模、专业化分工和知识外溢，从而提高 A_{ct}^{S}。可以写成

$$\log A_{ct}^{S}=a_{c}+\lambda_{t}+\theta\log Density_{ct}+\eta Entry_{ct}+\xi Match_{ct}+u_{ct}, \tag{32.4}$$

其中 $Entry_{ct}$ 表示服务业企业进入率，$Match_{ct}$ 表示劳动匹配效率。

第二是资本深化渠道。人口流入城市后，服务业资本、商业地产、数字基础设施和交通网络可能扩张，从而提高 $\log K_{ct}^{S}-\log L_{ct}^{S}$。若研究问题关注生产率机制，就必须在实证中区分生产率渠道和资本深化渠道。

命题 32.1 (机制与变量的一致性). *若论文声称城市化通过服务业生产率渠道影响增长，则研究设计必须至少观察或近似观察 A_{ct}^{S}、$Entry_{ct}$ 或 $Match_{ct}$ 中的一项；仅使用总 GDP 增长率不能区分生产率机制、资本深化机制和部门再配置机制。*

证明. 由 (32.3)，服务业劳动生产率变化可以分解为服务业 TFP 变化和资本劳动比变化。由 (32.4)，城市化对 A_{ct}^S 的影响又可能通过企业进入和匹配效率发生。若实证只观察总 GDP 增长率，则该结果同时包含服务业生产率、资本深化、工业变化、人口结构和部门份额变化，无法识别城市化是否通过服务业生产率渠道发生。故机制声称要求变量与机制对象一致。命题得证。 □

这个命题是 mini paper 设计的核心原则：你不能在引言里讲一个机制，在数据里测另一个变量，在回归里解释第三个结果。

32.7 从模型到变量表

机制模型必须翻译成变量表。表 32.3 给出示例。

表 32.3: 城市化与服务业生产率项目的变量表

模型对象	数据变量	构造方式	主要风险
y_{ct}^S	服务业劳动生产率	服务业增加值除以服务业就业，取对数	就业统计口径变化
$Density_{ct}$	人口密度	城区常住人口除以建成区面积，取对数	城市边界调整
$Entry_{ct}$	服务业企业进入率	新注册服务业企业数除以存量企业数	注册不等于真实经营
$Match_{ct}$	匹配效率代理	服务业工资分散、岗位空缺或职业转换指标	数据可得性弱
K_{ct}^S/L_{ct}^S	资本劳动比	服务业固定资产或投资存量除以就业	资本存量估计误差

注意，“主要风险”不是附属内容。它决定论文可信度。如果城市边界调整频繁，人口密度变化可能只是统计口径变化；如果企业注册数据不能区分空壳企业，进入率可能高估真实进入；如果服务业就业统计低估灵活就业，劳动生产率会被系统高估。

32.8 一张教学用 miniature 数据表

为了让变量不悬空，表 32.4 给出一个教学用 miniature panel。它不是用于真实估计的数据，而是展示 mini paper 中变量应如何组织。真实项目中，表格行数会扩展到数百个城市年份观测。

表 32.4: 教学用城市年份 miniature panel

城市	年份	log 人口密度	服务业就业份额	企业进入率	log 服务业劳动生产率
A	2010	8.20	0.42	0.082	10.15
A	2015	8.36	0.49	0.096	10.42
A	2020	8.48	0.56	0.103	10.63
B	2010	7.75	0.35	0.061	9.88
B	2015	7.91	0.39	0.068	10.02
B	2020	8.03	0.44	0.074	10.21

说明：本表为教学示例，用来展示城市年份面板的数据结构和变量口径，不代表真实城市数据。

这张小表能帮助你理解固定效应估计的来源。若使用城市固定效应，识别不是比较 A 城市和 B 城市谁更发达，而是比较同一城市内部人口密度变化与服务业生产率变化是否同步，并用其他城市的同期变化作为参照。若 A 城市本来就处在更快增长趋势上，则还需要城市趋势、政策冲击或其他识别设计来处理选择性。

32.9 基准估计式

一个自然的基准面板回归为

$$\log y_{ct}^{S} = \beta \log Density_{ct} + X_{ct}'\gamma + \mu_c + \lambda_t + \varepsilon_{ct}, \tag{32.5}$$

其中 μ_c 是城市固定效应，λ_t 是年份固定效应，X_{ct} 包括产业结构、教育、基础设施、资本劳动比等控制变量。这里的 β 衡量同一城市人口密度上升与服务业劳动生产率变化之间的条件相关。

但 (32.5) 还不是强因果设计。人口密度上升可能由服务业机会吸引，存在反向因果；高潜力城市可能同时吸引人口和企业，存在遗漏变量；城市边界变化可能同时影响人口密度和统计产出，存在测量误差。因此，mini paper 必须明确：基准回归只是起点，不能直接承诺因果。

若能找到外生变化，可以进一步设计工具变量或 DiD。例如，历史交通节点、地形约束、规划边界调整、政策分批扩容，都可能改变人口密度或城市扩张强度。但每一种工具或政策都要面对排除限制：它是否只通过人口密度影响服务业生产率？若历史交通节点也直接影响贸易和产业结构，就不能被简单当作密度工具。

32.10 识别设计的三个层级

对第一份 mini paper 来说，不一定一开始就拥有完美识别。可以把识别设计分成三个层级。

表 32.5: Mini paper 的识别设计层级

层级	能做什么	不能声称什么
描述性事实	展示城市化、服务业份额和劳动生产率的共同变化	不能解释为因果效应
固定效应面板	控制城市不变差异和共同年份冲击	不能完全解决选择性趋势
准实验设计	利用政策、地理、阈值或外生冲击构造反事实	仍需证明识别假设和排除替代渠道

诚实地说明自己处在哪一层，比假装有强因果更好。如果目前只有描述性和固定效应结果，可以把 mini paper 定位为“建立事实和机制假说”；如果有可信政策冲击，才把语言推进到“估计因果效应”。

32.11 预期表格与图形

研究设计应在跑回归前就列出预期输出。表 32.6 给出本示例的输出计划。

预期输出不是形式主义。它能防止研究变成“跑出什么写什么”。如果你事先说核心机制是企业进入和匹配效率，那么机制表就不能缺；如果最主要风险是城市边界变化，稳健性就必须处理边界口径。

32.12 Pre-analysis plan 的简化版本

真实论文不一定都需要正式注册 pre-analysis plan，但 mini paper 训练可以借鉴它的精神：在看到结果前，先写清楚假说、样本、变量、估计式和主要检验。这样可以减少事后选择结果的诱惑。

写这个表时，你会立刻发现设计中的薄弱处。例如，若机制变量拿不到，论文就不能强行声称“匹配效率提高”；若行政区划调整无法处理，人口密度变量就很危险；若标准误不按城市聚类，推断可能过于乐观。

表 32.6: 城市化与服务业生产率项目的预期输出

输出	内容	作用
Figure 1	城市人口密度、服务业就业份额和服务业劳动生产率的长期趋势	建立事实背景
Table 1	样本城市描述统计和变量口径	说明数据结构和可比性
Table 2	基准固定效应回归	展示核心条件相关
Table 3	企业进入率和匹配效率机制检验	检查机制是否与模型一致
Table 4	异质性：大城市、小城市、制造业基础不同城市	连接理论机制和发展阶段
Table 5	稳健性：边界调整、替代生产率变量、不同聚类层级	回应主要识别风险

表 32.7: 简化 pre-analysis plan 模板

项目	内容
主要假说	人口密度上升与服务业劳动生产率提高正相关，机制部分来自服务业企业进入
样本	地级市年份面板；剔除行政区划严重调整且无法重构口径的城市
主要结果变量	log 服务业劳动生产率
主要解释变量	log 人口密度
机制变量	服务业企业进入率、服务业工资分散或岗位匹配代理
基准估计式	城市固定效应、年份固定效应、核心控制变量，标准误按城市聚类
主要异质性	初始人口规模、制造业基础、教育水平和交通基础设施
主要风险检验	城市边界调整、人口流入选择性、替代生产率口径、空间溢出

32.13 引言应该怎样写

Mini paper 的引言不需要很长，但必须完成四个任务：提出问题、说明重要性、交代方法、定位贡献。

可以采用五段结构。

1. 第一段：增长问题和现实背景。说明为什么这个问题重要。
2. 第二段：研究问题。把宏大主题压缩成一句可研究问题。
3. 第三段：机制和数据。说明你为什么这样测量，数据能看到什么。
4. 第四段：识别和预期输出。说明你将如何构造反事实或至少如何建立事实。
5. 第五段：贡献。说明相对于最近文献，你新增什么。

以下是本示例引言的压缩版开头：

> 随着中国城市化进入较高水平阶段，城市化对增长的作用不再只是把劳动力从农业转向工业和城市，而是取决于城市内部能否形成高生产率服务业和更有效的劳动匹配。本文研究城市人口密度上升是否通过服务业企业进入和劳动匹配提高城市服务业劳动生产率。这个问题连接结构转型和城市经济学：若城市化仍然能提高生产率，它应当在服务业企业进入、专业化分工和匹配效率中留下可观察痕迹。

这段话做了三件事：把问题放进增长背景，把对象压缩到服务业生产率，把机制指向企业进入和匹配。它不是文学化开场，而是在和读者签订研究合同。

32.14 贡献应该怎样写

贡献不能写成“本文丰富了相关文献”。这句话几乎没有信息。贡献至少要说明相对于哪组文献，你新增了什么。

对本示例，贡献可以写成三层。

第一，相对于结构转型文献，本文把城市化的作用从部门份额变化推进到城市内部服务业生产率机制。

第二，相对于城市经济学文献，本文把人口密度与生产率的关系放进增长框架，区分企业进入、匹配效率和资本深化。

第三，相对于中国增长研究，本文提供城市层面的服务业生产率事实，帮助理解中国增长从工业化阶段转向服务化阶段后，城市化红利是否仍然存在。

注意，这三层贡献不必都很大，但必须具体。一个小而清楚的贡献，比一个宏大但模糊的贡献更像真正研究。

32.15 风险清单

在 mini paper 中主动写风险，不会削弱论文，反而会提高可信度。表 32.8 给出风险清单。

表 32.8: 风险清单与应对方案

风险	为什么严重	应对方案
人口密度内生	高生产率城市吸引人口流入	加入城市趋势；寻找政策或地理变化；谨慎使用因果语言
城市边界变化	密度和产出可能因统计口径同时变化	使用可比口径；剔除严重调整城市；做边界稳健性
服务业就业误差	灵活就业和非正规就业可能漏计	使用多种就业口径；报告测量限制
企业进入率失真	注册企业不等于实际经营企业	结合注销、纳税或就业信息；做替代进入指标
机制变量缺失	无法证明企业进入或匹配渠道	把论文定位为事实建立；降低机制声称强度
空间溢出	一个城市变化影响周边城市	使用区域聚类或空间稳健性；讨论外部性

一个好的风险清单不是自我否定，而是研究边界管理。你要让读者知道：哪些问题会被本文处理，哪些问题只能部分处理，哪些问题留给未来研究。

32.16 模拟答辩：审稿人会问什么

写完 mini paper 后，应该模拟答辩。下面是五个最常见问题。

问题一：你的问题为什么重要？回答不能只说“城市化很重要”。要说城市化进入新阶段后，增长机制从工业吸纳劳动力转向服务业生产率和匹配效率，因此这个问题关系到增长减速后的新动能。

问题二：你的贡献相对于已有文献在哪里？回答要具体到最近文献。本文不是重新证明城市化重要，而是把服务业生产率机制和城市内部企业进入放进结构转型框架。

问题三：你的识别能否解释因果？若只有固定效应，应诚实回答：基准设计主要建立条件相关和机制事实，不能完全解释为因果；论文会通过趋势、替代样本和机制检验增强可信度。若找到准实验，再说明核心假设。

问题四：数据能否支撑机制？回答要回到变量表。若使用企业进入率和匹配代理，就说明它们怎样对应 $Entry_{ct}$ 和 $Match_{ct}$；若拿不到匹配数据，就降低机制声明。

问题五：如果主结果不显著怎么办？不显著不是失败。可能说明城市化红利已经减弱，或者机制只在某些城市存在。预先设计异质性和机制检验，可以让零结果仍然有解释价值。

32.17 从 mini paper 到真正论文

Mini paper 完成后，有三条升级路径。

第一条是数据升级。把教学数据或初步城市面板换成更细的企业、行业、招聘或地理数据，增强机制观察能力。

第二条是识别升级。寻找更可信的政策冲击、阈值规则、地理约束或历史工具，提升因果解释力。

第三条是模型升级。把概念机制扩展为正式模型，例如城市规模、企业进入和匹配效率共同决定服务业生产率的均衡模型。

但不要同时升级所有东西。第一篇研究最容易失败的方式，就是问题、数据、识别和模型同时扩张。更好的路径是先把一个小机制做扎实。

32.18 常见误区

误区一：题目太大。“中国经济增长的新动能”不是 mini paper。它可以是书名，不能是第一篇研究设计。

误区二：模型和数据脱节。模型讲知识外溢，数据只看 GDP；模型讲错配，数据没有企业或行业层面变量；模型讲 AI 采用，数据只有专利数量。这些都会削弱论文。

误区三：把控制变量当作识别。加很多控制变量不能自动解决内生性。识别来自反事实，而不是变量数量。

误区四：没有预期输出。若你不知道论文会有什么表和图，说明研究设计还不够清楚。

误区五：贡献写得像口号。“本文具有重要理论和现实意义”不是贡献。贡献必须说明相对哪组文献新增了什么。

32.19 英文术语表

Mini paper	小型研究论文或研究设计；用于训练完整论文结构但规模较小。
Research proposal	研究计划；说明问题、文献、机制、数据、识别和预期贡献的文档。
Pre-analysis plan	预分析计划；在看到结果前预先写清样本、变量、模型和检验。
Estimand	目标参数；研究希望估计或解释的具体对象。
Conceptual framework	概念框架；用简洁模型或逻辑图说明变量之间的机制关系。
Data and measurement	数据与测量；说明数据来源、样本、变量构造和测量误差。
Planned outputs	预期输出；研究设计中预先安排的表格、图形和附录结果。
Risk register	风险清单；列出研究最可能失败或被质疑的地方及应对方案。
Defense	答辩；用审稿人或导师视角检验研究问题、方法和贡献。
Scope control	范围控制；限制研究问题规模，避免项目失控。

32.20 本章 Review

本章最重要的结论是：mini paper 是一份可执行研究设计，而不是一个主题作文。

第一，你应该能把研究蓝图写成 (Q, M, D, I, C, O, R)：问题、机制、数据、识别、贡献、输出和风险。缺少任何一项，研究设计都不完整。

第二，你应该能让模型、变量和识别对齐。若引言声称一个机制，数据中必须有对应变量或可接受代理；若估计式只能给出相关，就不能写成因果效应。

第三，你应该能预先列出表和图。主表、机制表、异质性表和稳健性表不是跑完结果后的装饰，而是研究设计的一部分。

第四，你应该能主动写风险。数据口径、内生性、测量误差、空间溢出和外部有效性都应被提前识别，并转化为稳健性或限制。

第五，你应该能用模拟答辩检查自己的项目。如果你能清楚回答“为什么重要、贡献在哪、识别多强、数据是否支撑机制、零结果怎么办”，你的研究设计就已经接近真正论文。

32.21 通向 PhD+ 专题：为什么还要读第 33–35 章

到这里，主线 32 章已经完成了从增长事实、模型工具、Solow、Ramsey、OLG、内生增长、创新扩散、中国增长到研究设计的闭环。如果目标只是系统理解增长经济学，读到本章已经足以形成一套完整框架：你知道事实从哪里来，模型如何约束解释，数据怎样进入论证，研究问题如何被写成可执行设计。

但如果目标是进入 PhD 增长课、读前沿论文，或者把中国增长问题推进到更复杂的研究层次，第 33–35 章仍然必要。原因不是它们增加了三个“高级话题”，而是它们把前面学过的工具放进更尖锐的场景。

第 33 章把技术进步从一个中性的 A_t 拆成技术方向、任务结构和分配后果。它迫使你同时处理增长率、工资差距、劳动份额和自动化。第 34 章把一国增长放到开放经济中，要求你区分贸易带来的静态收益、市场规模、技术扩散和全球价值链学习。第 35 章把金融摩擦和信贷约束放进长期增长，说明为什么高储蓄、高投资和高信贷并不自动等于高效率增长。

因此，第 33–35 章的读法应该不同于前面的入门章节。读者不必追求一次性记住所有模型细节，而应抓住三条共同线索：第一，长期增长机制通常与分配、开放和金融摩擦共同出现；第二，高级增长论文很少只有一个代表性主体和一个技术参数；第三，研究设计必须把模型楔子、数据代理和识别策略对应起来。这样读，PhD+ 专题就不是主线之外的附加包，而是主线走向研究前沿的自然延伸。

32.22 核心文献

研究设计和实证论文写作可以继续参考 [Angrist and Pischke, 2009]、[Gentzkow and Shapiro, 2014]、[Christensen and Miguel, 2018] 和 [Shapiro, 2022]。若你的 mini paper 走向结构转型和城市化，可回到 [Herrendorf et al., 2014]；若走向制度和长期发展，可回到 [Hall and Jones, 1999] 与 [Acemoglu et al., 2001]；若走向错配和企业动态，可回到 [Hsieh and Klenow, 2009]；若走向 AI、自动化和通用技术，可回到 [Bresnahan and Trajtenberg, 1995]、[Brynjolfsson et al., 2021] 和 [Acemoglu and Restrepo, 2019]。本章的关键不是再多读一篇文献，而是把文献、模型、数据和识别组织成一份能被执行、能被批评、也能被改进的研究计划。

第九部分

PhD+ 高级专题扩展

第三十三章　技术方向、不平等与任务模型

前面的内生增长和创新章节主要问一个问题：技术进步从哪里来？本章把问题推进一步：技术进步会朝哪个方向发生？它会增强哪一类劳动的生产率，替代哪一类任务，又把增长收益分配给谁？

这个问题使增长理论进入 PhD 课程中更现代的一层。Solow 模型把技术进步写成一个共同提高所有投入效率的 A_t；Romer 和 Schumpeterian 模型解释 A_t 或产品质量为什么增长；但现实中的技术并不总是中性的。计算机、工业机器人、平台算法和生成式 AI 可能提高高技能劳动的边际产出，也可能替代中等技能的例行任务，还可能创造新的互补任务。于是，同样是“技术进步”，它对总产出、劳动份额、工资差距和就业结构的影响可以完全不同。

本章的目标不是把增长理论改写成劳动经济学，而是让你看到一个更深的事实：长期增长不仅是 Y 的增长，也是生产任务、要素需求和收入分配的共同演化。技术方向一旦内生，增长、分配和政策就不能分开讨论。

33.1　学习目标

读完本章，你应该能够完成六件事。

第一，区分中性技术进步、要素增强型技术进步、技能偏向型技术进步和任务替代型技术进步。

第二，推导一个高技能–低技能 CES 模型中的相对工资公式，理解技能供给、替代弹性和技术方向如何共同决定技能溢价。

第三，理解 Acemoglu 式 directed technical change 的核心逻辑：技术方向由市场规模效应和价格效应共同决定。

第四，掌握资本–技能互补的基本思想：资本深化不一定压低技能溢价，如果新资本更强地互补高技能劳动，技能工资差距反而可能扩大。

第五，把任务模型和增长模型连接起来，说明自动化为什么可能同时提高生产率、降低劳动份额，并改变工资结构。

第六，能够用这些模型阅读 AI、机器人、教育扩张、收入不平等和中国技能升级的经验事实。

33.2 核心问题

本章的核心问题是：

为什么技术进步会同时带来增长和分配变化？

更具体地说，给定一个经济体的技术边界正在外移，我们不能只问总量生产率是否上升，还要问三个问题。

第一，技术进步是提高所有劳动的效率，还是更偏向高技能劳动？如果 A_H 增长快于 A_L，那么即使高技能劳动供给增加，高技能工资相对低技能工资也可能继续上升。

第二，技术进步是补充劳动，还是替代劳动？如果机器主要替代例行任务，那么就业和工资的变化会集中在特定职业和技能层次，而不是平均分布。

第三，技术方向为什么会被选择？如果创新者追逐利润，他们会把研发资源投向更大的市场、更高的价格或更容易突破的技术方向。于是，教育结构、工资结构、市场规模和政策都会反过来影响技术路径。

这三个问题把增长理论从“技术进步率是多少”推进到“技术进步是什么形状”。

33.3 为什么中性技术进步不够

最熟悉的 Cobb–Douglas 生产函数是

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_tL_t)^{1-\alpha}. \tag{33.1}$$

这里 A_t 是劳动增强型技术。这个设定有一个优点：它可以支持平衡增长路径。若 A_t 以常数率增长，资本、产出和消费可以沿着同一比例增长，资本产出比和要素份额保持稳定。

但 (33.1) 也隐藏了很多问题。它把所有劳动放在同一个 L_t 中，仿佛大学毕业生、技术工人、流水线工人、软件工程师、司机、客服和医生都被同一种技术同等影响。现实不是这样。计算机对会计、工程、金融分析、软件开发和办公管理的影响，与对低技能服务劳动的影响不同；工业机器人对制造业装配任务的影响，与对教育、护理、研发任务的影响也不同。

如果模型只有一个 A_t，我们很难解释三个事实。

第一，许多发达经济体在 20 世纪后期经历了明显的技能溢价上升。高教育劳动供给增加，本来应当压低其相对工资，但相对工资仍然上升，这说明需求侧技术变化很重要。

第二，劳动收入份额在许多国家和行业中下降。若 Cobb–Douglas 中 α 固定，要素份额应当相对稳定。劳动份额下降要求我们考虑资本–劳动替代弹性、投资品价格、市场势力、全球化或任务替代。

第三，就业结构出现极化。技术进步并不是简单提高所有工作效率，而是更容易替代可编码、可规则化、可重复的任务，同时补充抽象分析、沟通协调和复杂服务任务。

这些事实不会推翻 Solow、Romer 或 Schumpeterian 模型，但会告诉我们：进入高级增长理论后，技术进步必须被拆开。

33.4　一个高技能–低技能模型

先把劳动分成两类：高技能劳动 H 和低技能劳动 L。总产出由一个 CES 聚合函数给出：

$$Y = \left[(A_H H)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (A_L L)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \tag{33.2}$$

其中 A_H 是高技能增强型技术，A_L 是低技能增强型技术，$\sigma > 0$ 是两类有效劳动之间的替代弹性。

竞争市场中，工资等于边际产出。由 (33.2) 可得高技能相对低技能工资：

$$\frac{w_H}{w_L} = \left(\frac{A_H}{A_L} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \left(\frac{H}{L} \right)^{-\frac{1}{\sigma}}. \tag{33.3}$$

命题 33.1 (技能溢价的两个力量). *在 CES 高低技能模型中，高技能相对工资由两股力量决定：高技能相对供给 H/L 增加会降低 w_H/w_L；高技能偏向型技术 A_H/A_L 上升会在 $\sigma > 1$ 时提高 w_H/w_L。*

证明。对 (33.3) 取对数：

$$\log \frac{w_H}{w_L} = \frac{\sigma-1}{\sigma} \log \frac{A_H}{A_L} - \frac{1}{\sigma} \log \frac{H}{L}.$$

对 $\log(H/L)$ 求偏导得到 $-1/\sigma < 0$，所以高技能供给增加降低技能溢价。对 $\log(A_H/A_L)$ 求偏导得到 $(\sigma-1)/\sigma$。当 $\sigma > 1$ 时，高低技能是较强替代品，高技能偏向型技术提高高技能相对工资；当 $\sigma < 1$ 时，两类劳动互补性强，提高 A_H 可能反而降低高技能相对稀缺性。命题得证。

这个公式非常重要。它说明教育扩张和技能溢价上升可以同时发生。若 H/L 上升，但 A_H/A_L 上升得更快，技能溢价仍会上升。Goldin 和 Katz 把这种关系称为教育与技术之间的竞赛：教育增加技能供给，技术变化增加技能需求，工资不平等取决于哪一方跑得更快。

33.5 一张数据事实表：教育扩张与技能溢价

表 33.1 给出本章要解释的代表性事实。这里不是为了估计一个新结果，而是把文献中反复出现的事实压缩成模型约束：如果一个模型不能解释这些事实，就很难成为理解现代技术进步的核心模型。

表 33.1: 技术方向与分配的代表性事实

事实	典型观察	对模型的要求
技能供给上升	发达经济体大学教育扩张，高技能劳动占比提高	仅靠供给增加应压低技能溢价，需要需求侧技术偏向解释相对工资上升
技能溢价上升	美国等经济体 1980 年代后高学历工资优势明显扩大	需要 A_H/A_L 上升、资本–技能互补或任务结构变化
例行任务下降	计算机化与例行认知、例行手工任务减少相关	技术不是只提高 A，而是替代特定任务
劳动份额下降	多国和多行业劳动收入份额自 1980 年代后显著下降	Cobb–Douglas 固定份额不足，需要资本替代、自动化、市场势力或全球化解释
就业极化	中等技能例行岗位相对收缩，高技能抽象岗位和部分低技能服务岗位扩张	需要把职业拆成任务，而不是只按教育分组

这些事实对应的经典文献包括资本–技能互补 [Krusell et al., 2000]、任务内容变化 [Autor et al., 2003]、教育与技术竞赛 [Goldin and Katz, 2008]、劳动份额下降 [Karabarbounis and Neiman, 2014]，以及自动化和新任务框架 [Acemoglu and Restrepo, 2018, Acemoglu and Restrepo, 2019]。

33.6 Directed technical change：技术为什么偏向某些要素

现在让技术方向内生。设创新者可以投资于两类技术：提高高技能效率的 A_H，或提高低技能效率的 A_L。研发资源有限，创新者选择利润更高的方向。

直觉上，某一方向的创新利润取决于两项。

第一是**市场规模效应**。如果高技能劳动 H 很多，那么提高 A_H 的技术可以应用在更大的市场上，创新者更愿意开发高技能互补技术。

第二是**价格效应**。如果某一类有效劳动更稀缺，它的边际产品和价格更高，改进这类技术的收益也更高。

把两者放在一起，技术方向不只是科学发现的自然结果，也是经济激励的结果。设高技能技术创新的相对利润可写成

$$\frac{\Pi_H}{\Pi_L} = \left(\frac{p_H}{p_L}\right)^{\eta} \left(\frac{H}{L}\right)^{\chi} \left(\frac{A_H}{A_L}\right)^{-\psi}, \tag{33.4}$$

其中 p_H/p_L 表示高技能有效劳动的相对价格，H/L 表示市场规模，$\eta, \chi, \psi > 0$。最后一项表示“容易摘的果子”：如果某一方向已经很先进，继续改进可能更难。

均衡技术方向由

$$\frac{\Pi_H}{\Pi_L} = 1 \tag{33.5}$$

决定。若高技能供给增加，一方面 H/L 上升扩大高技能技术市场；另一方面高技能相对工资可能下降，降低价格激励。最终 A_H/A_L 是否上升，取决于市场规模效应是否强于价格效应。

命题 33.2 (强市场规模效应下的技能偏向). *若高技能市场规模效应足够强，则高技能劳动供给增加会诱导更多高技能偏向型技术进步，从而可能在长期提高 A_H/A_L。*

证明。对 (33.4) 取对数，并令均衡条件为零：

$$0 = \eta \log \frac{p_H}{p_L} + \chi \log \frac{H}{L} - \psi \log \frac{A_H}{A_L}.$$

整理得到

$$\log \frac{A_H}{A_L} = \frac{\eta}{\psi} \log \frac{p_H}{p_L} + \frac{\chi}{\psi} \log \frac{H}{L}.$$

若 H/L 上升导致 p_H/p_L 下降，第一项为负；但只要第二项市场规模效应足够大，总效应仍可为正。因此，高技能供给扩张可能诱导高技能偏向型创新。命题得证。

这个结论很有力量。它把“教育扩张”从单纯的供给冲击变成技术方向的塑造力量。一个经济体如果持续扩大高等教育、工程师和科研人员供给，企业会更愿意开发与这些技能互补的机器、软件、组织流程和平台系统。反过来，如果劳动市场以低技能、低工资劳动为主，创新方向可能更偏向节省高技能或使用低成本劳动的技术。

33.7　资本–技能互补

另一条重要机制是资本–技能互补。普通 Solow 模型里，资本和劳动通过 Cobb–Douglas 结合，资本深化提高所有劳动的平均产出。但如果新资本，尤其是 ICT、自动化设备、软件和数据系统，更强地互补高技能劳动，那么资本积累会提高高技能相对需求。

一个简单设定是把高技能劳动和设备资本先组合，再与低技能劳动组合：

$$Y=\left[\lambda L^{\frac{\rho-1}{\rho}}+(1-\lambda)\left(\mu K_E^{\frac{\nu-1}{\nu}}+(1-\mu)H^{\frac{\nu-1}{\nu}}\right)^{\frac{\nu}{\nu-1}\cdot\frac{\rho-1}{\rho}}\right]^{\frac{\rho}{\rho-1}}, \tag{33.6}$$

其中 K_E 是设备或 ICT 资本。若设备资本和高技能劳动之间更互补，即 ν 较低，而低技能劳动与这个组合之间替代性更强，则 K_E 增长会提高高技能劳动的边际产出。

这解释了一个看似反常的现象：资本变多并不一定使劳动整体受益相同。若资本是机械化设备，可能替代低技能例行劳动；若资本是软件、数据库和复杂设备，可能需要工程师、管理者和数据分析人员来使用，因而提高高技能工资。

33.8 任务模型：从“技能”走向“工作内容”

高低技能模型仍然有一个问题：教育水平不等于工作任务。一个大学毕业生可能做例行文书工作，一个非大学劳动者也可能做复杂手工服务。任务模型因此把生产拆成连续任务。

设任务 $i\in[0,1]$，每个任务都需要被完成。任务可以由劳动完成，也可以由机器或算法完成。总产出是任务产出的聚合：

$$\log Y=\int_0^1 \log y(i)\,di. \tag{33.7}$$

若任务 i 由劳动完成，

$$y(i)=\gamma_L(i)\ell(i);$$

若由机器完成，

$$y(i)=\gamma_K(i)k(i).$$

自动化意味着某些任务从劳动集合 $\mathcal{L}$ 移到机器集合 $\mathcal{K}$。新任务创造意味着新的劳动任务进入生产集合，或者原本不存在的高价值任务被创造出来。

为了看清分配效应，设任务测度为 $1+n$，其中 n 是新劳动任务测度；自动化任务测度为 m。如果所有任务权重相同，劳动任务份额可写成

$$s_L^{task}=\frac{1-m+n}{1+n}. \tag{33.8}$$

这个表达式不是完整的一般均衡劳动收入份额，但它抓住了任务内容变化的核心。

命题 33.3 (自动化与新任务的相反作用). *在 (33.8) 中，自动化测度 m 上升降低劳动任务份额；新劳动任务测度 n 上升提高劳动任务份额，且其效果在 $m>0$ 时为正。*

证明。 由 (33.8)，

$$\frac{\partial s_L^{task}}{\partial m}=-\frac{1}{1+n}<0.$$

再对 n 求导：

$$\frac{\partial s_L^{task}}{\partial n} = \frac{(1+n)-(1-m+n)}{(1+n)^2} = \frac{m}{(1+n)^2} \geq 0.$$

因此，自动化降低劳动任务份额，新任务创造提高劳动任务份额。命题得证。

这条命题给 AI 讨论一个清楚框架。若 AI 只替代原来由人完成的文本、客服、代码、设计、翻译、审计和管理任务，而没有创造足够多的新任务，那么劳动份额和某些技能组工资可能下降。若 AI 同时创造新职业、新产品、新服务和新组织流程，并扩大需求，那么替代效应可能被部分抵消。

33.9 教学数值例子：自动化、新任务与劳动任务份额

表 33.2 给出一个最小数值例子。它不是实证估计，而是帮助你读懂 (33.8)。

表 33.2: 自动化与新任务的数值例子

情形	自动化任务 m	新劳动任务 n	劳动任务份额 s_L^{task}
基准	0.20	0.00	0.80
自动化上升	0.50	0.00	0.50
自动化且有新任务	0.50	0.30	0.62
强自动化但强新任务	0.70	0.70	0.59

这个例子解释了为什么“AI 会不会消灭工作”不是一个好问题。更好的问题是：AI 替代哪些任务？创造哪些新任务？新任务需要哪些技能？劳动者能否转移过去？教育、培训、企业组织和城市劳动力市场能否支持这种转移？

33.10 经济解释：增长率、工资差距和劳动份额

现在把本章模型放回增长理论。

第一，技术方向影响总量增长率。如果创新资源更多投向高技能互补技术，高技能部门的生产率会更快上升；若这些部门有更高的知识外溢，总体增长率也可能提高。但如果低技能劳动大量被替代，而新任务创造和再培训不足，增长的分配后果会恶化。

第二，技术方向影响人力资本投资。若 A_H/A_L 上升并提高高技能工资，家庭更愿意投资教育。但教育扩张需要时间、财政和制度支持。若教育供给跟不上技术需求，技能溢价会继续上升。

第三，自动化影响劳动份额。传统 Cobb–Douglas 把劳动份额视为稳定参数；任务模型则把劳动份额看成生产内容变化的结果。当机器和算法接管更多任务时，劳动得到的收入份额可能下降；当新劳动任务不断出现时，劳动份额可能稳定甚至回升。

第四，技术进步可能导致就业极化。例行任务容易被编码和自动化，中等技能岗位可能相对收缩；高技能抽象任务和低技能面对面服务任务较难被完全替代，从而形成 U 型就业变化。

这四个机制说明，现代增长理论必须把“生产率”与“分配”放在同一张图里看。增长不是单纯的蛋糕变大；技术决定蛋糕怎么做，也影响谁拿到哪一块。

33.11 中国与发展延伸

中国经验为本章提供了一个很好的检验场景。改革开放早期，中国的比较优势主要来自大量低成本劳动力、制造业吸收农村转移人口、出口导向和资本积累。这一阶段的技术采用往往是吸收型和规模化的：引进设备、学习管理、进入全球价值链。

随着工资上升、人口红利减弱和产业升级推进，技术方向开始变化。企业更愿意使用自动化设备、工业软件、机器人、数字平台和 AI 系统来提高效率。这个过程既可能提高生产率，也可能改变劳动需求结构。

可以用本章模型理解三个中国问题。

第一，职业教育和高等教育扩张是否跟上技术方向？如果制造业和服务业越来越依赖工程、数据、软件、运维、设计和管理技能，那么只靠低成本劳动不再足够。教育结构、职业培训和城市劳动力市场会影响技术升级能否转化为广泛收入增长。

第二，机器人和数字化是否替代中等技能岗位？在制造业中，自动化最容易替代重复装配、搬运、质检和标准化加工任务；在服务业中，算法可能替代客服、录入、简单审核和标准化内容生产。若新任务主要集中在高技能城市和平台企业，地区和人群之间的不平等可能扩大。

第三，中国能否把自动化转化为新任务创造？如果 AI 和机器人只是降低用工需求，增长收益可能集中到资本所有者和少数高技能劳动者。如果它们同时创造新产品、新服务、新职业和更复杂的供应链岗位，劳动者就有更多转移空间。

因此，中国增长的下一阶段不能只问“技术先进不先进”，还要问“技术方向是否包容”。一个更高级的增长政策框架，需要同时看创新激励、教育供给、劳动力流动、社会保险、竞争政策和城市公共服务。

33.12 政策含义

本章不是简单得出“限制自动化”或“补贴 AI”的结论。技术方向政策要更细。

第一，教育和培训不是分配政策的附属品，而是增长政策本身。若技术偏向高技能劳动，扩大有效技能供给可以缓解工资差距，并扩大高技能技术的市场。

第二，创新政策应区分替代型创新和互补型创新。替代型创新可能提高短期利润，却压缩劳动需求；互补型创新创造新任务、提高劳动生产率和扩大需求。政策不一定能

精确挑选技术方向，但可以通过公共研发、标准、数据开放、教育和竞争政策影响创新生态。

第三，劳动市场制度影响技术扩散的社会收益。若劳动者难以转岗，自动化冲击会表现为失业和收入下降；若培训、迁移、住房、社保和公共服务支持流动，技术升级更容易带来广泛收益。

第四，竞争政策影响技术收益分配。如果新技术由少数平台或超级明星企业控制，生产率提高可能更多转化为利润和市场势力，而不是工资和就业扩张。

33.13　常见误区

误区一：把技术进步都写成 A。这在 Solow 模型中很方便，但在分配问题中太粗。你必须问 A 提高了谁的效率，替代了谁的任务。

误区二：认为教育扩张必然降低不平等。教育扩张提高高技能供给，确实有降低技能溢价的力量；但如果它同时诱导高技能偏向型技术进步，长期结果可能更复杂。

误区三：把自动化等同于失业。自动化替代任务，不一定一比一消灭工作。就业结果取决于新任务创造、需求扩张、工资调整和劳动者转移能力。

误区四：只看平均生产率。平均生产率上升可以和劳动份额下降、工资不平等扩大同时发生。增长理论不能用平均数遮蔽分配。

误区五：把中国技术升级只理解为产业政策。技术升级还取决于教育、城市、劳动力市场、金融、竞争和社会保险。没有这些互补制度，先进技术可能只带来局部分化。

33.14　英文术语表

Term	含义
Neutral technical change	中性技术进步；对不同要素或任务没有系统偏向的技术变化。
Factor-augmenting technical change	要素增强型技术进步；提高某一要素有效单位的技术变化。
Skill-biased technical change	技能偏向型技术进步；相对提高高技能劳动需求或生产率的技术变化。
Directed technical change	定向技术进步；由利润激励、市场规模和价格效应决定方向的内生技术变化。
Capital-skill complementarity	资本–技能互补；设备、ICT 或软件资本更强地互补高技能劳动。

Skill premium	技能溢价；高技能劳动相对低技能劳动的工资优势。
Task model	任务模型；把生产拆成任务，研究技术替代或补充哪些任务。
Automation	自动化；机器、算法或资本接管原本由劳动完成的任务。
New tasks	新任务；技术进步创造的、需要劳动完成的新生产活动。
Labor share	劳动份额；劳动收入占总收入或增加值的比例。

33.15 本章 Review

第一，你应该能从 (33.3) 解释技能溢价：高技能供给增加压低相对工资，高技能偏向型技术提高相对工资。若两者同时发生，结果取决于相对强度。

第二，你应该能说明 directed technical change 的两股力量：市场规模效应鼓励为更多使用者开发技术，价格效应鼓励为更稀缺、更昂贵的要素开发技术。

第三，你应该能解释为什么资本深化可能扩大工资差距。关键不是资本数量本身，而是新资本与哪类劳动互补。

第四，你应该能用任务模型区分自动化和新任务创造。自动化减少劳动任务，新任务增加劳动任务；二者共同决定劳动份额和就业结构。

第五，你应该能把本章用于中国问题：工资上升、教育扩张、机器人采用、AI 扩散和产业升级，都不仅影响增长率，也影响技能需求、地区差距和劳动收入份额。

33.16 核心文献

技能偏向型技术进步和 directed technical change 的理论入口是 [Acemoglu, 2002]。资本–技能互补的经典宏观模型可读 [Krusell et al., 2000]。任务模型和计算机化对任务结构的影响可读 [Autor et al., 2003]；教育与技术竞赛的长期历史叙事可读 [Goldin and Katz, 2008]。劳动份额下降的跨国事实可读 [Karabarbounis and Neiman, 2014]。自动化、新任务和劳动份额的现代增长框架可与 [Acemoglu and Restrepo, 2018, Acemoglu and Restrepo, 2019] 一起阅读。若把本章放回 AI 和通用技术，可回到第 24 章的 [Bresnahan and Trajtenberg, 1995]、[Helpman and Trajtenberg, 1998] 和 [Brynjolfsson et al., 2021]。

第三十四章　开放经济增长、贸易与全球技术扩散

第 23 章已经讨论技术扩散和追赶，但那里主要从“一个落后经济体怎样吸收前沿技术”出发。本章把视角放到开放经济：贸易、全球价值链、国际知识溢出和贸易成本怎样改变长期增长？

在封闭经济模型中，一个国家的市场规模、技术水平和资源配置大体由国内变量决定。开放以后，问题立刻变得更复杂。企业可以面对全球需求，消费者可以使用外国品种，生产者可以进口中间品，研发者可以从外国知识中学习，劳动和资本回报也会受世界市场影响。开放经济增长因此不是简单地在 Solow 模型里加一个出口变量，而是改变了技术、市场规模、专业化和竞争的边界。

这一章的目标，是把贸易理论和增长理论接起来。你会看到，贸易可能通过四条渠道影响增长：第一，扩大市场规模，提高创新回报；第二，提供更丰富、更便宜的中间品，提高生产率；第三，强化竞争和再配置，使资源流向高生产率企业；第四，促进技术扩散和学习。但你也会看到，开放不是自动增长机器。贸易收益取决于比较优势、产业学习、金融能力、劳动转移、制度质量和政策选择。

34.1　学习目标

读完本章，你应该能够完成七件事。

第一，区分开放经济中的静态贸易收益和动态增长收益。

第二，用 CES 品种模型推导进口品种扩张如何提高实际收入。

第三，理解贸易如何通过市场规模、创新利润和国际知识溢出影响内生增长。

第四，掌握一个带开放度的技术追赶方程，说明贸易如何放大或限制吸收能力。

第五，理解 Eaton–Kortum 式贸易成本、技术差异和贸易份额的核心直觉。

第六，能够把这些模型用于分析中国加入 WTO、全球价值链、出口学习、产业升级和外部冲击。

第七，能够用第 29 章的识别语言检查“贸易促进增长”这一命题：处理变量是什么，反事实是什么，识别变化来自哪里，关键假设是否可信。

34.2 核心问题

本章的核心问题是：

开放经济为什么会改变长期增长路径，而不只是改变商品配置？

传统贸易理论强调比较优势：国家出口相对擅长生产的商品，进口相对不擅长生产的商品，从而提高福利。增长理论则关心长期生产率、资本积累和技术进步。两者结合后，开放经济增长至少包含三个层次。

第一是**配置层次**。贸易让资源从低生产率部门流向高生产率部门，或让企业退出低效率生产线，转向更有比较优势的活动。

第二是**品种和中间品层次**。开放使经济体可以使用更多中间投入和资本品，生产函数中的有效品种数上升，实际生产率提高。

第三是**知识和创新层次**。贸易、FDI、供应链、人员流动和出口市场使企业接触新技术、新标准、新管理方法和更大市场，从而影响学习和创新。

这三层并不总是同向。一个经济体可能从低价进口中获益，却失去某些本地学习机会；也可能通过出口学习提高生产率，却让部分劳动者承受转型成本。因此，开放经济增长要同时看总量收益和结构调整。

34.3 静态贸易收益：为什么开放能提高实际收入

先从最简单的品种模型开始。设最终品由 N 种中间品聚合：

$$Y=\left(\sum_{j=1}^{N} x_j^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \qquad \sigma>1. \tag{34.1}$$

若所有中间品使用量相同，$x_j=x$，则

$$Y=N^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}x. \tag{34.2}$$

若总中间品投入为 $X=Nx$，则 $x=X/N$，代入得

$$Y=N^{\frac{1}{\sigma-1}}X. \tag{34.3}$$

命题 34.1 (进口品种的生产率效应). *在 CES 品种模型中，给定总中间投入 X，可用中间品种数 N 增加会提高最终产出，弹性为 $1/(\sigma-1)$。*

证明。由 (34.3)，

$$\log Y=\frac{1}{\sigma-1}\log N+\log X.$$

对 $\log N$ 求导得

$$\frac{\partial \log Y}{\partial \log N}=\frac{1}{\sigma-1}>0.$$

因此，品种数越多，给定投入下产出越高。命题得证。

这个命题是贸易增长联系的第一块积木。进口不是只让消费者买到更多消费品，也让生产者获得更多、更便宜、更高质量的中间品。一个制造业企业能够使用更好的机床、传感器、化工材料、芯片、工业软件和专业零部件，生产率会提高。这个效应在发展中经济体尤其重要，因为很多高质量资本品和中间品最初并不在本地生产。

34.4　数值例子：品种扩张的幅度

设替代弹性 $\sigma = 4$。若开放使可用中间品种数从 $N = 100$ 增加到 $N = 200$，由 (34.3)，给定总投入下的产出比例为

$$\frac{Y_2}{Y_1} = \left(\frac{200}{100}\right)^{1/(4-1)} = 2^{1/3} \approx 1.26.$$

这意味着有效品种翻倍可使产出提高约 26%。当然，这不是一个直接经验估计；它说明模型机制：中间品和资本品的多样性本身就是生产率来源。

若 σ 更高，品种之间更容易替代，新增品种的收益较小；若 σ 更低，品种之间更互补，新增品种更有价值。这也解释了为什么某些关键中间品缺失会造成很大生产率损失：它们不是普通商品，而是生产网络中的互补环节。

34.5　开放经济中的技术追赶

第 23 章的 Nelson–Phelps 型模型写成

$$\dot{a}_i = \phi H_i (1 - a_i),$$

其中 $a_i = A_i / A_F$ 是相对前沿技术水平。现在加入开放度 Ω_i，表示贸易、FDI、进口中间品、人员流动和全球价值链连接程度：

$$\dot{a}_i = \phi H_i \Omega_i (1 - a_i), \qquad \phi > 0,\ H_i > 0,\ \Omega_i \geq 0. \tag{34.4}$$

这个式子有一个非常重要的含义：开放本身不是万能的。若 H_i 很低，开放带来的知识机会难以被吸收；若 Ω_i 很低，即使人力资本不错，也缺少接触前沿知识的渠道。追赶速度取决于二者乘积。

命题 34.2 (开放和吸收能力互补). *在 (34.4) 中，开放度 Ω_i 对追赶速度的边际作用随吸收能力 H_i 上升而增强。*

证明。 由 (34.4)，

$$\frac{\partial \dot{a}_i}{\partial \Omega_i} = \phi H_i (1 - a_i).$$

再对 H_i 求导：

$$\frac{\partial^2 \dot{a}_i}{\partial \Omega_i \partial H_i} = \phi(1 - a_i) > 0$$

只要经济体尚未处于前沿，即 $a_i < 1$。因此，吸收能力越强，开放越能转化为技术追赶。命题得证。

这个命题比“开放促进增长”更精确。它说，开放提供学习机会，吸收能力决定学习效率。一个经济体如果教育不足、金融不发达、企业组织能力弱、制度摩擦高，那么进口先进设备也可能只是形成昂贵闲置资本；反过来，工程能力强、供应链密集、企业竞争充分的经济体，更容易把开放转化为生产率提升。

34.6 贸易、市场规模与内生创新

开放还会改变创新激励。Romer 和 Schumpeterian 模型中，创新者研发新设计或新质量阶梯，是因为未来能获得垄断利润。若开放扩大潜在市场，创新利润上升，研发投入可能增加。

设一个创新的现值为

$$V = \frac{\pi(S)}{r + \delta}, \tag{34.5}$$

其中 S 表示可服务市场规模，$\pi'(S) > 0$，r 是利率，δ 是被替代或失效的风险。若研发成本为 F_R，创新发生条件为

$$\frac{\pi(S)}{r + \delta} \geq F_R. \tag{34.6}$$

开放市场会提高 S，因此更可能使 (34.6) 成立。

这就是 Grossman–Helpman 式开放经济创新增长的核心直觉：全球市场扩大了创新回报，国际贸易也改变了创新方向。一个小国若只能面对国内市场，许多研发项目无法覆盖固定成本；若能进入全球市场，同样的研发投入可能变得有利可图。韩国、德国、日本和中国部分制造业企业的创新能力，都不能只用国内人口解释，必须考虑出口市场和全球供应链。

但市场规模效应也有边界。若开放导致本国企业长期停留在低附加值加工环节，缺少品牌、设计、核心零部件和标准制定能力，那么它得到的是生产规模，不一定得到创新利润。开放是否提高内生创新，取决于企业在全球价值链中的位置。

34.7 Eaton–Kortum 直觉：技术差异与贸易成本

现代贸易增长文献常用 Eaton–Kortum 框架理解国家间技术差异和贸易成本。完整模型较复杂，但核心直觉可以压缩成三句话。

第一，每个国家在不同商品上的生产效率不同。一个国家不必在所有商品上都先进，只要在部分商品上有相对高效率，就可以出口这些商品。

第二，贸易成本 $\tau_{ij} \geq 1$ 会阻碍低成本生产者服务外国市场。即使国家 i 在某个商品上生产效率高，如果运输、关税、边境、信息和合规成本太高，国家 j 仍可能从本地或第三国购买。

第三，一个国家的实际收入取决于本国技术水平、从世界购买低价商品的能力，以及贸易成本。贸易降低了“有效价格指数”，使同样名义收入可以买到更多实际商品。

一个常见的简化表达是：国家 j 从国家 i 购买的份额与 i 的技术水平正相关，与贸易成本和成本水平负相关：

$$\pi_{ij} = \frac{T_i (c_i \tau_{ij})^{-\theta}}{\sum_m T_m (c_m \tau_{mj})^{-\theta}}, \tag{34.7}$$

其中 T_i 表示国家 i 的技术分布优势，c_i 是单位成本，θ 控制技术差异分布。这个式子说明，贸易份额不是随意的，它由技术、成本和贸易摩擦共同决定。

对增长而言，(34.7) 的启发是：开放经济中的生产率不只是国内企业效率，也包括能否接入低成本、高效率的全球供应网络。贸易成本下降会让更多前沿商品进入本国生产和消费集合，从而提高实际收入。

34.8　数据事实：贸易开放度的差异

表 34.1 给出几个经济体的贸易开放度，即商品和服务进出口总额占 GDP 比重。这个指标不是“开放是否好”的充分统计量，但能直观看到不同发展模式：大经济体通常内需比重大，贸易占 GDP 较低；小型开放经济体和全球价值链深度嵌入经济体通常贸易占比高。

表 34.1: 贸易开放度：商品和服务进出口占 GDP 比重

经济体	2000	2010	2020	2023
中国	39	49	35	37
美国	26	28	23	25
德国	67	80	81	89
韩国	70	95	80	85
印度	27	49	37	45
越南	112	153	209	186

注：指标为 World Bank WDI `NE.TRD.GNFS.ZS`，数值四舍五入。贸易开放度不是政策质量指标，也不是因果效应估计；它只是显示经济体与世界市场连接程度的粗略入口。

这张表有三点值得读。第一，美国和中国都是大经济体，国内市场大，因此贸易占 GDP 比重低于德国、韩国和越南。第二，德国和韩国长期高度开放，说明高收入经济

体并不必然“少贸易”；产业结构和全球价值链位置很重要。第三，越南的贸易开放度极高，反映其深度嵌入全球制造链，但这也意味着外需、供应链和跨国企业决策对本国增长影响很大。

对中国来说，2000–2010 年开放度很高，与加入 WTO 后出口扩张、外资进入、进口中间品和供应链学习密切相关。2010 年后贸易占 GDP 比重下降，并不等于“开放不重要”，而是中国经济规模扩大、内需上升、产业链本地化和全球贸易环境变化共同作用。增长分析不能只看贸易占比，还要看贸易结构、进口中间品质量、企业出口学习和技术升级。

34.9 经验识别：贸易真的导致增长吗

到这里，本章已经给出很多机制：进口品种提高生产率，开放度放大技术追赶，全球市场提高创新回报，贸易成本下降改变价格指数，出口门槛筛选高生产率企业。但经验研究不能从“机制可能成立”直接跳到“贸易导致增长”。第 29 章的核心提醒在这里尤其重要：相关性不是因果，开放程度本身往往是内生的。

最朴素的回归可以写成

$$g_{it} = \alpha + \beta \mathrm{Open}_{it} + \gamma X_{it} + \mu_i + \lambda_t + \varepsilon_{it}, \tag{34.8}$$

其中 g_{it} 是国家、地区或行业的增长率，Open_{it} 可以是贸易占 GDP 比重、关税、进口中间品份额、出口市场准入或贸易成本，X_{it} 是控制变量，μ_i 和 λ_t 是单位和时间固定效应。这个式子有用，但它通常不是最终答案。若一个地区因为制度更好、基础设施更强、企业能力更高而更开放，β 会混合这些因素；若增长预期提高使企业主动出口和进口，反向因果也会出现；若同一时期发生 WTO 加入、金融改革、国企改革、城市化和基础设施建设，则贸易变量可能只是更大改革包的一部分。

因此，贸易与增长研究的关键问题不是“控制变量够不够多”，而是“开放的外生变化从哪里来”。表 34.2 把常见经验设计和它们的风险放在一起。

表 34.2: 贸易与增长的识别设计地图

设计	识别变化	可以回答的问题	主要威胁
跨国增长回归	国家间开放度、贸易政策和长期增长差异	开放与增长是否存在条件相关，适合发现大事实	遗漏变量、反向因果、开放指标口径粗、样本小

设计	识别变化	可以回答的问题	主要威胁
地理工具变量	由距离、海岸线、面积和地理位置预测的贸易份额	长期贸易潜力是否影响收入或增长	地理可能通过疾病、制度、殖民、农业和国家能力直接影响发展
关税或政策变动 DiD	行业或地区受到不同幅度的关税下降、配额取消或准入变化	贸易政策变化对生产率、就业、投资和企业进入退出的影响	政策可能针对特定行业选择性实施；预趋势和平行趋势需要检验
进口竞争或出口需求冲击	外国供给扩张、外国需求变化或汇率冲击导致的暴露度差异	外部冲击如何影响地区、行业和劳动者	暴露度可能反映初始产业结构；空间溢出和一般均衡反馈难处理
企业微观面板	企业开始出口、进口中间品或进入全球价值链前后的变化	出口学习、进口学习和再配置机制是否存在	出口企业本来就更强，进入出口不是随机事件；需要处理选择问题
交通基础设施自然实验	铁路、港口、公路或边境通道改变市场准入	市场整合和贸易成本下降如何影响发展	基础设施选址常与增长潜力相关；需要解释路线或时点为何近似外生

这张表可以直接作为审稿清单。若研究说“开放促进增长”，你首先要问处理变量是什么：是关税下降、进口中间品增加、出口市场扩大，还是贸易占 GDP 比重？不同处理对应不同机制。其次要问比较组是谁：未开放地区、开放较少行业、受冲击较小企业，还是由模型构造的反事实？第三要问识别假设是什么：工具变量需要排除限制，DiD 需要平行趋势，事件研究需要政策前没有系统预趋势，企业面板需要处理自选择。

用这个标准重新看经典争论，就能理解为什么贸易与增长文献长期存在分歧。[Frankel and Romer, 1999] 尝试用地理预测贸易份额来解决贸易内生性，优点是直观、宏观范围大；问题是地理不只影响贸易，也可能影响制度、疾病环境、农业生产率和国家形成。[Alcalá and Ciccone, 2004] 改进开放度度量，把真实开放度与生产率联系起来；但跨国证据仍然面对长期遗漏变量。[Rodríguez and Rodrik, 2001] 的怀疑态度重要，因为它提醒我们：开放政策、贸易量、制度质量和宏观稳定经常纠缠在一起，不能把一个系数直接读成“降低关税会让所有国家增长多少”。

中国加入 WTO 的经验也应这样读。WTO 是一个重要开放冲击，但它并不是孤立事件。出口扩张、进口中间品、外资进入、民营企业发展、地方基础设施投资、产业集

群和国企改革在同一时期交织发生。若研究企业出口学习，就要比较出口前趋势相近的企业，或者利用外国需求、关税变化、配额取消等相对外生冲击；若研究地区增长，就要处理沿海地区原本基础更好、产业结构不同和政策支持更强的问题；若研究劳动市场冲击，就要把总量增长和地区、行业、技能组的分配效应分开。

因此，本章对经验研究的结论不是“贸易一定好”或“贸易没有用”，而是更精确的三句话。第一，贸易开放有清楚的理论渠道，但渠道强弱取决于吸收能力、企业选择、金融约束和产业位置。第二，贸易开放的平均效应和分配效应可能不同，总量生产率上升可以与局部地区受损并存。第三，可信经验研究必须把开放冲击、反事实和机制变量说清楚，否则就只能得到条件相关。

34.10 贸易与企业再配置

开放经济增长还通过企业异质性发生。第 27 章讨论过资源错配和企业动态；开放会改变企业选择。Melitz 型模型的核心思想是：企业生产率不同，出口需要固定成本，只有生产率足够高的企业会出口。贸易开放后，高生产率企业扩张，低生产率企业收缩或退出，行业平均生产率提高。

可以用一个简单门槛表示。设企业生产率为 φ，出口固定成本为 F_x，出口利润为

$$\Pi_x(\varphi) = B\varphi^{\sigma-1} - F_x, \tag{34.9}$$

其中 B 反映外国市场规模和价格条件。企业出口当且仅当

$$\varphi \geq \left(\frac{F_x}{B}\right)^{1/(\sigma-1)} \equiv \varphi_x^*. \tag{34.10}$$

贸易成本下降或外国市场扩大使 B 上升，出口门槛 φ_x^* 下降，更多企业进入出口市场。但更重要的是，出口市场把资源推向高生产率企业，提高行业平均效率。

这为中国加入 WTO 后制造业生产率提高提供一个机制：不是每个企业都同等受益，而是更有能力的企业通过出口扩张、学习国际标准、进口中间品和参与供应链获得更大市场；低效率企业则面对更强竞争压力。

34.11 开放的风险：不是所有贸易都产生学习

开放经济增长有强机制，但也有明显风险。

第一，比较优势可能锁定在低学习部门。若一国长期出口低附加值初级品或简单加工品，短期收入可以提高，但技术学习有限。此时，静态比较优势和动态学习可能冲突。

第二，劳动转移有成本。贸易开放提高总福利，并不保证每个地区、行业和劳动者都受益。若劳动者无法从受冲击部门转向扩张部门，开放会带来局部分化。

第三，全球价值链可能带来依赖。深度嵌入供应链可以促进学习，但关键零部件、技术标准、物流和外需冲击也会影响本国增长稳定性。

第四，贸易和产业政策容易混淆。幼稚产业保护只有在保护期内形成学习、规模和竞争能力时才可能有意义；若保护只是让低效率企业避免竞争，就会降低生产率。

第五，经验识别困难。贸易开放与增长常常同时受制度改革、教育、基础设施和宏观稳定影响。简单相关不能证明贸易导致增长。正因如此，上一节的识别设计不是技术细节，而是判断开放经济增长证据是否可信的核心部分。

34.12　中国与发展延伸

中国是开放经济增长的核心案例之一。改革开放以来，中国增长并不是封闭积累，而是在全球市场中实现工业化、技术吸收和产业升级。

第一，出口市场扩大了制造业规模。巨大的外需使企业能够摊薄固定成本、学习质量控制、提高交货能力，并在重复生产中积累工艺知识。用 (34.6) 的语言，全球市场提高了 S，使许多投资和研发项目更可行。

第二，进口中间品和资本品提高了生产率。早期很多关键设备、零部件和材料需要进口；企业通过使用这些投入学习生产工艺。开放不是只卖东西给世界，也是从世界购买更好的生产能力。

第三，全球价值链带来了学习阶梯。企业可以先进入装配和加工环节，再逐步进入零部件、设计、品牌、标准和核心技术。但这个阶梯不是自动的。如果企业长期停留在低利润环节，开放只能带来规模，不能带来核心能力。

第四，开放也带来外部约束。贸易摩擦、技术管制、供应链重组和外需波动会改变增长环境。对中国来说，下一阶段的开放经济增长不再只是“扩大出口”，而是要在保持全球连接的同时提高关键技术能力、国内市场整合和创新效率。

对其他发展中经济体，本章的启示也类似。越南、印度、墨西哥、东欧经济体都可能通过全球价值链获得学习机会，但是否能从加工走向创新，取决于教育、基础设施、营商环境、金融体系和产业组织能力。

34.13　常见误区

误区一：把开放等同于增长。开放提供机会，不自动产生增长。没有吸收能力、再配置和学习机制，开放可能只改变贸易结构。

误区二：只看出口，不看进口。进口中间品、资本品和技术服务常常是生产率提高的重要来源。增长分析不能把进口只看成“需求外流”。

误区三：把贸易开放度当成政策好坏。大国贸易占 GDP 比重天然较低，小国和供应链经济体天然较高。开放度是结构指标，不是政策评分。

误区四：忽略分配和地区冲击。总福利提高可以和局部地区受损同时发生。开放经济增长必须考虑劳动转移、社会保险和区域政策。

误区五：把产业保护等同于动态学习。保护只有在形成真实学习、竞争能力和出口能力时才可能有动态收益。否则只是错配和租金。

误区六：把开放度回归系数直接读成政策效应。贸易占 GDP 比重高低受经济规模、地理、产业结构和全球价值链位置影响。没有可信识别设计时，开放度系数最多是条件相关。

34.14 英文术语表

Term	含义
Open economy growth	开放经济增长；把贸易、资本流动、技术扩散和全球市场纳入增长分析。
Gains from trade	贸易收益；来自专业化、品种扩张、价格下降和资源再配置的福利提高。
Intermediate inputs	中间品；用于生产其他商品的投入品，进口中间品常能提高生产率。
Market size effect	市场规模效应；更大市场提高创新和固定成本投资的回报。
Technology spillovers	技术溢出；知识通过贸易、FDI、人员流动、供应链和模仿传播。
Trade costs	贸易成本；运输、关税、合规、信息、边境和制度摩擦。
Global value chains	全球价值链；不同国家和企业分工完成产品设计、零部件、装配和销售。
Export cutoff	出口门槛；企业生产率必须高于某一水平才足以覆盖出口固定成本。
Learning by exporting	出口学习；企业通过服务国外市场学习质量、标准、管理和技术。
Domestic expenditure share	国内支出份额；一国支出中购买本国产品的比例，常用于衡量贸易依赖。
Trade shock	贸易冲击；由关税变化、外国供给或需求、运输成本变化等造成的外生或准外生贸易暴露变化。

Market access	市场准入或市场可达性；企业或地区能够进入外部市场并以较低成本销售或采购的程度。
Exclusion restriction	排除限制；工具变量只能通过所研究的贸易变量影响增长或生产率，而不能通过其他渠道直接影响结果。

34.15 本章 Review

第一，你应该能区分静态贸易收益和动态增长收益。前者来自比较优势、品种和价格；后者来自学习、创新、再配置和技术扩散。

第二，你应该能推导 CES 品种模型中的品种收益：给定总投入，可用中间品种数越多，最终产出越高，弹性为 $1/(\sigma-1)$。

第三，你应该能解释开放和吸收能力的互补关系。开放度 Ω_i 提供学习渠道，人力资本和组织能力 H_i 决定这些渠道能否转化为追赶。

第四，你应该能用市场规模效应解释为什么全球市场会提高创新激励，也能说明为什么出口规模不等于创新能力。

第五，你应该能用企业异质性解释贸易开放下的再配置：高生产率企业更可能出口和扩张，低生产率企业面对竞争压力，行业平均生产率因此变化。

第六，你应该能分析中国开放经济增长：WTO、出口学习、进口中间品、全球价值链和供应链风险共同塑造了中国从追赶到升级的路径。

第七，你应该能用第 29 章的识别语言审查贸易增长证据。若看到“开放度提高促进增长”的回归，你要能追问：开放变量具体是什么，处理组和对照组是谁，反事实是什么，工具变量排除限制或 DiD 平行趋势是否可信，机制变量是否支持理论渠道。

34.16 核心文献

开放经济创新增长的经典入口是 [Grossman and Helpman, 1991]。国际研发溢出可读 [Coe and Helpman, 1995] 和综述 [Keller, 2004]。贸易和增长因果识别的代表性文献包括 [Frankel and Romer, 1999]、[Alcalá and Ciccone, 2004] 和持怀疑态度的 [Rodríguez and Rodrik, 2001]。世界收入分布与开放经济增长可读 [Acemoglu and Ventura, 2002]。技术、地理和贸易的现代量化模型入口是 [Eaton and Kortum, 2002]，企业异质性和出口门槛的经典模型是 [Melitz, 2003]。关于新贸易模型中的贸易收益总结，可读 [Arkolakis et al., 2012]。若关心基础设施、市场整合和发展，可进一步读 [Donaldson, 2018]。

第三十五章　金融发展、信贷约束与长期增长

第 16 章已经从异质性主体和借贷约束出发，说明不完全市场怎样改变家庭储蓄、职业选择和财富分布。第 27 章又从企业错配出发，说明资本没有流向高边际产出的企业时，总量 TFP 会下降。本章把这两条线合在一起，专门讨论金融发展如何影响长期增长。

金融在增长理论中常被误解为“钱多一点”。这太粗了。真正重要的不是金融资产规模本身，而是金融系统能不能完成几项功能：把储蓄转化为投资，筛选高回报项目，分散风险，监督借款人，提供流动性，支持企业进入和扩张，并在冲击来临时避免好项目被迫停止。如果金融系统只是把大量信贷配置给有抵押品、有隐性担保或有政治关系的主体，而不是配置给高生产率项目，那么信贷总量很高也可能伴随低效率增长。

本章的核心目标，是把“金融发展促进增长”拆成可推导、可检验、可批评的机制。你会看到，金融发展既可能提高增长，也可能放大周期和错配；信贷扩张既可能支持创新和企业进入，也可能进入房地产、地方债务和低效率投资。高级增长课不应把金融当作背景部门，而应把它看成资源配置和动态选择的核心制度。

35.1　学习目标

读完本章，你应该能够完成六件事。

第一，区分金融深化、金融效率和金融稳定。信贷/GDP 高不等于金融系统高效。

第二，理解金融系统影响增长的五个机制：储蓄动员、项目筛选、风险分散、监督治理和流动性供给。

第三，推导一个抵押约束模型，说明企业投资为什么取决于净资产，而不只取决于项目回报。

第四，理解外部融资依赖和金融发展之间的互补关系：越依赖外部融资的行业，越需要发达金融市场才能增长。

第五，连接金融约束和资源错配：资本边际产出不能均等化时，总量 TFP 会下降。

第六，把这些模型用于理解中国金融体系、民营企业融资、房地产抵押、地方政府融资、金融抑制和高储蓄高投资增长模式。

35.2　核心问题

本章的核心问题是：

金融系统怎样把储蓄转化为长期增长，而不是只转化为债务和资产价格？

这个问题可以拆成三层。

第一，金融是否能把分散储蓄转化为长期投资？没有金融中介，许多家庭有小额储蓄，许多企业有大额投资需求，二者难以匹配。

第二，金融是否能把资金配置给高回报主体？若信贷按照抵押品、所有制或担保关系分配，而不是按照生产率分配，资本会流向错误地方。

第三，金融是否能分散风险而不制造系统性脆弱？金融发展可以让企业承担长期项目和创新风险，也可能通过杠杆、期限错配和隐性担保放大危机。

因此，本章不会简单说“金融越多越好”。更准确的命题是：金融发展提高增长，当且仅当它改善跨期配置、项目筛选、风险分担和资本流向；若它主要扩大低效率部门债务，则可能降低长期增长质量。

35.3　金融系统的五个增长功能

金融发展影响增长，通常通过五项功能发生。

第一，储蓄动员。家庭和企业的闲置资金通过银行、债券、股票、基金和其他金融工具汇聚起来，形成可用于长期投资的资金池。没有这一功能，大型基础设施、制造投资、研发和教育投资都很难由单个家庭自筹完成。

第二，项目筛选。金融机构和资本市场应当识别哪些项目回报高、风险可控、现金流可信。筛选能力越强，资本越可能流向高生产率主体。

第三，监督治理。贷款发放后，银行需要监督借款人，资本市场需要约束管理层，投资者需要处理道德风险。否则资金可能被挪用、浪费或投向低质量扩张。

第四，风险分散。金融市场允许投资者分散风险，使企业能承担更长期、更不确定的创新项目。没有风险分散，高回报但高风险项目可能被放弃。

第五，流动性供给。长期项目需要持续融资，短期冲击不应迫使企业出售资产或中断生产。金融系统若能提供流动性，就能减少“好项目死于现金流”的问题。

这五项功能说明，金融不是增长模型外面的管道，而是决定资源能否进入高回报活动的制度技术。

35.4　抵押约束模型：净资产为什么重要

设企业有生产机会：

$$y = Ak^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{35.1}$$

其中 k 是资本投入，A 是企业生产率。企业自有净资产为 n，可以借款 b，所以

$$k = n + b. \tag{35.2}$$

如果金融市场完美，企业只要项目回报高，就能借到足够资金，使资本边际产出等于资金成本：

$$\alpha A k^{\alpha-1} = R. \tag{35.3}$$

最优资本为

$$k^{fb} = \left(\frac{\alpha A}{R}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{35.4}$$

现在加入抵押约束。设企业最多能借到净资产的 λ 倍：

$$b \le \lambda n, \qquad \lambda \ge 0. \tag{35.5}$$

于是资本投入受到

$$k \le (1+\lambda)n. \tag{35.6}$$

约束。

命题 35.1 (抵押约束下的投资上限)**.** *若企业的 first-best 资本 k^{fb} 大于 $(1+\lambda)n$，则企业受到融资约束，实际资本为*

$$k = (1+\lambda)n < k^{fb},$$

且资本边际产出高于资金成本：

$$\alpha A k^{\alpha-1} > R.$$

证明。完美金融下，企业选择 k^{fb} 使 (35.3) 成立。若 $k^{fb} > (1+\lambda)n$，抵押约束 (35.6) 排除了 first-best 选择，企业只能选择可行集中最大资本 $k = (1+\lambda)n$。由于 $0 < \alpha < 1$，边际产出 $\alpha A k^{\alpha-1}$ 随 k 下降而上升。因此当 $k < k^{fb}$ 时，

$$\alpha A k^{\alpha-1} > \alpha A (k^{fb})^{\alpha-1} = R.$$

命题得证。

这个命题是金融与增长的核心桥梁。高生产率企业如果净资产低、抵押品少，就会停留在过小规模；它的资本边际产出很高，但拿不到资金。于是，经济体中会同时出现“高回报项目缺钱”和“低回报主体占用大量资本”的现象。增长损失不来自储蓄不足，而来自金融配置失败。

35.5　数值例子：同样生产率，不同净资产

设 $A=1$，$\alpha=1/2$，资金成本 $R=0.10$。first-best 条件为

$$\frac{1}{2}k^{-1/2}=0.10,$$

所以

$$k^{fb}=25.$$

如果金融系统允许借款为净资产的两倍，即 $\lambda=2$，则 $k\le 3n$。表 35.1 展示不同净资产企业的可行资本。

表 35.1: 抵押约束下净资产决定企业规模

企业	净资产 n	资本上限 $(1+\lambda)n$	是否达到 first-best
A	2	6	否
B	5	15	否
C	10	30	是

企业 A 和 B 不是因为生产率低才规模小，而是因为净资产低、可抵押资产少。若它们的 A 很高，约束造成的效率损失会更大。这就是为什么发展中经济体常见的“中小企业融资难”不是单纯的公平问题，而是总量生产率问题。

35.6　从个体约束到总量错配

现在考虑两个企业，生产函数相同：

$$y_i=A_ik_i^{\alpha},\qquad i=1,2.$$

总资本为 $\bar{K}$。没有金融摩擦时，资本应在企业间配置到边际产出相等：

$$\alpha A_1k_1^{\alpha-1}=\alpha A_2k_2^{\alpha-1}. \tag{35.7}$$

若企业 1 生产率高，但融资受限，k_1 低于有效配置水平；企业 2 生产率低但有抵押品或隐性担保，k_2 过高，则

$$MPK_1>MPK_2.$$

这正是第 27 章 Hsieh–Klenow 式错配的金融微观基础。

命题 35.2 (金融约束造成边际产出分散). *若高生产率企业受到资本上限约束，而低生产率企业不受约束，则竞争均衡中的企业间资本边际产出无法均等化，资源配置低于 first-best。*

证明。 first-best 配置要求 (35.7)。若企业 1 的约束使其资本固定在 $\bar{k}_1 < k_1^{fb}$，则其边际产出高于 first-best 边际产出。剩余资本必须由企业 2 使用，导致企业 2 资本相对过多，边际产出低于 first-best 边际产出。因此 $MPK_1 > MPK_2$，边际产出未均等化。由于总产出在凹生产函数下由边际产出均等条件刻画最优配置，偏离该条件意味着总产出低于 first-best。命题得证。

这个命题解释了为什么金融发展和资源错配不能分开讲。金融不只是改变投资总量，也改变资本配置。一个经济体可以有很高投资率，但如果投资流向低效率企业、房地产泡沫或受保护部门，总量增长会逐渐减速。

35.7 外部融资依赖与行业增长

金融发展对不同产业的作用不一样。某些行业可以用内部现金流滚动扩张，某些行业需要大量前期投资、研发、设备和库存，因而更依赖外部融资。Rajan 和 Zingales 的经典想法是：如果金融发展真的促进增长，那么在金融更发达的国家，那些天然更依赖外部融资的行业应当增长更快。

可以写成一个简化回归思想：

$$Growth_{ic} = \beta \left(ExternalDependence_i \times FinancialDevelopment_c \right) + \mu_i + \lambda_c + \varepsilon_{ic}, \tag{35.8}$$

其中 i 是行业，c 是国家。行业固定效应 μ_i 控制行业本身差异，国家固定效应 λ_c 控制国家整体环境。关键系数 β 衡量金融发展是否特别帮助外部融资依赖高的行业。

这个设计比简单看“金融发展和 GDP 增长相关”更强，因为它利用行业间融资需求差异。若 $\beta > 0$，说明金融发展不只是和增长一起出现，而是通过缓解融资约束影响产业扩张。

35.8 金融发展不等于信贷越多越好

增长教材里必须警惕一个误区：金融发展不是信贷/GDP 越高越好。信贷总量有三种完全不同的含义。

第一，它可能表示金融深化：更多家庭和企业能够获得贷款，长期投资和风险分担改善。

第二，它可能表示金融过度扩张：杠杆上升、资产价格上涨、债务滚动和风险积累。

第三，它可能表示金融抑制下的定向配置：大量信贷被政策、担保、抵押品或关系引导到特定部门，并不反映市场筛选。

因此，在增长分析中，至少要同时看四个指标：信贷总量、信贷流向、资金价格和违约纪律。只看第一个，会把金融深化和金融扭曲混在一起。

35.9　数据事实：私人部门信贷与增长含义

表 35.2 给出几个经济体的国内私人部门信贷占 GDP 比重。这个表与第 16 章的信贷表相呼应，但本章关注的不是“家庭能否借款”，而是金融系统在总量上是否已经很大，以及为什么大金融不必然意味着高效率金融。

表 35.2: 国内私人部门信贷占 GDP 比重

经济体	2000	2010	2024 或最近年份
中国	110	124	194
美国	163	182	201
韩国	69	125	160
巴西	31	53	76
印度	28	51	40

注：World Bank WDI 指标 `FS.AST.PRVT.GD.ZS`，数值四舍五入。最近年份为 2024 年。该指标衡量金融机构向私人部门提供的国内信贷占 GDP 比重，不直接衡量信贷配置效率。

这张表最重要的启发是：中国的信贷总量已经非常高，接近美国，明显高于许多发展中经济体。若中国增长问题仍然表现为部分民营企业融资难、创新企业缺长期资本、地方债务压力和房地产金融化，那么问题就不是“金融不够大”，而是“金融如何配置”。

这也解释了为什么金融发展有倒 U 型或非线性可能。早期金融深化可以显著促进增长；但当信贷总量很高后，继续扩张未必提高生产率，反而可能带来债务负担、资产泡沫和低效率投资。

35.10　金融抑制与高储蓄高投资

金融抑制通常指利率、信贷方向、资本流动或金融进入受到管制，使资金价格不能充分反映风险和回报。发展中经济体常用金融抑制为政府、国企、基础设施或优先产业提供低成本资金。

金融抑制的增长效应并不单一。若低成本资金支持了高社会回报基础设施、学习型产业和生产性投资，它可能在某些阶段帮助工业化。若它长期压低存款回报、补贴低效率借款人、延缓坏账出清，就会降低资本配置效率。

可以用一个简单 wedge 表示。设企业真实资金成本应为 R_i，但政策或隐性担保使企业 i 实际面对

$$\tilde{R}_i = R_i - \tau_i, \tag{35.9}$$

其中 $\tau_i > 0$ 是信贷补贴或隐性担保。若 τ_i 与生产率正相关，补贴高社会回报项目，可能提高增长；若 τ_i 与所有制、抵押品或政治关系相关，而与生产率无关甚至负相关，就会造成错配。

这给政策评价一个清楚标准：问题不是有没有政府引导金融，而是引导是否把资金推向高社会回报项目，并且是否有退出和纪律。

35.11 金融加速器与增长风险

金融还会放大冲击。设企业可借款规模取决于抵押品价值 $q_t h_t$：

$$b_t \leq \lambda q_t h_t. \tag{35.10}$$

其中 q_t 是资产价格，h_t 是可抵押资产数量。若资产价格上升，抵押价值上升，企业和家庭能借更多，投资和需求上升，进一步推高资产价格。反过来，资产价格下跌会收缩抵押价值，导致信贷收缩、投资下降和资产抛售。

这就是 Kiyotaki–Moore 式信用周期的核心直觉。对长期增长而言，金融加速器有两层影响。短期上，它放大经济波动；长期上，若频繁危机导致企业研发和人力资本投资中断，潜在增长也会受损。

房地产在许多经济体中尤其关键，因为住房和土地既是消费品、生产要素，也是抵押品。房价上涨可以提高抵押融资能力，也可能把资本和信贷吸入房地产部门，挤出生产性投资。中国增长讨论中，房地产金融化、地方政府融资平台和土地财政，必须放在这个框架下理解。

35.12 中国与发展延伸

中国金融体系为本章提供了一个复杂而重要的案例。它既支持了高储蓄、高投资和快速工业化，也带来了资本配置、地方债务、房地产依赖和民营企业融资约束问题。

第一，中国的高储蓄通过银行体系转化为大规模投资，为基础设施、制造业扩张和城市化提供资金。这一阶段，金融系统的储蓄动员功能非常重要。

第二，信贷配置长期具有所有制和抵押品偏向。国企、地方融资平台和房地产相关主体更容易获得资金；许多民营企业、中小企业和创新企业则依赖内部资金、贸易信用或非正式融资。这会形成“高信贷总量”和“局部融资约束”并存。

第三，房地产作为抵押品改变了金融配置。房价上涨提高了有房家庭和有土地主体的融资能力，也使银行更愿意接受房地产抵押。结果可能是，信贷流向抵押品充足部门，而不是生产率最高部门。

第四，金融抑制和隐性担保可能在工业化早期支持长期投资，但若缺乏退出机制，会让低效率主体继续占用资本。软预算约束降低违约纪律，使市场不能及时把资源从低回报项目中释放出来。

第五，未来中国增长更需要“金融配置效率”而不是单纯“金融规模扩张”。随着资本深化边际回报下降，继续靠信贷扩张维持增长会越来越困难；更重要的是让资本流向创新、服务业生产率、先进制造、绿色转型和中小企业升级。

对其他发展中经济体，本章也有普遍意义。印度、巴西、东南亚和非洲经济体面临的问题可能不是储蓄总量相同，而是金融覆盖、抵押品、信用信息、司法执行、银行竞争和资本市场深度不同。金融发展必须具体到制度和配置机制。

35.13 政策含义

第一，金融改革要从“扩大信贷”转向“改善配置”。降低高生产率企业的外部融资成本，比单纯提高信贷/GDP 更重要。

第二，信用信息、破产制度、抵押登记、会计透明度和投资者保护是增长政策。它们看似法律和金融基础设施，实质上决定资金能否流向高回报主体。

第三，发展资本市场和风险资本，可以弥补银行偏好抵押品的局限。创新企业往往缺少固定资产抵押，但有高风险高回报项目；股权融资和风险投资更适合承担这类风险。

第四，隐性担保需要逐步硬化。若借款人预期亏损也会被救助，资金价格无法反映风险，资本就会留在低效率主体手中。

第五，金融稳定和长期增长不能分开。危机防范不是短期宏观管理的附属项，而是保护长期投资、研发和人力资本积累的条件。

35.14 PhD+ 专题的共同结构

第 33–35 章表面上讲的是三个不同主题：技术方向与不平等、开放经济增长、金融发展与信贷约束。但从研究生增长课的角度看，它们有同一个结构：把一个看似总量的增长变量拆成异质主体、市场摩擦和制度环境。

第 33 章拆的是技术。中性技术进步 A_t 被拆成高技能增强型技术 A_H、低技能增强型技术 A_L、自动化任务和新任务创造。增长不再只改变平均产出，还改变相对工资、劳动份额和职业结构。

第 34 章拆的是开放。贸易开放不是一个单独的贸易/GDP 比率，而是由贸易成本、市场规模、进口中间品、出口学习、跨国技术扩散和企业再配置共同构成。开放可能提高生产率，也可能因为学习能力不足、锁定低附加值环节或外部冲击而效果有限。

本章拆的是金融。金融发展不是信贷规模，而是筛选项目、分散风险、缓解融资约束和配置资本的能力。若金融体系偏向抵押品、所有制或隐性担保，高信贷反而可能扩大错配。

这三个专题共同提醒我们：高级增长分析往往不是再写一个更长的生产函数，而是识别哪个摩擦改变了边际条件。技术方向改变相对边际产出，开放摩擦改变学习和

市场规模，金融摩擦改变资本边际产出均等化。读完这三章以后，再进入附录 A–F，读者应当带着一个明确问题：这些复杂机制怎样被写成递归问题、连续时间系统、异质性主体模型、随机 HJB、数据口径和数值算法？

35.15 常见误区

误区一：信贷越多，增长越快。金融发展早期可能如此，但高信贷总量也可能反映杠杆、泡沫和错配。

误区二：融资约束只影响中小企业利润。融资约束会影响企业进入、扩张、创新和资本边际产出，因此是总量生产率问题。

误区三：高储蓄一定是优势。高储蓄只有在被有效配置到高回报投资时才支持增长；否则会转化为低效率投资和债务负担。

误区四：金融抑制总是坏的或总是好的。它的效果取决于资金是否进入高社会回报项目，以及是否存在退出纪律。

误区五：把金融危机当成短期波动。信贷崩塌会中断企业投资、研发和人力资本积累，长期增长也会受损。

35.16 英文术语表

Term	含义
Financial development	金融发展；金融系统在储蓄动员、项目筛选、风险分担和资源配置上的能力提升。
Financial deepening	金融深化；金融资产、信贷和金融服务相对经济规模扩大。
Credit constraint	信贷约束；主体无法按项目回报自由获得外部资金。
Collateral constraint	抵押约束；借款额度由净资产或可抵押资产价值决定。
External finance dependence	外部融资依赖；行业或企业对内部现金流之外资金的依赖程度。
Financial repression	金融抑制；利率、信贷方向、资本流动或金融进入受到政策限制。
Soft budget constraint	软预算约束；借款人预期亏损后仍会被救助，削弱市场纪律。

Financial accelerator	金融加速器；资产价格和抵押价值变化放大信贷、投资和经济波动。
Capital misallocation	资本错配；资本未流向边际产出最高的企业或部门。
Venture capital	风险资本；为高风险高成长企业提供股权融资和治理支持的资本。

35.17　本章 Review

第一，你应该能说明金融发展和金融深化的区别。金融深化是规模，金融发展是功能和效率；信贷/GDP 高不代表资本配置有效。

第二，你应该能推导抵押约束模型：企业资本满足 $k \le (1+\lambda)n$。当 first-best 资本超过这个上限时，企业投资不足，资本边际产出高于资金成本。

第三，你应该能把融资约束连接到资源错配。若高生产率企业受约束、低生产率企业不受约束，企业间 MPK 无法均等化，总量 TFP 下降。

第四，你应该能解释 Rajan–Zingales 式外部融资依赖设计：金融发展应当特别促进外部融资依赖高的行业增长。

第五，你应该能分析中国金融问题：高信贷总量与局部融资约束并存，关键问题是信贷流向、资金价格、抵押品偏向、隐性担保和退出纪律。

35.18　核心文献

金融发展与增长的经典经验入口包括 [King and Levine, 1993]、[Levine, 2005] 和 [Beck et al., 2000]。金融中介和增长的理论模型可读 [Greenwood and Jovanovic, 1990] 与 [Bencivenga and Smith, 1991]。外部融资依赖和行业增长的代表性识别设计是 [Rajan and Zingales, 1998]。抵押约束和信用周期的经典模型是 [Kiyotaki and Moore, 1997]。职业选择、财富分布和发展路径可回到 [Banerjee and Newman, 1993]；金融摩擦、企业异质性和发展阶段的现代量化模型可读 [Buera et al., 2011]。中国高储蓄、高投资和金融摩擦的代表性模型是 [Song et al., 2011]。本章应与第 16 章的异质性主体、第 27 章的资源错配和第 34 章的开放经济增长一起阅读。

第十部分

高级附录

附录 A　随机增长与递归数值方法

前面的章节主要把增长理论写成可推导、可解释的模型：Solow 模型给出资本积累和外生技术进步，Ramsey 模型把储蓄率内生化，OLG 模型引入代际结构，内生增长和创新模型解释知识、研发和市场结构如何改变长期增长率。可是，一旦进入 PhD 宏观和高级增长课程，模型通常会再跨过一道门槛：经济不再沿着一条确定路径前进，而是在生产率、政策、金融条件、人口、技术扩散和外部环境冲击之间不断移动。

这道门槛不是为了把模型做复杂。它解决的是一个很真实的问题：长期增长中的许多关键判断，都发生在不确定性下。一个家庭储蓄，不只因为明天资本回报高，也因为未来收入可能下降；一个企业投资，不只看平均生产率，也看融资条件和需求波动；一个政府设计产业政策，不只关心长期前沿，也要面对转型期冲击、风险分担和财政约束。如果模型没有随机性，就很难讨论预防性储蓄、风险溢价、危机后的持久损失、政策不确定性和长期增长之间的联系。

本附录的目标，是把你从确定性动态模型带到随机递归模型。它不是单纯的软件教程，而是一本增长教材应当具备的数值方法桥梁：先写清楚经济环境，再推导 Bellman 方程和 Euler 方程，然后说明为什么解存在、为什么值函数迭代会收敛，最后给出离散化、模拟、误差诊断和解释方法。读完以后，你应当能够看懂一般 PhD 宏观增长课程里的随机增长模型，也能判断一篇定量增长论文的数值解是否可信。

A.1　学习目标

读完本附录，你应该掌握六件事。

第一，理解为什么高级增长模型需要随机性。随机生产率、政策冲击和金融冲击不是装饰变量，而是改变储蓄、投资、资本积累和福利评价的核心机制。

第二，能够把确定性 Ramsey 模型改写成递归形式，并进一步写成随机 Bellman 方程：

$$V(k,z)=\max_{k'}\left\{u(c)+\beta\sum_{z'}P(z'|z)V(k',z')\right\}.$$

第三，能够从 Bellman 方程推出 Euler 方程，并理解 Euler 方程中的条件期望项为什么是随机增长模型的灵魂。

第四，理解 Bellman 算子作为压缩映射的基本证明：为什么值函数迭代不是“试出来的”，而是有数学保证的。

第五，能够解释资本网格、生产率离散化、插值、模拟样本、burn-in 和 Euler 误差这些数值对象分别在做什么。

第六，能够把随机增长模型用于经济解释：预防性储蓄、冲击持久性、发展中国家增长波动、金融摩擦和中国经济转型中的投资风险。

A.2 从确定性增长到随机增长

确定性 Ramsey 模型通常写成：

$$\max_{\{c_t,k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t) \tag{A.1}$$

$$\text{s.t.} \quad c_t + k_{t+1} = Ak_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t, \tag{A.2}$$

$$c_t \geq 0, \qquad k_{t+1} \geq 0. \tag{A.3}$$

如果 A 永远不变，经济的动态路径由当前资本 k_t 决定。给定 k_t，最优选择 k_{t+1}，再由资源约束确定 c_t。确定性模型的核心是跨期替代：今天多消费一单位，会减少明天的资本和产出。

随机增长模型只改动一个看似很小、实际很深的地方：生产率不再是常数，而是随机状态 z_t。令生产函数为

$$y_t = z_t k_t^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{A.4}$$

其中 z_t 可以理解为全要素生产率、需求条件、政策环境或广义效率状态。状态按照 Markov 过程演化：

$$\Pr(z_{t+1} = z_j \mid z_t = z_i) = P_{ij}. \tag{A.5}$$

这意味着未来不是完全未知的。经济主体知道当前状态，也知道从当前状态转移到未来状态的概率，但不知道明天到底落在哪个状态。

于是资源约束变成：

$$c_t + k_{t+1} = z_t k_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t. \tag{A.6}$$

与确定性模型相比，决策状态从一个变量 k_t 变成两个变量 (k_t, z_t)。这一步非常关键：在随机模型中，今天的最优储蓄不仅取决于资本存量，也取决于当前生产率状态，因为当前状态影响当期资源，也通过转移概率影响未来风险。

A.3 一个最小随机增长模型

考虑一个无限期代表性家庭经济。家庭同时拥有企业，选择消费和资本积累。偏好为

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t), \qquad 0 < \beta < 1, \tag{A.7}$$

其中 $u'(c) > 0$、$u''(c) < 0$。如果需要具体函数，常用 CRRA 效用：

$$u(c) = \begin{cases} \dfrac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}, & \sigma \neq 1, \\ \log c, & \sigma = 1. \end{cases} \tag{A.8}$$

生产率 z_t 取有限个值 $\{z_1, \dots, z_M\}$，转移矩阵为 P。状态 (k, z) 下的可行集是

$$0 \le k' \le z k^{\alpha} + (1-\delta)k, \qquad c = z k^{\alpha} + (1-\delta)k - k'. \tag{A.9}$$

因此 Bellman 方程为

$$V(k,z) = \max_{0 \le k' \le z k^{\alpha} + (1-\delta)k} \left\{ u(z k^{\alpha} + (1-\delta)k - k') + \beta \sum_{z'} P(z'|z) V(k', z') \right\}. \tag{A.10}$$

这个式子值得逐项读。左边 $V(k,z)$ 是状态价值：如果今天资本为 k、生产率为 z，从今天到无限未来最多能获得多少折现效用。右边的选择变量是下一期资本 k'。选择更多 k' 会降低今天消费，却提高未来状态下的资本。未来价值不是一个确定数，而是对所有可能 z' 的加权平均。

如果把 (A.10) 和确定性 Bellman 方程比较，就能看到随机模型只多了一项：

$$\sum_{z'} P(z'|z) V(k', z').$$

但正是这一项引入了风险、预期、持久性和政策状态。增长理论中的许多高级问题，都藏在这个条件期望里。

A.4 Euler 方程：随机回报下的跨期权衡

设内部解存在，且值函数足够光滑。Bellman 方程的一阶条件为

$$u'(c_t) = \beta \sum_{z_{t+1}} P(z_{t+1}|z_t) V_k(k_{t+1}, z_{t+1}). \tag{A.11}$$

包络条件为

$$V_k(k_t, z_t) = u'(c_t) \left[\alpha z_t k_t^{\alpha - 1} + 1 - \delta \right]. \tag{A.12}$$

把下一期的包络条件代入一阶条件，得到随机 Euler 方程：

$$u'(c_t) = \beta \mathbb{E}_t \left[u'(c_{t+1}) \left(\alpha z_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} + 1 - \delta \right) \right]. \tag{A.13}$$

这个式子是随机增长模型的核心。左边是今天消费的边际效用。右边是把一单位资源储蓄成资本后，明天在不同生产率状态下带来的预期边际收益。注意，期望作用在两个对象的乘积上：明天的边际效用 $u'(c_{t+1})$ 和明天的资本回报

$$R_{t+1} = \alpha z_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} + 1 - \delta.$$

因此，随机性不只是把确定性回报替换成平均回报。风险状态下重要的是边际效用与回报的协方差。如果坏状态中消费低、边际效用高，而资本回报也在坏状态中高，那么资本具有保险价值；如果资本回报在坏状态中低，则资本风险更大，家庭可能需要更高的平均回报才愿意持有。

这就是为什么高阶宏观和增长课程会反复使用随机贴现因子：

$$m_{t+1} = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}. \tag{A.14}$$

Euler 方程可以写成

$$1 = \mathbb{E}_t[m_{t+1} R_{t+1}]. \tag{A.15}$$

这把增长模型和资产定价、风险分担、金融摩擦连接起来。长期增长不是只由平均技术进步决定，也由风险如何分配、谁承担冲击、资本回报是否在坏时期下降决定。

A.5 存在性与收敛：为什么值函数迭代可以用

数值解不是随便在网格上试一试。标准递归方法依赖一个数学事实：在合适条件下，Bellman 算子是压缩映射。

定义 Bellman 算子 T：

$$(TV)(k,z) = \max_{0 \le k' \le z k^{\alpha} + (1-\delta)k} \left\{ u(z k^{\alpha} + (1-\delta)k - k') + \beta \sum_{z'} P(z'|z) V(k', z') \right\}. \tag{A.16}$$

命题 A.1 (Bellman 算子的压缩性质). *设状态空间为紧集，效用函数连续且有界，选择集非空、紧且连续，$0 < \beta < 1$。在有界连续函数空间上，以 sup norm 衡量距离，Bellman 算子 T 满足*

$$\|TV - TW\|_{\infty} \le \beta \|V - W\|_{\infty}.$$

因此 T 有唯一不动点 V^*，并且从任意初始有界函数 V_0 出发，迭代 $V_{n+1} = TV_n$ 收敛到 V^*。

证明。任取两个有界函数 V 和 W。对任意状态 (k,z) 和任意可行选择 k'，有

$$\left|\beta\sum_{z'}P(z'|z)V(k',z')-\beta\sum_{z'}P(z'|z)W(k',z')\right|\le\beta\sum_{z'}P(z'|z)\|V-W\|_\infty.$$

由于转移概率求和为 1，上式等于

$$\beta\|V-W\|_\infty.$$

最大化操作不会放大两个目标函数之间的最大距离，所以

$$|(TV)(k,z)-(TW)(k,z)|\le\beta\|V-W\|_\infty.$$

对所有状态取上确界，得到压缩不等式。由 Banach 不动点定理，唯一不动点和迭代收敛性成立。

这个证明的经济含义很直观。未来价值函数如果有误差，今天只会按 β 折现后进入目标函数；每迭代一次，误差最多缩小一个 β 倍。β 越接近 1，收敛越慢，因为未来越重要，今天的价值越依赖远期项。

A.6 值函数迭代：从模型到算法

在计算机上求解 (A.10) 时，需要把连续资本空间离散化。设资本网格为

$$\mathcal{K}=\{k_1,k_2,\dots,k_N\},$$

生产率状态为

$$\mathcal{Z}=\{z_1,\dots,z_M\}.$$

值函数变成一个 $N\times M$ 的矩阵，策略函数也是一个 $N\times M$ 的矩阵。

表 A.1: 随机增长模型的值函数迭代流程

步骤	内容
1	选择参数 $\alpha,\beta,\delta,\sigma$，给定生产率状态 $\mathcal{Z}$ 和转移矩阵 P。
2	构造资本网格 $\mathcal{K}$。网格通常覆盖确定性稳态附近较宽区间，例如 $[0.5k^*,1.5k^*]$ 或更宽。
3	初始化值函数 $V_0(k_i,z_m)$，可以全设为 0，也可以用确定性稳态附近的效用近似。

步骤	内容
4	对每个状态 (k_i, z_m)，遍历所有候选 k'_j，计算消费 $c = z_m k_i^{\alpha} + (1-\delta)k_i - k'_j$。若 $c \le 0$，该选择不可行。
5	对每个可行 k'_j，计算 $u(c) + \beta \sum_{\ell=1}^{M} P_{m\ell} V_n(k'_j, z_\ell)$，选择最大值作为 $V_{n+1}(k_i, z_m)$，并记录最优 k'_j。
6	计算距离 $\|V_{n+1} - V_n\|_\infty$。若小于容忍度，例如 10^{-6}，停止；否则继续迭代。

这个算法看起来机械，但每一步都有经济含义。资本网格决定我们允许经济选择哪些投资水平；生产率 Markov 链决定未来风险结构；值函数矩阵记录每个状态的长期价值；策略函数告诉我们在不同资本和生产率状态下选择多少储蓄。

A.7　一个可直接放进教材的数值例子

为了让随机增长模型不只是符号，表 A.2 给出一个最小校准。它不是为了精确拟合某个国家，而是为了展示模型对象如何进入数值解。

表 A.2: 随机增长模型的教学用参数

参数	含义	数值
α	资本产出弹性	0.33
β	主观贴现因子	0.96
δ	资本折旧率	0.08
σ	CRRA 相对风险厌恶系数	2.00
z_L	低生产率状态	0.95
z_H	高生产率状态	1.05
$P_{LL} = P_{HH}$	状态持续概率	0.90
$P_{LH} = P_{HL}$	状态转换概率	0.10

在没有随机性、且 $z = 1$ 的确定性稳态中，Euler 方程给出：

$$1 = \beta \left(\alpha (k^*)^{\alpha - 1} + 1 - \delta \right). \tag{A.17}$$

因此

$$k^* = \left(\frac{\alpha}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{A.18}$$

代入表 A.2 的参数，可得

$$k^* \simeq 4.434, \qquad y^* \simeq 1.635, \qquad i^* = \delta k^* \simeq 0.355, \qquad c^* \simeq 1.280.$$

这些数值可以直接用于构造资本网格。例如设

$$\mathcal{K} = [0.5k^*, 1.5k^*],$$

则资本网格大致覆盖 $[2.217, 6.651]$。如果研究危机或发展中国家的高波动，应当把下界取得更低、上界取得更高，因为经济可能远离稳态。

生产率转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0.90 & 0.10 \\ 0.10 & 0.90 \end{pmatrix}. \tag{A.19}$$

这个矩阵的含义是：如果今天是低生产率状态，明天仍为低状态的概率是 0.90；如果今天是高生产率状态，明天仍为高状态的概率也是 0.90。状态很持久，所以冲击不是短暂噪声，而会影响一段时间内的储蓄和投资选择。

表 A.3: 教学例子中的状态含义

状态	z	当期产出效应	对储蓄决策的直觉影响
低状态	0.95	同样资本下产出较低	消费受压，若风险持续则可能提高预防性储蓄
高状态	1.05	同样资本下产出较高	资源较宽松，可能提高投资，也可能提高消费

这张表比单纯给出矩阵更重要。数值模型不是为了得到一串机器输出，而是为了把状态、选择和机制对应起来。低生产率状态下，家庭面临两股力量：当期资源减少会压低储蓄能力；未来坏状态可能持续又会提高预防性储蓄动机。最终策略函数如何变化，要由效用曲率、冲击持久性和资本回报共同决定。

A.8 生产率离散化：Tauchen 方法的直觉

很多论文不直接假设 z_t 只有两个状态，而是假设对数生产率服从 AR(1)：

$$\log z_{t+1} = \rho \log z_t + \varepsilon_{t+1}, \qquad \varepsilon_{t+1} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2). \tag{A.20}$$

计算时需要把连续过程近似为有限状态 Markov 链。Tauchen 方法的基本思想是：先在对数生产率的无条件均值附近取若干网格点，再用正态分布计算从一个网格区间转移到另一个网格区间的概率。

设无条件标准差为

$$\sigma_z = \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

通常在 $[-m\sigma_z, m\sigma_z]$ 区间上取 M 个等距点，其中 m 常取 2 或 3。然后，对每个当前状态 z_i 和未来网格区间 $[b_{j-1}, b_j]$，计算

$$P_{ij} = \Pr\left(b_{j-1} \le \rho z_i + \varepsilon' \le b_j\right).$$

这一步看似技术性，但对增长结果很重要。若网格太窄，极端坏状态被截掉，模型会低估风险；若状态点太少，高持久冲击的动态会被扭曲；若 ρ 接近 1 而网格过粗，资本策略可能出现不自然的跳跃。

A.9 策略函数的经济解释

随机增长模型的求解结果通常不是一条时间路径，而是一组策略函数：

$$k' = g(k,z), \qquad c = h(k,z) = zk^\alpha + (1-\delta)k - g(k,z).$$

解释策略函数时，应当先问三个问题。

第一，给定生产率状态，$g(k,z)$ 是否随 k 上升？通常是的，因为资本越多，总资源越多，最优下一期资本也越高。但由于边际收益递减，$g(k,z)$ 不应当以一比一速度无限上升。

第二，给定资本，$g(k,z_H)$ 与 $g(k,z_L)$ 谁更高？答案不必然。高生产率提高当期资源和资本边际收益，可能提高投资；低生产率如果意味着坏状态持续、未来收入风险高，也可能提高预防性储蓄倾向。最终取决于冲击持久性和效用曲率。

第三，随机模型的平均资本是否高于确定性稳态？在存在谨慎性动机时，不确定性可能提高平均储蓄，形成预防性资本积累。但如果冲击主要降低投资回报，或坏状态中融资约束更强，平均资本也可能下降。高级增长模型的意义正在这里：它不把“风险”简单等同于“更多储蓄”或“更少增长”，而是要求我们看风险进入哪一个方程。

A.10 欧拉方程误差

值函数迭代收敛，只说明值函数本身不再明显变化。它还不能保证策略函数已经很好地满足经济最优条件。因此，定量增长论文通常还要报告欧拉方程误差。

给定数值策略 $g(k,z)$，当期消费由资源约束确定，等于当期产出加未折旧资本，再减去下一期资本。

下一期状态为 $(g(k,z),z')$ 时，也用同样的资源约束和同一策略函数计算下一期消费。

欧拉方程残差可以写成

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(k,z) &= 1-\beta\,\Xi(k,z)/u'(c(k,z)),\\ \Xi(k,z) &= \sum_{z'} P(z'|z)u'(c_+(z'))R_+(z'),\\ c_+(z') &= z'g(k,z)^{\alpha}+(1-\delta)g(k,z)\\ &\quad - g(g(k,z),z'),\\ R_+(z') &= \alpha z' g(k,z)^{\alpha-1}+1-\delta.\end{aligned} \tag{A.21}$$

若 $\mathcal{R}(k,z)=0$，Euler 方程在该状态完全成立。实际计算中会得到很小但非零的残差。常见报告方式是消费等价误差或 $\log_{10}$ 误差。例如，若误差为 10^{-3}，可粗略理解为决策误差约为千分之一量级；若误差为 10^{-6}，则非常精确。

Euler 误差的学习价值很高。它迫使你区分“程序跑完了”和“解是可信的”。如果误差在稳态附近很小、在网格边界很大，说明网格范围可能太窄；如果误差呈现周期性跳动，可能是网格过粗或插值不光滑；如果高生产率状态误差显著大于低状态，可能是资本上界不足以覆盖高状态下的最优投资。

A.11 模拟：从策略函数到增长事实

求得策略函数以后，可以生成一条模拟经济路径。模拟不是额外装饰，而是把抽象策略函数转化为可比较的增长事实。基本步骤如下。

1. 给定初始状态 (k_0,z_0)。
2. 根据转移矩阵 P 抽取 z_{t+1}。
3. 使用策略函数得到 $k_{t+1}=g(k_t,z_t)$。
4. 计算 $y_t=z_tk_t^{\alpha}$、$c_t=y_t+(1-\delta)k_t-k_{t+1}$、$i_t=k_{t+1}-(1-\delta)k_t$。
5. 重复很多期，丢弃前若干期 burn-in，保留后续样本计算均值、标准差、自相关和相关系数。

表 A.4 给出模拟输出应当包含的基本对象。这里的重点不是让你手工跑程序，而是理解论文中的“模拟矩”到底从哪里来。

表 A.4: 随机增长模型模拟输出的基本对象

变量	计算方式	经济解释
y_t	$z_tk_t^{\alpha}$	总产出，受资本和生产率共同影响

变量	计算方式	经济解释
c_t	$y_t + (1-\delta)k_t - k_{t+1}$	消费，反映跨期平滑和风险吸收
i_t	$k_{t+1} - (1-\delta)k_t$	投资，是资本调整的直接表现
s_t	i_t / y_t	储蓄或投资率，可与增长事实比较
R_{t+1}	$\alpha z_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} + 1 - \delta$	资本总回报，连接增长和资产定价
$\Delta \log y_t$	$\log y_t - \log y_{t-1}$	增长率，用于衡量波动和持久性

一个严肃的模拟设计至少要说明五个对象：目标、数据生成机制、估计或比较对象、算法方法、评价指标。对随机增长模型来说，就是要说明为什么模拟，冲击过程是什么，比较哪些矩，使用什么数值算法，如何评估误差。没有这些说明的数值结果，很难被复现，也很难被信任。

A.12　校准、估计与识别

随机增长模型常用校准。校准不是随意挑参数，而是让参数与某些长期事实或外部证据对应。例如，α 可由资本收入份额给出，δ 可由折旧率给出，β 可由平均利率或资本回报给出，ρ 和 σ_ε 可由 Solow residual 或 TFP 序列估计得到。

但校准也有边界。若研究问题依赖某个关键参数，比如风险厌恶系数 σ、冲击持久性 ρ 或金融约束强度，就不能只给一个基准值。至少要做敏感性分析，说明结论在不同参数下是否稳健。高级增长论文的可信度，常常不取决于模型有多复杂，而取决于作者是否诚实展示模型结论依赖哪些参数。

估计则更进一步。若有足够数据，可以用矩匹配、最大似然、贝叶斯方法或间接推断估计模型参数。估计的优势是把参数选择和数据联系得更紧；困难是模型求解嵌套在估计程序内部，计算成本高，也更容易出现识别不足。增长模型的估计尤其要小心：许多长期参数会产生相似的稳态矩，却对转移动态和福利有不同含义。

A.13　与中国和发展经济的连接

随机增长模型对中国和发展经济研究尤其有用，因为发展过程往往不是平滑收敛，而是伴随结构变化、政策试验、外部冲击和金融约束。

第一，生产率冲击可以理解为技术扩散和制度环境的变化。改革开放、加入 WTO、数字技术扩散、产业政策调整，都可能改变某些部门的 z_t。如果冲击具有持久性，企业和地方政府的投资反应会明显不同于短期波动。

第二，资本积累在发展经济中通常更不平滑。基础设施、房地产、制造业扩张和城市化都具有强投资属性。当冲击影响预期收益时，投资率会剧烈变化。随机增长模型可

以帮助区分：投资下降是因为资本边际收益下降，还是因为不确定性上升、融资条件收紧、预期状态转差。

第三，金融摩擦会放大随机冲击。若企业投资满足抵押约束

$$k_{t+1} \le (1+\lambda_t) n_t,$$

而 λ_t 随金融状态变化，那么同样的生产率冲击会在不同金融状态下产生不同增长后果。坏状态不仅降低 z_t，还可能降低融资能力，使资本积累进一步收缩。这为理解危机后的持久损失、民营企业融资难、地产抵押品价格和地方债务约束提供了模型语言。

第四，政策评价必须看风险分布，而不只是平均增长率。一个政策如果提高平均产出，但显著增加坏状态下消费下降的概率，福利评价可能并不正面。随机增长模型把这种权衡写进期望效用，而不是只看 GDP 均值。

A.14 常见错误

第一，把随机模型理解成确定性模型加一个噪声项。真正重要的是条件期望、风险状态下的边际效用、冲击持久性和策略函数随状态变化。

第二，只报告值函数收敛，不报告 Euler 误差。值函数迭代的停止标准不能替代经济最优条件的误差诊断。

第三，资本网格太窄。若模拟中经济经常碰到网格边界，策略函数会被人为截断，结论可能完全失真。

第四，生产率离散化太粗。两个状态适合教学，但很多定量问题需要更多状态点，尤其当冲击高度持久时。

第五，把校准当成免检。校准参数必须有来源，关键参数必须做敏感性分析。

第六，模拟样本太短或没有 burn-in。初始状态会影响早期路径，若直接用全部样本计算矩，可能混入过渡动态。

A.15 英文术语表

表 A.5: 随机增长与递归方法术语

英文术语	中文含义	说明
recursive formulation	递归表述	用当前状态和策略函数描述动态问题
state variable	状态变量	决定未来可行集和价值的变量，如 k, z

英文术语	中文含义	说明
Bellman equation	Bellman 方程	递归动态优化的核心方程
value function iteration	值函数迭代	反复应用 Bellman 算子求不动点
policy function	策略函数	每个状态下的最优选择规则
Markov chain	Markov 链	未来状态只依赖当前状态的随机过程
Tauchen method	Tauchen 离散化方法	把 AR(1) 正态过程近似为有限状态 Markov 链
Euler equation error	Euler 方程误差	检查数值策略是否满足最优条件的指标
burn-in	预热期	模拟中丢弃的早期样本，避免初始状态影响
calibration	校准	用外部事实或长期矩选择参数

A.16 本附录 Review

这一附录是否真正掌握，可以用以下方式检查。

第一，看模型设定是否完整。一个合格的随机增长模型必须明确状态变量、控制变量、资源约束、冲击过程、转移概率、目标函数和可行集。若只写一个 Bellman 方程而不说明这些对象，读者无法判断模型经济含义。

第二，看推导链条是否闭合。从 Bellman 方程到一阶条件，再到包络条件和 Euler 方程，每一步都应当能解释。尤其要理解为什么 Euler 方程右边是条件期望，以及为什么边际效用和资本回报的乘积不能简单拆成两个平均数。

第三，看数值方法是否可复现。资本网格、状态离散化、初始值、收敛标准、插值方式、模拟长度、burn-in 和随机种子都属于模型的一部分。论文如果省略这些信息，复现难度会显著上升。

第四，看误差诊断是否充分。只说“值函数收敛”是不够的。应当检查 Euler 误差在状态空间中的分布，特别是稳态附近、网格边界和高低生产率状态之间是否存在系统差异。

第五，看经济解释是否没有被算法掩盖。数值模型最终仍要回答经济问题：风险如何改变储蓄？冲击持久性如何改变投资？金融摩擦如何放大坏状态？政策如何改变均值和风险分布？如果一章只剩下程序流程，而不能回答这些问题，就还没有真正学会随机增长模型。

A.17　核心文献

本附录的递归方法基础来自 [Stokey et al., 1989, Ljungqvist and Sargent, 2018]。数值方法和计算经济学可参考 [Judd, 1998, Adda and Cooper, 2003]。生产率过程离散化常用 [Tauchen, 1986]。异质性、不完全市场和预防性储蓄的经典增长应用包括 [Bewley, 1977, Huggett, 1993, Aiyagari, 1994]。这些文献共同构成高级增长课程中“递归、随机、数值”三件套的基础。

附录 B　连续时间增长、Hamiltonian 与 HJB 工具箱

第 7 章已经介绍了动态优化的基本语言，第 13 章用 Ramsey–Cass–Koopmans 模型展示了 Hamiltonian 如何推出 Euler 方程和鞍路径。本附录的任务不是重复这些内容，而是把连续时间增长模型中最容易混淆、也最常在 PhD 课程和论文附录中出现的工具集中整理出来。

连续时间方法有一个优点：它把“增长率”“回报率”“影子价格变化率”和“状态变量运动”写得非常直接。资本、技术、人力资本、知识存量、企业价值、财富分布和污染存量都可以写成微分方程。政策和市场结构改变的不是某个孤立数字，而是一整条状态路径。因此，连续时间增长模型特别适合讨论转移动态、鞍路径、创新强度、最优税收、环境约束、金融摩擦和长期福利。

但连续时间方法也有一个危险：符号看起来很优雅，错误也很隐蔽。最常见的错误包括：现值 Hamiltonian 和当前值 Hamiltonian 混用；协态变量的贴现方式写错；横截条件只背公式、不懂经济含义；相图只画方向箭头、不检查稳定根；HJB 方程只会写形式、不知道它和 Hamiltonian 的关系。本附录要解决的就是这些问题。

B.1　学习目标

读完本附录，你应该能够做到六件事。

第一，区分现值 Hamiltonian 和当前值 Hamiltonian，并能在同一个增长模型中把两种写法互相转换。

第二，从最优控制问题推导一阶条件、协态方程、Euler 方程和横截条件，知道每一步的经济含义。

第三，理解鞍路径稳定不是一句口号，而是二维动态系统的特征根结构：一个稳定方向、一个不稳定方向，跳跃变量必须选择在稳定流形上。

第四，把连续时间 Bellman 方程写成 HJB 方程，并说明 HJB 与 Hamiltonian 的等价关系。

第五，用一个完整的数值例子计算 Ramsey 稳态、线性化矩阵和特征根，理解参数如何改变收敛速度。

第六，把连续时间方法用于中国和发展经济问题：高投资转型、资本回报下降、人口老龄化、技术追赶、碳约束和政策路径设计。

B.2 连续时间问题的标准形

一个最基本的连续时间最优增长问题可以写成

$$\max_{\{c(t)\}_{t\geq 0}} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c(t))\, dt \tag{B.1}$$

subject to

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - \delta k(t), \qquad k(0) = k_0 > 0, \tag{B.2}$$

and

$$c(t) \geq 0, \qquad k(t) \geq 0. \tag{B.3}$$

这里 k 是状态变量，c 是控制变量，ρ 是贴现率，δ 是折旧率。生产函数满足

$$f'(k) > 0, \qquad f''(k) < 0.$$

如果采用 CRRA 效用，

$$u(c) = \begin{cases} \dfrac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta}, & \theta \neq 1, \\ \log c, & \theta = 1, \end{cases} \qquad \theta > 0, \tag{B.4}$$

则 θ 是跨期替代弹性的倒数。

这个模型虽然简单，却足以承载连续时间最优控制的核心。更复杂的增长模型通常只是把状态变量从一个扩展为多个，把控制变量从消费扩展为储蓄、研发、教育、污染减排、借贷或政策工具。例如：

$$\dot{x} = F(x, a), \qquad x = (k, A, h, B, \tau), \qquad a = (c, I_R, I_h, \mu).$$

真正重要的不是变量多少，而是每个变量是否被清楚地区分为状态、控制或价格。

表 B.1 的区分非常关键。消费可以跳跃，因为家庭可以在给定资本下选择不同消费；资本不能跳跃，因为资本只能通过投资积累。协态变量通常也可以跳跃，因为它是对未来路径价值的价格评估。这就是为什么 Ramsey 相图中，给定初始资本 k_0，消费 c_0 必须被选择到一条特殊路径上。

B.3 现值 Hamiltonian

对问题 (B.1)–(B.2)，现值 Hamiltonian 写成

$$\mathcal{H}^P(k, c, \mu, t) = e^{-\rho t} u(c) + \mu \left[f(k) - c - \delta k \right], \tag{B.5}$$

表 B.1: 连续时间增长模型中的三类对象

对象	典型例子	经济含义
状态变量	k, A, h, b	由过去积累而来，不能瞬间任意跳跃
控制变量	c, s, I_R, τ	当前可选择，直接影响效用或状态演化
协态变量	λ, q, V_x	状态变量的边际价值或影子价格

其中 $\mu(t)$ 是现值协态变量。它衡量在时点 t 多一单位资本，对从 0 时点看过去的折现总效用增加多少。因为它已经包含从 t 回到 0 的贴现，所以通常随时间自然下降。

现值一阶条件为

$$\frac{\partial \mathcal{H}^P}{\partial c} = e^{-\rho t}u'(c) - \mu = 0, \qquad \mu = e^{-\rho t}u'(c). \tag{B.6}$$

现值协态方程为

$$\dot{\mu} = -\frac{\partial \mathcal{H}^P}{\partial k} = -\mu\left[f'(k) - \delta\right]. \tag{B.7}$$

状态方程仍为

$$\dot{k} = f(k) - c - \delta k. \tag{B.8}$$

现值写法的好处是直接对应原始目标函数。它的缺点是公式里到处出现 $e^{-\rho t}$，容易让推导显得笨重。因此增长教材和宏观论文更常用当前值 Hamiltonian。

B.4 当前值 Hamiltonian

定义当前值协态变量

$$\lambda(t) = e^{\rho t}\mu(t). \tag{B.9}$$

把现值协态变量乘回贴现因子后，λ 衡量的是“以时点 t 当前效用单位计价”的资本影子价值。当前值 Hamiltonian 为

$$\mathcal{H}(k, c, \lambda) = u(c) + \lambda\left[f(k) - c - \delta k\right]. \tag{B.10}$$

一阶条件为

$$u'(c) = \lambda. \tag{B.11}$$

当前值协态方程为

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} = \left[\rho + \delta - f'(k)\right]\lambda. \tag{B.12}$$

命题 B.1 (现值与当前值协态方程的等价性). *若 $\lambda(t) = e^{\rho t}\mu(t)$，并且现值协态方程 (B.7) 成立，则当前值协态方程 (B.12) 成立。*

证明. 由 $\lambda = e^{\rho t}\mu$，对时间求导：

$$\dot{\lambda} = \rho e^{\rho t}\mu + e^{\rho t}\dot{\mu}.$$

代入现值协态方程 $\dot{\mu} = -\mu[f'(k) - \delta]$，得到

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \lambda[f'(k) - \delta] = [\rho + \delta - f'(k)]\lambda.$$

这正是 (B.12)。 □

这个命题的意义不只是符号转换。它告诉我们：若使用当前值 Hamiltonian，协态方程右边必须多出 $\rho\lambda$；若忘记这一项，就等于把现值和当前值混在一起，Euler 方程会错。

表 B.2: 现值与当前值 Hamiltonian 的区别

对象	现值写法	当前值写法
Hamiltonian	$e^{-\rho t}u(c) + \mu\dot{k}$	$u(c) + \lambda\dot{k}$
协态变量	$\mu = e^{-\rho t}u'(c)$	$\lambda = u'(c)$
协态方程	$\dot{\mu} = -\partial\mathcal{H}^P/\partial k$	$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \partial\mathcal{H}/\partial k$
直觉	从 0 时点折现评价资本	从当前时点评价资本

B.5 Euler 方程的完整推导

由当前值一阶条件

$$\lambda = u'(c)$$

对时间求导，得到

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{u''(c)c}{u'(c)}\frac{\dot{c}}{c}.$$

定义

$$\theta(c) = -\frac{u''(c)c}{u'(c)}. \tag{B.13}$$

则

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -\theta(c)\frac{\dot{c}}{c}.$$

另一方面，由协态方程

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \rho + \delta - f'(k).$$

合并可得

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta(c)}\left[f'(k) - \delta - \rho\right]. \tag{B.14}$$

CRRA 情形下 $\theta(c) = \theta$，于是

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{f'(k) - \delta - \rho}{\theta}. \tag{B.15}$$

这个式子看似已经在第 7 章和第 13 章出现过，但在这里要强调两点。第一，它是资产定价条件：资本净回报 $f'(k) - \delta$ 高于耐心要求 ρ 时，消费应随时间上升；低于 ρ 时，消费应下降。第二，它是价格动态条件：协态变量 λ 的运动告诉我们资本边际价值如何变化，消费只是通过 $u'(c) = \lambda$ 把价格动态翻译成数量动态。

B.6 横截条件：无泡沫、无浪费与最优性

无限期问题不能只靠一阶条件。还需要横截条件：

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda(t)k(t) = 0. \tag{B.16}$$

这里使用的是当前值协态变量 λ，所以要乘 $e^{-\rho t}$。若用现值协态变量 μ，横截条件写成

$$\lim_{t\to\infty} \mu(t)k(t) = 0. \tag{B.17}$$

两者等价，因为 $\mu = e^{-\rho t}\lambda$。

横截条件有三种互补解释。第一，资产不能有未被使用的正价值。如果极限为正，说明经济把有价值资本永远留下而不转化为消费。第二，排除庞氏式路径。若资产价格和资本存量的折现价值不收敛到零，家庭可能通过不可持续的资产路径伪造最优。第三，它选择了正确的动态路径。很多满足 Euler 方程的路径最终会爆炸或撞到可行边界，横截条件把这些路径排除掉。

一个常见误解是把横截条件理解为“长期资本必须为零”。这是错的。平衡增长或稳态中，资本可以为正，甚至总量资本可以随人口和技术持续增长。横截条件要求的是折现影子价值乘以状态变量的极限为零，而不是状态变量本身为零。

B.7 相图与鞍路径

把状态方程和 Euler 方程写成二维系统：

$$\dot{k} = f(k) - c - \delta k, \tag{B.18}$$

$$\dot{c} = \frac{c}{\theta}\left[f'(k) - \delta - \rho\right]. \tag{B.19}$$

稳态满足

$$c^* = f(k^*) - \delta k^*, \tag{B.20}$$

$$f'(k^*) = \rho + \delta. \tag{B.21}$$

$\dot{k} = 0$ 曲线是

$$c = f(k) - \delta k.$$

若消费高于这条线，消费超过净产出，资本下降；若消费低于这条线，资本积累。$\dot{c} = 0$ 曲线在一维资本模型中是一条竖线：

$$k = k^*.$$

当 $k < k^*$ 时，边际产出较高，$f'(k) - \delta > \rho$，消费增长；当 $k > k^*$ 时，资本回报低，消费下降。

B.8 线性化：为什么是 saddle path

为了理解鞍路径，不能只靠图。令

$$F_1(k, c) = f(k) - c - \delta k, \qquad F_2(k, c) = \frac{c}{\theta}[f'(k) - \delta - \rho].$$

在稳态 (k^*, c^*) 附近线性化：

$$\begin{pmatrix} \dot{k} \\ \dot{c} \end{pmatrix} \approx J \begin{pmatrix} k - k^* \\ c - c^* \end{pmatrix}, \tag{B.22}$$

其中 Jacobian 为

$$J = \begin{pmatrix} f'(k^*) - \delta & -1 \\ \dfrac{c^*}{\theta} f''(k^*) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & -1 \\ \dfrac{c^*}{\theta} f''(k^*) & 0 \end{pmatrix}. \tag{B.23}$$

因为 $f''(k^*) < 0$，所以

$$\det(J) = \frac{c^*}{\theta} f''(k^*) < 0.$$

二维系统的行列式为负，意味着两个特征根一正一负。于是稳态是鞍点：只有一个方向通向稳态，另一个方向远离稳态。

命题 B.2 (Ramsey 系统的局部鞍路径性质). *设 $f'(k) > 0$、$f''(k) < 0$、u 为 CRRA，且稳态满足 $c^* > 0$。则系统 (B.18)–(B.19) 在稳态附近有一个负特征根和一个正特征根，因此局部存在一条一维稳定路径。*

证明. Jacobian 矩阵由 (B.23) 给出。其行列式为

$$\det(J) = \rho \cdot 0 - (-1)\frac{c^*}{\theta} f''(k^*) = \frac{c^*}{\theta} f''(k^*) < 0.$$

二维矩阵两个特征根的乘积等于行列式。由于乘积为负，两个实特征根异号。因此一个特征根为负，一个特征根为正。负特征根对应的特征向量张成局部稳定方向，正特征根对应不稳定方向。给定初始资本 k_0，只有选择落在稳定方向上的初始消费，路径才会收敛到稳态。 □

这个证明解释了 Ramsey 模型的直觉。资本 k_0 是历史给定的，不能跳；消费 c_0 是选择变量，可以跳。若 c_0 选得太高，资本被吃掉，经济最终不可行；若 c_0 选得太低，资本过度积累，横截条件失败。只有一个消费水平把经济放到稳定路径上。

B.9 数值例子：稳态和收敛速度

取 Cobb–Douglas 生产函数

$$f(k) = k^{\alpha},$$

并设

$$\alpha = 0.33, \qquad \delta = 0.08, \qquad \rho = 0.04, \qquad \theta = 2.$$

稳态条件 $f'(k^*) = \rho + \delta$ 给出

$$k^* = \left(\frac{\alpha}{\rho + \delta}\right)^{1/(1-\alpha)} \simeq 4.51. \tag{B.24}$$

对应产出、折旧投资和消费为

$$y^* \simeq 1.64, \qquad \delta k^* \simeq 0.36, \qquad c^* \simeq 1.28.$$

在这个校准下，Jacobian 近似为

$$J \simeq \begin{pmatrix} 0.04 & -1 \\ -0.0149 & 0 \end{pmatrix}.$$

两个特征根约为

$$\eta_1 \simeq -0.104, \qquad \eta_2 \simeq 0.144.$$

负根的绝对值可以粗略理解为局部收敛速度：偏离稳态的稳定成分每年按约 10.4% 的连续速度衰减。正根则说明若消费选择偏离稳定路径，误差会随时间放大。

这个例子有两层学习价值。第一，稳态本身来自边际产出等于耐心要求，不来自固定储蓄率。第二，收敛速度不是凭感觉判断，而来自线性化矩阵的特征根。高级增长论文在讨论转移动态时，背后通常就是这种局部动态结构。

表 B.3: 连续时间 Ramsey 模型的教学用校准

参数或变量	数值	含义
α	0.33	资本收入份额
δ	0.08	年折旧率
ρ	0.04	主观贴现率
θ	2.00	跨期替代弹性的倒数
k^*	4.51	稳态资本
y^*	1.64	稳态产出
c^*	1.28	稳态消费

B.10 从 Hamiltonian 到 HJB

Hamiltonian 方法直接求一条最优路径。HJB 方法则从状态价值出发，问：如果当前资本是 k，从现在开始最多能得到多少当前价值？定义值函数 $V(k)$，连续时间 Bellman 方程为

$$\rho V(k) = \max_{c} \left\{ u(c) + V'(k) \left[f(k) - c - \delta k \right] \right\}. \tag{B.25}$$

这就是 Hamilton–Jacobi–Bellman 方程，简称 HJB。

HJB 的左边 $\rho V(k)$ 是持有价值 $V(k)$ 的机会成本。右边是当前效用加上状态变化带来的价值变化。若多消费一单位，当前效用上升，但资本变化项下降；若少消费一单位，当前效用下降，但未来价值提高。

HJB 的一阶条件为

$$u'(c) = V'(k). \tag{B.26}$$

这与 Hamiltonian 中的 $u'(c) = \lambda$ 完全对应。因此

$$\lambda(t) = V'(k(t)). \tag{B.27}$$

协态变量就是值函数对状态变量的边际价值。

命题 B.3 (HJB 与 Hamiltonian 的边际价值关系). *若值函数 V 可微，最优路径为内部解，并且 HJB 方程 (B.25) 成立，则沿最优路径 $\lambda(t) = V'(k(t))$ 满足 current-value Hamiltonian 的一阶条件和协态方程。*

证明. HJB 对控制变量的一阶条件直接给出 $u'(c) = V'(k)$。令 $\lambda = V'(k)$，则 Hamiltonian 的消费一阶条件成立。

接着沿最优路径对 HJB 使用包络思想。右边最大化问题中，控制变量的变化项由一阶条件消去，得到

$$\rho V'(k) = V''(k)\dot{k} + V'(k)[f'(k) - \delta].$$

由于 $\lambda = V'(k)$，沿路径有

$$\dot{\lambda} = V''(k)\dot{k}.$$

代入上一式并整理：

$$\dot{\lambda} = [\rho + \delta - f'(k)]\lambda.$$

这正是 current-value 协态方程。 □

HJB 的价值在于，它自然适合多状态和不确定性模型。若状态为 (k, z)，且 z 是连续时间 Markov 链或扩散过程，HJB 会把状态转移生成元放进方程。附录 A 的离散时间 Bellman 方程和这里的 HJB，其实是同一种思想的两个时间版本。

B.11　多状态变量：知识、污染与债务

许多 PhD+ 增长模型至少有两个状态变量。例如，考虑资本 k 和知识存量 A：

$$\dot{k} = F(k, A) - c - I_A - \delta k, \tag{B.28}$$

$$\dot{A} = \phi(I_A, A). \tag{B.29}$$

当前值 Hamiltonian 为

$$\mathcal{H} = u(c) + \lambda_k[F(k, A) - c - I_A - \delta k] + \lambda_A \phi(I_A, A). \tag{B.30}$$

一阶条件包括

$$u'(c) = \lambda_k, \tag{B.31}$$

$$\lambda_k = \lambda_A \phi_{I_A}(I_A, A), \tag{B.32}$$

以及两个协态方程：

$$\dot{\lambda}_k = \rho\lambda_k - \lambda_k[F_k(k, A) - \delta], \tag{B.33}$$

$$\dot{\lambda}_A = \rho\lambda_A - \lambda_k F_A(k, A) - \lambda_A \phi_A(I_A, A). \tag{B.34}$$

这组方程显示出多状态增长模型的核心。研发投资 I_A 的最优选择不只看当期产出损失，还看知识的影子价值 λ_A；知识的影子价值又取决于它如何提高产出以及如何提高未来知识生产率。内生增长、创新、环境和财政债务模型，本质上都是在追踪多个状态变量的影子价格。

B.12 连续时间、离散时间与数值实现

连续时间模型最终也常常需要数值解。即使 Euler 方程和相图可以手推，含多个状态变量、非凸性、借贷约束、政策边界或随机冲击的模型通常没有闭式解。

最常见的数值路线有三类。第一，shooting method：给定初始状态，猜测跳跃变量，模拟微分方程，看路径是否满足长期边界条件。第二，time iteration 或 collocation：直接在网格上逼近策略函数或值函数。第三，离散化时间：把连续时间问题转成小步长离散时间问题，再使用附录 A 的递归数值方法。

表 B.4: 连续时间模型的常见数值路线

方法	适合问题	主要风险
Shooting	低维确定性模型、鞍路径	初始猜测敏感，容易沿不稳定根发散
Collocation	平滑值函数或策略函数	基函数和节点选择会影响精度
Time iteration	Euler 方程可写、策略单调	边界点和约束状态处理困难
离散化时间	想复用离散 Bellman 算法	步长过大时近似误差明显

数值结果必须报告误差诊断。对于连续时间模型，常见检查包括：资源约束残差、Euler 残差、横截条件是否近似成立、状态变量是否违反非负约束、路径是否对网格和步长敏感。一个模型“能跑出图”不等于模型已解好；真正可信的数值结果必须能说明误差在哪里、大小如何、经济结论是否稳健。

B.13 中国与发展延伸

连续时间工具对中国和发展经济问题很有用，因为这些问题往往不是“从一个稳态到另一个稳态”的静态比较，而是漫长的转型路径。

第一，高投资与资本回报下降可以用 Ramsey 相图理解。若一个经济体初始资本低，边际产出高，最优路径会容许较高储蓄和较快资本积累。但随着资本深化，$f'(k)$ 下降，Euler 方程要求消费增长放缓、投资率下降。若实际投资率长期维持过高，就可能意味着政策扭曲、金融抑制、地方政府激励或预期偏差，而不仅是“耐心”。

第二，人口老龄化改变有效劳动单位资本动态。人口增长率 n 下降会改变稀释项 $(n+g+\delta)k$，短期内可能提高人均资本，但也会通过养老金、储蓄行为、劳动供给和财政约束影响消费路径。连续时间模型适合把这些慢变量放入同一动态系统。

第三，技术追赶可以看作另一个状态变量。若 A 不是外生增长，而由研发、引进、学习和组织资本积累决定，那么政策评价必须比较两类牺牲：今天少消费、多研发，换取未来更高 A；或者今天维持高投资，但技术状态改善不足。多状态 Hamiltonian 可以把这两种影子价值分开。

第四，碳约束和环境政策天然是连续时间问题。污染存量、能源资本和技术清洁度都具有状态变量特征。最优碳税不是某一年孤立的税率，而是一条路径：今天减排的边际成本，要和未来污染存量下降带来的福利收益比较。

B.14 常见错误

第一，把 current-value Hamiltonian 写成 $u(c)+\mu\dot{k}$，却使用现值协态方程。这会漏掉 $\rho\lambda$ 项。

第二，只写 Euler 方程，不写资源约束。Euler 方程决定消费增长率，资源约束决定资本如何变；二者缺一不可。

第三，把横截条件理解成资本长期为零。横截条件约束的是折现影子价值和状态变量的乘积。

第四，看到 $\dot{c}=0$ 就以为消费不增长。在含技术进步的有效劳动单位模型中，c 不增长并不意味着人均消费不增长。

第五，把鞍路径稳定说成“模型稳定”。准确地说，系统有稳定方向和不稳定方向；只有跳跃变量选对，路径才稳定。

第六，HJB 方程中忘记状态转移项。若模型有多个状态变量，每个状态的运动都必须乘以对应的边际价值。

B.15 英文术语表

表 B.5: 连续时间增长与最优控制术语

英文术语	中文解释
Present-value Hamiltonian	现值 Hamiltonian；用从初始时点折现后的效用单位评价状态价值。
Current-value Hamiltonian	当前值 Hamiltonian；用当前时点效用单位评价状态价值，增长模型最常用。
Costate variable	协态变量；状态变量的影子价格或边际价值。

英文术语	中文解释
Transversality condition	横截条件；排除无浪费、泡沫式或不可持续路径的长期边界条件。
Saddle path	鞍路径；通向稳态的一维稳定路径。
Stable manifold	稳定流形；使动态系统收敛到稳态的初始点集合。
Jump variable	跳跃变量；可以在初始时点自由选择的控制或价格变量。
Hamilton–Jacobi–Bellman equation	HJB 方程；连续时间动态规划的 Bellman 方程。
Envelope condition	包络条件；值函数或 Hamiltonian 对状态变量的边际关系。
Shooting method	射击法；猜测跳跃变量并模拟动态系统以满足边界条件的数值方法。

B.16 本附录 Review

这一附录是否真正掌握，可以从五个方面检查。

第一，能否给定一个连续时间最优增长问题，准确写出现值 Hamiltonian、当前值 Hamiltonian，并说明两个协态变量之间的关系。

第二，能否从 $u'(c)=\lambda$ 和协态方程一步一步推出 Euler 方程，而不是直接背结论。

第三，能否解释横截条件的经济含义：它排除的是有价值资产被无限期浪费、不可持续资产泡沫和错误动态路径。

第四，能否对 Ramsey 二维系统线性化，写出 Jacobian，并用行列式符号说明为什么稳态是鞍点。

第五，能否把 HJB 方程中的 $V'(k)$ 解释为资本影子价值，并说明它如何与 Hamiltonian 中的 λ 对应。

B.17 核心文献

连续时间最优增长的经典起点是 Ramsey 的最优储蓄问题 [Ramsey, 1928]，现代增长教材可读 [Barro and Sala-i Martin, 2004, Acemoglu, 2009, Romer, 2019]。最优控制原理的数学基础来自 [Pontryagin et al., 1962]，经济学中系统学习可参考 [Kamien and Schwartz, 2012]。递归方法和动态规划背景可与

[Bellman, 1957, Stokey et al., 1989, Ljungqvist and Sargent, 2018] 一起阅读。附录 A 处理离散时间随机递归方法，本附录则提供连续时间 Hamiltonian 与 HJB 工具，两者共同构成高级增长理论的技术底座。

附录 C　异质性主体、不完全市场与分布动态

第 16 章已经把代表性家庭模型推进到异质性、借贷约束和 Aiyagari 思路。本附录继续往前走：把这些对象写成完整的递归竞争均衡，并说明在 PhD 宏观增长课程和现代定量论文中，异质性主体模型究竟在求解什么。

代表性家庭模型把经济状态压缩为一个总量资本 K 或人均资本 k。这在很多问题上很有力：它让我们看清资本积累、跨期替代和稳态回报。但一旦市场不完全，平均数就不够了。两个经济体可以有相同的平均资产，却有完全不同的边际消费倾向、预防性储蓄、创业机会和危机脆弱性。若一半家庭没有流动资产，另一半家庭持有大量资产，平均财富并不能告诉我们总需求、风险分担和投资机会如何变化。

异质性主体模型的核心变化，是把分布本身变成状态变量。家庭状态不再只是“代表性家庭拥有多少资本”，而是每个家庭处在什么资产、收入、年龄、生产率或约束状态。宏观价格由总体资本和劳动决定，个体决策又决定未来分布，未来分布再决定宏观价格。这个循环，是现代不完全市场宏观和增长模型的骨架。

C.1　学习目标

读完本附录，你应该能够掌握六件事。

第一，能够说明为什么完全市场或代表性家庭假设会消除分布的重要性，而不完全市场会使财富分布成为总量状态。

第二，能够写出 Bewley–Huggett–Aiyagari 型家庭递归问题，包括资产状态、收入状态、借贷下限、Bellman 方程和 Euler 不等式。

第三，能够定义 stationary recursive competitive equilibrium，包括家庭最优、企业最优、资产市场清算和分布不动点。

第四，能够理解分布转移算子和不变分布：个体不断移动，但总体分布在稳态中保持不变。

第五，能够解释为什么 idiosyncratic 风险和借贷约束会提高预防性储蓄、压低均衡利率，同时又可能降低资源配置效率。

第六，能够把这一工具用于中国与发展问题：高储蓄、住房抵押、社会保险、民营企业融资、创业门槛和财富分布。

C.2 从代表性家庭到分布状态

在代表性家庭模型中，家庭预算约束通常写成

$$c_t + k_{t+1} = w_t + r_t k_t + (1-\delta)k_t. \tag{C.1}$$

若所有家庭完全相同，或者完全市场使个体风险被完全保险，那么我们只需要追踪总消费和总资本。家庭之间的资产分布不会影响总量结果，因为边际消费和储蓄行为可以被一个代表性 Euler 方程概括。

不完全市场中，这个压缩失败。家庭有不同资产 a 和劳动效率 e，预算约束变成

$$c + a' = we + (1+r)a, \qquad a' \geq \underline{a}. \tag{C.2}$$

如果某些家庭靠近借贷下限 $\underline{a}$，它们的消费会强烈受当前收入影响；若另一些家庭资产充足，它们能更平滑消费。于是，同一个平均资产水平可以对应完全不同的总消费反应。宏观状态必须包含分布：

$$\Gamma(a, e).$$

这就是异质性主体模型和代表性家庭模型的根本区别。

表 C.1: 代表性家庭模型与异质性主体模型的状态变量

模型	状态变量	能回答的问题
代表性家庭	总资本 K 或人均资本 k	储蓄、资本积累、稳态回报、平衡增长
异质性主体	分布 $\Gamma(a,e)$ 与总量 K	预防性储蓄、财富分布、借贷约束、风险分担、总量波动

表 C.1 不是说代表性家庭模型错，而是说它回答的是另一类问题。若研究资本回报和长期增长的一阶逻辑，代表性家庭模型很有用；若研究高储蓄为什么和融资约束并存，或为什么同样的政策冲击对低资产家庭影响更大，就必须追踪分布。

C.3 家庭递归问题

考虑一个无限期经济。家庭具有相同偏好，但面临不同的个体劳动效率冲击。偏好为

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t), \qquad 0 < \beta < 1, \tag{C.3}$$

其中 $u'(c)>0$、$u''(c)<0$。劳动效率 e_t 在有限集合

$$\mathcal{E}=\{e_1,\dots,e_M\}$$

中取值，并按照 Markov 转移矩阵 Π 演化：

$$\Pr(e_{t+1}=e_j\mid e_t=e_i)=\Pi_{ij}. \tag{C.4}$$

家庭持有一期期限的无风险资产 a，价格由利率 r 给出。给定工资 w 和利率 r，家庭问题为

$$V(a,e)=\max_{c,a'}\left\{u(c)+\beta\sum_{e'}\Pi(e,e')V(a',e')\right\} \tag{C.5}$$

subject to

$$c+a'=we+(1+r)a, \tag{C.6}$$

$$a'\geq \underline{a}, \tag{C.7}$$

$$c\geq 0. \tag{C.8}$$

把预算约束代入 Bellman 方程，可以写成单一选择变量形式：

$$V(a,e)=\max_{\underline{a}\leq a'\leq we+(1+r)a}\left\{u(we+(1+r)a-a')+\beta\sum_{e'}\Pi(e,e')V(a',e')\right\}. \tag{C.9}$$

这个式子看起来和附录 A 的随机增长 Bellman 方程很像。差别在于，附录 A 的状态是总量资本和生产率，选择是明天总量资本；这里的状态是个体资产和个体收入，选择是明天个体资产。总量资本不是某一个家庭的状态，而是整个分布加总出来的结果。

C.4 借贷下限：自然限制与制度限制

资产下限 $\underline{a}$ 可以来自两种来源。第一种是自然借贷限。若家庭在最坏状态下仍必须能偿还债务，那么借款不能超过未来最低收入的现值。若最低劳动效率为 $e_{\min}$，且 $r>0$，自然借贷限可写为

$$\underline{a}^{nat}=-\frac{we_{\min}}{r}. \tag{C.10}$$

这表示即使家庭永远处于最低收入状态，也能用未来工资偿还债务。

第二种是制度性借贷限：

$$\underline{a}>\underline{a}^{nat}. \tag{C.11}$$

它可能来自抵押品不足、信用记录缺失、金融机构风险控制、法律执行成本或户籍与社保制度。发展经济和中国经济中最常见的约束往往是这种制度性约束：家庭或企业在现值上有偿还能力，但金融系统无法可信地把未来收入变成当前资金。

C.5 Euler 不等式与约束乘子

为了看清约束如何改变跨期选择，对问题 (C.5)–(C.7) 写出一阶条件。设最优政策为

$$a' = g(a, e), \qquad c = h(a, e).$$

若借贷约束不绑定，Euler 方程为

$$u'(h(a,e)) = \beta(1+r)\sum_{e'} \Pi(e,e')u'(h(g(a,e),e')). \tag{C.12}$$

若约束可能绑定，则应写成 Euler 不等式：

$$u'(h(a,e)) \geq \beta(1+r)\sum_{e'} \Pi(e,e')u'(h(g(a,e),e')), \tag{C.13}$$

且当 $g(a,e) > \underline{a}$ 时等号成立。

命题 C.1 (不完全市场中的 Euler 不等式). *设家庭问题 (C.5)–(C.7) 有内部消费解，且资产下限为 $a' \geq \underline{a}$。则最优政策满足 (C.13)。若约束不绑定，Euler 等式成立；若约束绑定，当前边际效用大于按市场利率折现后的未来预期边际效用。*

证明. 把预算约束代入目标函数，并令 $\eta(a,e) \geq 0$ 为约束 $a' - \underline{a} \geq 0$ 的乘子。对 a' 的一阶条件可以写成

$$-u'(c) + \beta\sum_{e'} \Pi(e,e')V_a(a',e') + \eta(a,e) = 0.$$

由包络条件，

$$V_a(a,e) = (1+r)u'(h(a,e)).$$

将下一期包络条件代入一阶条件，得到

$$u'(h(a,e)) = \beta(1+r)\sum_{e'} \Pi(e,e')u'(h(a',e')) + \eta(a,e).$$

由于 $\eta(a,e) \geq 0$，Euler 不等式成立。互补松弛条件为

$$\eta(a,e)[a' - \underline{a}] = 0.$$

若 $a' > \underline{a}$，则 $\eta(a,e) = 0$，Euler 等式成立；若 $a' = \underline{a}$ 且约束绑定，则 $\eta(a,e) > 0$，不等式严格。 □

这个命题是异质性主体宏观的入口。代表性家庭模型中的 Euler 方程是一个等式；不完全市场中，许多家庭处在 Euler 不等式上。政策若只看平均利率和平均消费，很容易忽略这些约束家庭的高边际效用。

C.6　预防性储蓄与边际效用风险

为什么收入风险会提高储蓄？直觉是，未来低收入状态会使消费低、边际效用高。若家庭无法保险这种风险，就会今天多储蓄，以便未来坏状态下不至于消费过低。

这个机制可以用 Jensen 不等式说明。设未来消费 c' 是随机变量，均值为 $\bar{c}$。若边际效用 $u'(c)$ 是凸函数，即 $u'''(c) > 0$，则

$$\mathbb{E}[u'(c')] \geq u'(\mathbb{E}[c']) = u'(\bar{c}). \tag{C.14}$$

未来边际效用的期望越高，Euler 方程右边越大。为了重新平衡跨期边际效用，家庭会降低当前消费、提高当前储蓄。这就是预防性储蓄。

预防性储蓄不是“家庭更耐心”。贴现因子 β 没有变，变的是未来边际效用的风险分布。它也不是“风险一定促进增长”。风险可能提高缓冲资产需求，从而提高总资产供给；但如果风险同时降低投资或创业，增长效果可能为负。

C.7　企业与价格

为了把家庭放入一般均衡，引入竞争性企业。企业生产函数为

$$Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{C.15}$$

企业租用资本和有效劳动，利润最大化给出

$$r = \alpha \left(\frac{K}{L} \right)^{\alpha - 1} - \delta, \tag{C.16}$$

$$w = (1-\alpha) \left(\frac{K}{L} \right)^{\alpha}. \tag{C.17}$$

在代表性家庭模型中，K 通常由一个家庭的资产选择代表。在异质性主体模型中，K 来自全体家庭资产的加总：

$$K = \int a \, d\Gamma(a, e). \tag{C.18}$$

这里 Γ 是资产和劳动效率的联合分布。

C.8　分布转移算子

给定政策函数 $g(a, e)$ 和收入转移矩阵 Π，当前分布 Γ 会生成下一期分布 Γ'。对任意状态集合 $B \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{E}$，定义分布转移算子 $\mathcal{T}_g$：

$$\Gamma'(B) = (\mathcal{T}_g \Gamma)(B) = \int \sum_{e'} \mathbf{1}\{(g(a,e), e') \in B\} \Pi(e, e') \, d\Gamma(a, e). \tag{C.19}$$

稳态分布是不动点：

$$\Gamma = \mathcal{T}_g \Gamma. \tag{C.20}$$

这句话容易被误读。稳态分布不意味着每个家庭的状态不变。事实上，个体收入和资产一直在变：有人失业，有人就业，有人储蓄，有人动用资产。稳态的意思是，总体上处在每个状态区域中的人口比例保持不变。

C.9 递归稳态竞争均衡

现在可以给出完整定义。

定义 C.1 (不完全市场递归稳态竞争均衡). 给定偏好、收入过程、生产函数和借贷下限，一个 *stationary recursive competitive equilibrium* 由价格 (r, w)、价值函数 $V(a, e)$、政策函数 $g(a, e)$、消费函数 $h(a, e)$、总量 (K, L) 和分布 Γ 构成，满足：

1. 给定 (r, w)，V 解家庭 *Bellman* 方程 (C.5)，g 和 h 为最优政策。
2. 给定 (K, L)，企业利润最大化，价格满足 (C.16)–(C.17)。
3. 资产市场清算：
$$K = \int g(a, e)\, d\Gamma(a, e). \tag{C.21}$$
4. 劳动市场清算：
$$L = \int e\, d\Gamma(a, e). \tag{C.22}$$
5. 分布不变：
$$\Gamma = \mathcal{T}_g \Gamma. \tag{C.23}$$

这个定义看起来长，但每一项都有直觉。家庭最优化给出个体行为；企业最优化给出价格；市场清算把个体资产加总成资本；分布不动点保证家庭今天的行为和明天的总体分布一致。若缺少任何一项，模型都不是一般均衡。

C.10 均衡利率：资产供给曲线与资本需求曲线

理解 Aiyagari 均衡最好的图形直觉，是把它看成资产供给和资本需求的交点。

给定利率 r，企业资本需求由 (C.16) 决定。若劳动归一化为 $L = 1$，则

$$K^d(r) = \left(\frac{\alpha}{r + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{C.24}$$

利率越高，企业愿意使用的资本越少。

另一方面，给定 r 和由企业条件 implied 的工资 $w(r)$，家庭问题产生政策函数和稳态分布，从而得到资产供给

$$K^s(r) = \int g_r(a,e)\, d\Gamma_r(a,e). \tag{C.25}$$

均衡满足

$$K^s(r) = K^d(r). \tag{C.26}$$

代表性家庭模型中，利率由 Euler 方程直接钉住，例如 $1 = \beta(1+r)$。Aiyagari 模型中，利率由整个资产分布的储蓄供给和企业资本需求共同决定。风险更高、借贷约束更紧时，家庭可能多持有缓冲资产，使 $K^s(r)$ 右移，均衡利率下降。

C.11 一个数值例子：风险、约束和资本供给

下面的表不是完整求解结果，而是用来建立量级直觉。设企业参数为

$$\alpha = 0.33, \qquad \delta = 0.08.$$

若均衡利率分别为 4%、3% 和 2%，企业资本需求由 (C.24) 给出。

表 C.2: 利率下降如何提高企业资本需求

r	$r+\delta$	$K^d(r)$	经济含义
0.04	0.12	4.51	较高回报，资本需求较低
0.03	0.11	5.14	家庭资产供给提高，利率下降
0.02	0.10	5.99	资本更便宜，企业使用更多资本

表 C.2 说明了 Aiyagari 机制的总量含义。个体风险和借贷约束可能提高家庭资产供给，推动利率下降；较低利率又使企业愿意使用更多资本。于是，不完全市场可能导致比代表性家庭模型更高的资本存量。但这并不自动代表福利更高，因为家庭多储蓄是为了自我保险，而不是因为社会层面需要更多资本。

C.12 过度储蓄与配置低效可以并存

一个容易犯的错误，是把“预防性储蓄提高资本”理解成“金融约束有利于增长”。这不对。至少有三种机制会让过度储蓄和配置低效同时存在。

第一，家庭多储蓄可能只是因为保险不足。如果社会保险改善，家庭不必持有那么多低收益缓冲资产，福利反而提高。

第二，金融系统可能把储蓄配置给低生产率但有抵押品的主体。此时总储蓄很高，总投资也很高，但资本边际产出在企业间无法均等化。

第三，借贷约束会阻止高回报项目。年轻家庭教育投资、创业者进入、民营企业扩张都可能因为抵押不足而受限。这样，资本总量高并不保证 TFP 高。

这一区分对中国尤其重要。中国长期高储蓄、高投资和高信贷，不能自动推出金融配置有效。Aiyagari 机制解释为什么家庭可能愿意多储蓄；错配和融资约束机制解释为什么储蓄未必流向最高回报用途。

C.13　职业选择和创业门槛

不完全市场不仅影响消费平滑，也影响谁能成为企业家。设创业需要固定投资 I，个体财富为 a。金融机构最多允许借款

$$b \le \lambda a, \qquad \lambda \ge 0. \tag{C.27}$$

其中 λ 衡量金融系统把个人财富转化为外部融资的能力。创业可行条件为

$$a + b \ge I.$$

于是创业门槛为

$$a \ge \bar{a} = \frac{I}{1+\lambda}. \tag{C.28}$$

表 C.3: 抵押融资能力与创业门槛

λ	$\bar{a}$，设 $I=1$	解释
0.0	1.00	完全依靠自有财富
0.5	0.67	可借自有财富的一半
1.0	0.50	可借与自有财富等量资金
3.0	0.25	抵押和信用体系较强

表 C.3 的发展含义很强。若 λ 低，创业资格主要由初始财富决定，而不是由能力或项目生产率决定。这样，财富分布会影响职业分配，职业分配会影响生产率，生产率又影响下一代财富分布。增长路径因此可能出现持久差异。

C.14　算法：Aiyagari 模型如何求解

完整 Aiyagari 模型通常没有闭式解。标准求解流程如下。

1. 猜测利率 r，由企业条件得到资本需求 $K^d(r)$ 和工资 $w(r)$。
2. 给定 (r, w)，在资产网格和收入状态上求解家庭 Bellman 方程，得到政策函数 $g_r(a, e)$。
3. 给定政策函数，用分布转移算子 (C.19) 迭代，直到分布收敛到 Γ_r。
4. 计算资产供给：
$$K^s(r) = \int g_r(a, e)\, d\Gamma_r(a, e).$$
5. 比较 $K^s(r)$ 和 $K^d(r)$。若 $K^s(r) > K^d(r)$，说明利率太高或价格猜测不一致，需要调整 r；若 $K^s(r) < K^d(r)$，也相应更新。
6. 重复直到资产市场误差足够小：
$$|K^s(r) - K^d(r)| < \varepsilon.$$

这个流程和附录 A 的值函数迭代相连，但多了一个一般均衡外循环。附录 A 求的是给定环境下的个体或代表性主体最优政策；Aiyagari 模型还要求价格和分布同时自洽。

C.15 误差诊断

异质性主体模型的数值结果尤其需要诊断。至少应检查五类误差。

表 C.4: 异质性主体模型的误差诊断

诊断对象	检查内容	经济含义
Bellman 误差	值函数迭代是否收敛	个体最优化是否可信
Euler 误差	内点状态是否满足 Euler 方程	策略函数精度
市场清算误差	$\lvert K^s - K^d \rvert$ 是否足够小	一般均衡是否成立
分布误差	$\lVert \Gamma - \mathcal{T}_g \Gamma \rVert$ 是否足够小	稳态分布是否稳定
边界误差	最优资产是否频繁撞上网格上界	资产网格是否太窄

其中，边界误差经常被忽略。如果很多高收入家庭选择资产网格最高点，说明网格上界太低，模型人为截断了储蓄行为。若很多家庭卡在借贷下限，这可能是真实机制，也可能是借贷限设定过紧或收入过程校准有问题。数值模型不能只报告“算法收敛”，还要报告经济对象是否可信。

C.16 加入总量冲击：从 Aiyagari 到 Krusell–Smith

到目前为止，个体收入有风险，但总量环境固定。若加入总量生产率冲击 Z_t，企业生产函数变为

$$Y_t = Z_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}.$$

家庭状态至少包括 (a, e, Z, Γ)，因为价格取决于总量资本和分布。递归问题形式上写成

$$V(a, e, Z, \Gamma) = \max_{c, a'} \left\{ u(c) + \beta \mathbb{E}[V(a', e', Z', \Gamma') \mid e, Z] \right\}. \tag{C.29}$$

预算约束为

$$c + a' = w(Z, \Gamma) e + [1 + r(Z, \Gamma)] a.$$

难点在于 Γ 是无限维状态。Krusell–Smith 方法的核心近似，是假设家庭只需要用少数分布矩，比如总资本 K，就能很好预测未来价格：

$$\log K' = b_0(Z, Z') + b_1(Z, Z') \log K. \tag{C.30}$$

如果这个近似预测规则足够准确，模型就可以在有限维状态上求解。

这个扩展解释了为什么异质性主体模型非常计算密集。代表性家庭 RBC 模型的状态可能只有 (K, Z)；异质性主体模型的真实状态是整个分布。现代 HANK、异质性企业和金融摩擦模型，都是在处理这一困难的不同版本。

C.17 中国与发展延伸

异质性主体和不完全市场框架，对中国和发展经济问题尤其重要。

第一，高储蓄不等于高耐心。中国家庭储蓄可以部分来自收入风险、医疗教育支出、住房首付、养老压力和公共保险不足。若低资产家庭为了防风险而储蓄，宏观上会表现为高储蓄，但福利解释不同于“家庭偏好未来”。

第二，高信贷不等于无约束。一个经济体可以有很高的信贷/GDP，同时小微企业、年轻创业者或低抵押家庭仍受到融资限制。关键不是信贷总量，而是信贷是否按生产率和风险有效配置。

第三，住房改变分布动态。住房既是资产也是抵押品。拥有住房的家庭更容易借款和创业，没有住房的家庭更依赖工资收入和自我储蓄。房价上涨可能提高有房家庭抵押能力，也可能提高无房家庭进入门槛。

第四，教育融资约束会把家庭财富差异转化为人力资本差异。若教育回报高但融资不足，低财富家庭可能无法进行最优教育投资。这会影响长期收入分布和总量生产率。

第五，民营企业融资约束会造成资本错配。高生产率企业若缺少抵押或政策性信用支持，就无法扩张；低生产率但有担保的企业可能继续占用资本。增长损失不只来自资本总量不足，也来自资本配置错误。

C.18 政策含义

异质性主体模型给政策评价带来一个重要变化：同一政策对不同主体的边际价值不同。

降低利率可能刺激投资，但也可能降低依靠资产收入的老年家庭收入。扩大社保会降低预防性储蓄，提高当前消费，但可能改变资本积累。放松抵押约束会促进创业和教育投资，但也可能提高金融风险。房地产政策不仅影响房价，还影响抵押能力、财富分布和代际流动。

因此，政策评价不能只看平均 GDP 或平均资本。它还应看分布：谁受益、谁受损、约束是否缓解、风险是否转移、资源是否流向高回报用途。这正是异质性主体模型进入增长研究的原因。

C.19 常见错误

第一，把 Aiyagari 模型理解为“代表性家庭模型加一个收入冲击”。这不够。关键是分布不动点和一般均衡价格。

第二，把预防性储蓄提高资本理解为福利提高。多储蓄可能只是因为风险无法保险。

第三，只检查值函数收敛，不检查市场清算和分布收敛。异质性主体模型的均衡需要三者同时成立。

第四，把借贷下限设得很紧，却不解释其制度含义。借贷限不是纯技术参数，应有经济解释。

第五，把总量信贷高解释为融资约束消失。融资约束关心的是边际主体能否获得资金，而不是平均信贷规模。

C.20 英文术语表

表 C.5: 异质性主体与不完全市场术语

英文术语	中文解释
Heterogeneous agents	异质性主体；家庭或企业在资产、收入、生产率、年龄或约束上不同。
Incomplete markets	不完全市场；风险不能通过完整资产集合完全保险。

英文术语	中文解释
Idiosyncratic risk	个体风险；影响个体但在总量上可分散的收入或生产率风险。
Borrowing constraint	借贷约束；资产或债务选择受到下限限制。
Natural borrowing limit	自然借贷限；由未来最低可偿还收入决定的最大借款。
Precautionary saving	预防性储蓄；为应对未来风险而持有额外资产。
Stationary distribution	不变分布；个体状态持续转移但总体分布保持不变。
Recursive competitive equilibrium	递归竞争均衡；用状态、价值函数、政策函数、价格和分布描述的均衡。
Asset market clearing	资产市场清算；家庭资产供给等于企业资本需求。
Krusell–Smith method	Krusell–Smith 方法；用少数分布矩近似总量状态的异质性主体算法。
Euler error	Euler 误差；衡量策略函数是否满足跨期最优条件的误差。
Distribution operator	分布转移算子；由政策函数和冲击转移规则生成下一期分布的算子。

C.21 本附录 Review

这一附录的核心不是背 Aiyagari 模型的步骤，而是理解分布为什么成为宏观状态。

第一，你应该能从家庭 Bellman 方程 (C.5) 看出个体状态、控制变量和约束。资产 a 与收入 e 决定当前资源，选择 a' 决定未来缓冲能力。

第二，你应该能解释 Euler 不等式。若借贷约束绑定，家庭当前边际效用高于按市场利率折现的未来预期边际效用；这不是偏好异常，而是可行集被截断。

第三，你应该能定义不完全市场递归稳态竞争均衡。均衡必须同时满足家庭最优、企业最优、资产市场清算、劳动市场清算和分布不动点。

第四，你应该能说明预防性储蓄的机制：未来消费风险提高未来边际效用期望，家庭因此提高当前储蓄。但这不自动意味着福利提高。

第五，你应该能把模型用于中国和发展问题。高储蓄、高投资和高信贷都需要进一步分解：谁在储蓄，谁能借款，资金流向谁，哪些主体仍然被约束。

C.22　核心文献

不完全市场宏观的经典起点包括 [Bewley, 1977]、[Huggett, 1993] 和 [Aiyagari, 1994]。[Aiyagari, 1994] 是本附录最直接的模型来源，说明未保险个体风险和借贷约束如何影响总储蓄和均衡资本。职业选择、财富分布和发展路径的经典机制可读 [Banerjee and Newman, 1993]。递归方法和动态规划背景可参考 [Stokey et al., 1989, Ljungqvist and Sargent, 2018]。若把本附录与金融发展和企业融资约束结合，可回到第 35 章引用的 [Kiyotaki and Moore, 1997, Buera et al., 2011]。

附录 D　连续时间随机过程、Ito 引理与随机 HJB

附录 B 处理的是确定性连续时间：状态变量沿着微分方程运动，Hamiltonian 和 HJB 都只需要一阶导数。附录 C 处理的是不完全市场和分布动态：个体有风险，分布成为状态，但主要用离散时间递归语言来写。本附录把这两条线接起来：当状态变量在连续时间中随机运动时，增长模型应该怎样写？

这件事在现代增长和宏观中非常重要。生产率不是每年整齐地跳一次，创新不是确定地按计划到来，金融危机不是平滑变量，企业生产率和家庭收入也不会只按照确定性路径移动。连续时间随机方法让我们同时描述平滑积累和随机冲击：资本可以按投资慢慢积累，生产率可以受 Brownian shock 扰动，创新可以按 Poisson 到达，财富分布可以由漂移项和扩散项共同推动。更进一步，随机 HJB 和 Kolmogorov forward 方程提供了现代异质性主体模型、金融摩擦模型、长期风险模型和连续时间资产定价模型的共同语言。

本附录不是概率论教材。我们的目标更窄，也更贴近经济增长：让你能够读懂 PhD 宏观和增长论文中最常见的连续时间随机方程，知道每一项从哪里来，能把经济直觉、数学表达和计算对象对应起来。

D.1　学习目标

读完本附录，你应该能够做到七件事。

第一，区分确定性微分方程、Brownian 扩散过程和 Poisson 跳跃过程，知道它们分别适合描述哪类经济冲击。

第二，理解 Ito 引理为什么比普通链式法则多出一个二阶项，并能把它用于资本、生产率、财富和价值函数。

第三，写出 Markov diffusion 的 infinitesimal generator，并解释生成元为什么是连续时间 HJB 的核心对象。

第四，从动态规划思想推导随机 HJB，理解漂移项、扩散项和控制变量如何进入价值方程。

第五，写出 Kolmogorov forward equation，并理解它如何描述分布随时间演化。

第六，把 HJB 和 KFE 连接起来：一个描述个体最优决策，一个描述总体分布变化，二者合在一起就是连续时间异质性主体模型的骨架。

第七，把这些工具用于增长问题：技术冲击、创新到达、长期风险、财富分布、金融摩擦和中国经济中的不确定性与储蓄。

D.2 为什么增长模型需要连续时间随机过程

在确定性 Ramsey 模型中，资本满足

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - \delta k(t). \tag{D.1}$$

给定初始资本 $k(0)$ 和消费路径 $c(t)$，未来资本路径完全确定。这个设定适合研究储蓄、折旧、稳态和鞍路径，但它无法表达一个基本事实：长期增长是在不确定性中发生的。

若生产率有随机扰动，一个自然写法是

$$dA_t = \mu_A A_t \, dt + \sigma_A A_t \, dW_t, \tag{D.2}$$

其中 W_t 是 Brownian motion，μ_A 是平均增长率，σ_A 是波动强度。式 (D.2) 说的是：在一个很短的时间间隔 dt 内，生产率既有可预期的平均变化 $\mu_A A_t dt$，也有不可预期的随机变化 $\sigma_A A_t dW_t$。

若创新不是连续小波动，而是偶尔发生的大跳跃，可以写成

$$dA_t = gA_t \, dt + (q-1)A_{t-} \, dN_t, \tag{D.3}$$

其中 N_t 是强度为 λ 的 Poisson process。若在 dt 内没有创新到达，$dN_t = 0$；若创新到达，$dN_t = 1$，生产率从 A_{t-} 跳到 qA_{t-}。

这两类冲击对应不同经济问题。Brownian shock 适合描述大量小冲击的累积，例如企业生产率、宏观需求或金融条件的连续波动。Poisson shock 适合描述离散事件，例如重大创新、危机、技术采用、政策制度变化或违约。许多增长论文会同时使用二者：

$$dx_t = b(x_t, a_t) \, dt + \sigma(x_t, a_t) \, dW_t + j(x_{t-}, a_t) \, dN_t. \tag{D.4}$$

这里 x_t 是状态，a_t 是控制，b 是漂移，σ 是扩散，j 是跳跃幅度。理解 (D.4)，就掌握了连续时间随机增长模型的大半语言。

表 D.1 的最后两行最容易被忽视。生成元看的是一个家庭、企业或经济体从当前状态出发，价值函数在瞬间如何变化；KFE 看的是一大群主体的状态分布如何随时间流动。前者是个体最优，后者是总体分布。

D.3 Brownian motion：连续小冲击的极限

Brownian motion W_t 是连续时间随机模型中最常见的基础过程。直觉上，它可以看成许多极小、独立、均值为零的冲击在连续时间极限下的累积。

表 D.1: 连续时间随机对象与经济含义

数学对象	典型表达	经济含义
漂移项	$b(x,a)dt$	可预期的平均变化，如资本积累、平均技术进步
Brownian shock	$\sigma(x,a)dW_t$	高频小冲击的累积，如生产率和金融条件波动
Poisson shock	$j(x,a)dN_t$	低频离散事件，如创新、危机、制度变化
生成元	$\mathcal{L}^a V$	当前状态下价值函数的瞬时预期变化
KFE	$\partial_t m = -\partial_x(bm) + \frac{1}{2}\partial_{xx}(\sigma^2 m)$	分布如何随个体状态运动而变化

定义 D.1 (Brownian motion). 随机过程 $\{W_t\}_{t\geq 0}$ 称为标准 *Brownian motion*，若满足：

1. $W_0 = 0$；
2. 对任意 $0 \leq s < t$，增量 $W_t - W_s$ 服从正态分布 $N(0, t-s)$；
3. 不重叠时间区间上的增量相互独立；
4. 路径连续。

这个定义有一个非常重要的尺度含义：

$$dW_t \sim N(0, dt). \tag{D.5}$$

因此 dW_t 的典型大小不是 dt，而是 $\sqrt{dt}$。这会导致一个在普通微积分中不存在的事实：

$$(dW_t)^2 \approx dt. \tag{D.6}$$

这句话不是严格代数等式，而是 Ito calculus 的记账规则。它的经济含义是：一阶随机冲击的均值为零，但它的方差在一阶时间量级上累积。长期增长中的风险溢价、预防性储蓄和随机 HJB 的二阶项都来自这个事实。

一个最常见的过程是 geometric Brownian motion：

$$dA_t = \mu A_t\, dt + \sigma A_t\, dW_t. \tag{D.7}$$

普通直觉可能会说 $\log A_t$ 的增长率就是 μ。但 Ito 引理告诉我们不是这样：

$$d\log A_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t. \tag{D.8}$$

这就是随机增长中最早需要警惕的地方：水平变量的平均增长率和对数变量的平均增长率不同，差额为 $\frac{1}{2}\sigma^2$。

D.4 Ito 引理：随机链式法则

设状态变量满足

$$dx_t = b(x_t, t)\,dt + \sigma(x_t, t)\,dW_t. \tag{D.9}$$

若 $F(x,t)$ 足够光滑，我们想知道 $F(x_t,t)$ 如何变化。普通链式法则会写成

$$dF = F_t\,dt + F_x\,dx.$$

但由于 $(dW_t)^2$ 是 dt 量级，二阶项不能丢掉。

命题 D.1 (Ito 引理，一维情形). *若 x_t 满足 (D.9)，且 $F(x,t)$ 对 t 一阶连续可微、对 x 二阶连续可微，则*

$$dF(x_t,t) = \left[F_t(x_t,t) + b(x_t,t)F_x(x_t,t) + \frac{1}{2}\sigma^2(x_t,t)F_{xx}(x_t,t)\right]dt + \sigma(x_t,t)F_x(x_t,t)dW_t. \tag{D.10}$$

证明. 对 $F(x_t,t)$ 做二阶 Taylor 展开：

$$dF = F_t\,dt + F_x\,dx + \frac{1}{2}F_{xx}(dx)^2 + \text{higher order terms}. \tag{D.11}$$

由 $dx = b\,dt + \sigma\,dW_t$，

$$(dx)^2 = b^2(dt)^2 + 2b\sigma\,dt\,dW_t + \sigma^2(dW_t)^2.$$

在 Ito 记账中，$(dt)^2$ 和 $dt\,dW_t$ 是比 dt 更小的量，可以忽略；而 $(dW_t)^2$ 留下 dt。因此

$$(dx)^2 = \sigma^2 dt.$$

代回 (D.11)，得到 (D.10)。 □

证明中的关键不是 Taylor 展开本身，而是量级判断。Brownian shock 的路径虽然连续，却具有非零 quadratic variation；正是这个性质使随机链式法则多出二阶项。

D.4.1 例子：对数生产率

令 $F(A) = \log A$，且 A_t 满足 (D.7)。有

$$F_A = \frac{1}{A}, \qquad F_{AA} = -\frac{1}{A^2}.$$

代入 Ito 引理：

$$\begin{aligned} d\log A_t &= \left[\mu A_t \frac{1}{A_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 A_t^2 \left(-\frac{1}{A_t^2}\right)\right] dt + \sigma A_t \frac{1}{A_t} dW_t \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t. \end{aligned} \tag{D.12}$$

表 D.2 给出一个简单数值例子。若水平生产率的漂移 $\mu = 2.5\%$，波动率越高，对数平均增长率越低。这不是说风险一定降低福利，而是说在对数转换下，随机波动会通过 Ito 修正改变平均增长率。

表 D.2: GBM 中水平漂移和对数漂移的差异

μ	σ	$\frac{1}{2}\sigma^2$	$E[d\log A_t]/dt$
2.5%	5%	0.125%	2.375%
2.5%	10%	0.500%	2.000%
2.5%	20%	2.000%	0.500%

D.5 生成元：连续时间动态规划的发动机

对扩散过程

$$dx_t = b(x_t, a_t)\, dt + \sigma(x_t, a_t)\, dW_t,$$

定义生成元

$$\mathcal{L}^a V(x) = b(x,a)V_x(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x,a)V_{xx}(x). \tag{D.13}$$

它有一个非常清楚的含义：

$$\mathcal{L}^a V(x) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}[V(x_{t+\Delta t}) \mid x_t = x, a_t = a] - V(x)}{\Delta t}. \tag{D.14}$$

也就是说，生成元是价值函数的瞬时预期变化率。

命题 D.2 (生成元与 Ito 引理). *若 V 不显含时间且 x_t 满足扩散过程，则*

$$\mathbb{E}[dV(x_t) \mid x_t = x, a_t = a] = \mathcal{L}^a V(x)\, dt. \tag{D.15}$$

证明. 由 Ito 引理，

$$dV(x_t) = \left[b(x_t,a_t)V_x(x_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(x_t,a_t)V_{xx}(x_t)\right] dt + \sigma(x_t,a_t)V_x(x_t)dW_t.$$

条件在 $x_t = x$ 和 $a_t = a$ 上取期望。由于 $\mathbb{E}[dW_t] = 0$，随机项的条件期望为零，剩下的漂移项正是 (D.13)。 □

这个命题解释了为什么随机 HJB 中会出现 $\frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx}$。它不是随手加上的风险项，而是价值函数在随机状态运动下的二阶曲率效应。若 V 是凹的，$V_{xx} < 0$，风险会降低预期价值；若某个对象的价值函数局部凸，风险反而可能提高其期望价值。这一点在技术采用、创业选择和金融期权价值中很重要。

D.6 随机 HJB：带扩散风险的最优增长

考虑一个社会计划者或代表性家庭问题。状态 k_t 满足

$$dk_t = [f(k_t) - c_t - \delta k_t]\,dt + \sigma k_t\,dW_t, \tag{D.16}$$

目标是

$$\max_{\{c_t\}} \mathbb{E}_0 \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c_t)\,dt. \tag{D.17}$$

这里的 $\sigma k_t dW_t$ 可以理解为资本有效使用效率、灾害风险、金融条件或总生产率冲击对可积累资源的影响。

设值函数为 $V(k)$。在一个很短的时间 dt 内，动态规划原理写成

$$V(k) = \max_c \left\{ u(c)dt + e^{-\rho dt}\mathbb{E}[V(k + dk)] \right\}. \tag{D.18}$$

对 $e^{-\rho dt}$ 使用近似 $1 - \rho dt$，并用生成元展开 $\mathbb{E}[V(k + dk)]$，整理得到随机 HJB：

$$\rho V(k) = \max_c \left\{ u(c) + [f(k) - c - \delta k]\,V_k(k) + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 V_{kk}(k) \right\}. \tag{D.19}$$

与确定性 HJB 相比，唯一新增项是

$$\frac{1}{2}\sigma^2 k^2 V_{kk}(k).$$

但这个项的经济含义很深。若 V 对资本凹，随机资本冲击降低价值。于是社会计划者可能更愿意多储蓄，以缓冲风险；若存在不可逆投资或进入选择，某些状态下价值函数可能有凸性，风险会增加等待或选择权价值。

消费的一阶条件仍然是

$$u'(c) = V_k(k). \tag{D.20}$$

因此随机 HJB 没有改变“边际效用等于资本边际价值”这一核心逻辑；它改变的是资本边际价值本身，因为 V 必须同时反映平均回报和风险暴露。

D.7 随机 Euler 方程与风险调整

随机 HJB 也可以推出 Euler 方程。为了看清风险如何进入跨期选择，令 $u(c) = \log c$，并假设最优消费率可写成 $c_t = \chi k_t$。资本过程变成

$$\frac{dk_t}{k_t} = \left[\frac{f(k_t)}{k_t} - \chi - \delta \right] dt + \sigma dW_t. \tag{D.21}$$

表 D.3: 确定性 HJB 与随机 HJB 的比较

对象	确定性 HJB	随机 HJB
状态方程	$dk = b(k,c)dt$	$dk = b(k,c)dt + \sigma(k,c)dW_t$
价值变化	bV_k	$bV_k + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{kk}$
风险角色	无直接风险项	由价值函数曲率决定风险价值
一阶条件	$u'(c) = V_k$	$u'(c) = V_k$

如果是 AK 技术 $f(k) = Ak$，则

$$\frac{dk_t}{k_t} = (A - \delta - \chi)dt + \sigma dW_t. \tag{D.22}$$

对数资本增长为

$$d\log k_t = \left(A - \delta - \chi - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t. \tag{D.23}$$

如果消费与资本同比例，消费的对数增长也受到同样的 Ito 修正。

这说明在随机环境中，“高平均回报”不等于“高对数增长”。长期福利特别关心消费路径的对数或凹效用；波动率上升会通过 Jensen 效应降低确定等价增长率。表 D.4 用一个 AK 例子说明。设 $A - \delta - \chi = 3\%$，则波动率越高，对数资本的预期增长越低。

表 D.4: 随机 AK 模型中的风险调整对数增长

$A - \delta - \chi$	σ	$-\frac{1}{2}\sigma^2$	$E[d\log k_t]/dt$
3.0%	5%	−0.125%	2.875%
3.0%	10%	−0.500%	2.500%
3.0%	20%	−2.000%	1.000%

这个表不应被读成“波动永远坏”。如果风险伴随更高平均回报或带来创新选择权，总效应可能为正。但它提醒我们：在增长模型中比较政策时，不能只看平均增长率，还要看波动和风险暴露。

D.8 Poisson 过程：创新、危机与离散跳跃

Brownian motion 描述连续小冲击。许多增长问题则更像离散事件：一个新技术平台出现，一项关键制度改革发生，一个企业违约，一次金融危机爆发。Poisson process 是描述这类事件的基本工具。

定义 D.2 (Poisson process). 计数过程 $\{N_t\}_{t\geq 0}$ 是强度为 $\lambda > 0$ 的 *Poisson process*，若在很短时间 dt 内

$$\Pr(dN_t = 1) = \lambda dt + o(dt), \tag{D.24}$$

$$\Pr(dN_t = 0) = 1 - \lambda dt + o(dt), \tag{D.25}$$

$$\Pr(dN_t \geq 2) = o(dt). \tag{D.26}$$

若创新到达使技术质量乘以 $q > 1$，则

$$d\log A_t = g\,dt + \log(q)\,dN_t. \tag{D.27}$$

于是

$$\mathbb{E}[d\log A_t]/dt = g + \lambda\log(q). \tag{D.28}$$

这就是 Schumpeterian 模型中常见的增长率公式：创新强度 λ 越高、每次创新质量提升 q 越大，平均技术增长越快。

若状态既有扩散又有跳跃，且跳跃后从 x 变为 $x + j(x,a)$，生成元变成

$$\mathcal{L}^a V(x) = b(x,a)V_x(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x,a)V_{xx}(x) + \lambda(x,a)\left[V(x + j(x,a)) - V(x)\right]. \tag{D.29}$$

最后一项的含义很直接：跳跃以强度 λ 到达，一旦到达，价值从 $V(x)$ 变为 $V(x+j)$。因此跳跃对价值的瞬时贡献是到达率乘以价值差。

D.8.1 创新强度选择

考虑一家垄断中间品企业选择研发强度 z。创新以强度 λz 到达，若创新成功，企业价值从 V 跳到 $\bar{V}$。研发成本为 $\psi z^2/2$。企业的 HJB 可写成

$$rV = \max_{z\geq 0}\left\{\pi - \frac{\psi}{2}z^2 + \lambda z(\bar{V} - V)\right\}. \tag{D.30}$$

一阶条件为

$$\psi z = \lambda(\bar{V} - V), \qquad z^* = \frac{\lambda}{\psi}(\bar{V} - V). \tag{D.31}$$

这个式子把创新政策的几个机制说得很清楚。提高成功概率参数 λ、扩大创新后的价值增量 $\bar{V} - V$、降低研发成本 ψ，都会提高研发强度。但如果市场结构让创新后的价值增量过小，或者融资摩擦提高有效研发成本，创新强度会下降。

表 D.5 的最后一列是实际创新到达率 λz^*。它说明创新政策不能只看研发投入，也要看投入转化为成功到达的技术环境。若科研制度、人才配置或知识产权环境使 λ 很低，单纯补贴 z 可能效果有限；若金融约束使 ψ 很高，企业即便面对高回报也可能研发不足。

表 D.5: Poisson 创新模型中的研发强度

λ	ψ	$\bar{V}-V$	z^*	λz^*
0.20	2.0	4.0	0.40	0.080
0.30	2.0	4.0	0.60	0.180
0.20	4.0	4.0	0.20	0.040
0.20	2.0	2.0	0.20	0.040

D.9 Kolmogorov forward equation：分布如何流动

随机 HJB 描述单个主体在给定状态下如何最优选择。若经济中有很多主体，每个主体的状态都按某个随机过程运动，我们还需要描述总体分布如何变化。这就是 Kolmogorov forward equation，也常被称为 Fokker–Planck equation。

设个体状态 a_t 满足

$$da_t = s(a_t)\,dt + \sigma(a_t)\,dW_t, \tag{D.32}$$

其中 $s(a)$ 可以理解为储蓄漂移。令 $m(a,t)$ 表示时点 t 的资产密度。则分布满足

$$\frac{\partial m(a,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial a}\left[s(a)m(a,t)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left[\sigma^2(a)m(a,t)\right]. \tag{D.33}$$

这个方程可以逐项解释。第一项

$$-\frac{\partial}{\partial a}[s(a)m(a,t)]$$

是漂移带来的流量。如果某个资产区间内的家庭储蓄为正，它们会向右移动；若储蓄为负，它们会向左移动。第二项

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}[\sigma^2(a)m(a,t)]$$

是扩散带来的分散。即使平均储蓄为零，个体风险也会把密度向周围扩散。

稳态分布满足

$$0 = -\frac{d}{da}\left[s(a)m(a)\right] + \frac{1}{2}\frac{d^2}{da^2}\left[\sigma^2(a)m(a)\right]. \tag{D.34}$$

这就是连续时间财富分布模型的核心分布方程。

命题 D.3 (KFE 的质量守恒). *若边界上没有净概率流出，即 probability flux 在边界为零，则 (D.33) 保持总质量：*

$$\frac{d}{dt}\int_{\underline{a}}^{\bar{a}} m(a,t)\,da = 0.$$

证明. 对 (D.33) 在 $[\underline{a},\bar{a}]$ 上积分：

$$\frac{d}{dt}\int_{\underline{a}}^{\bar{a}} m(a,t)\,da = -\int_{\underline{a}}^{\bar{a}} \frac{\partial}{\partial a}[s(a)m(a,t)]\,da + \frac{1}{2}\int_{\underline{a}}^{\bar{a}} \frac{\partial^2}{\partial a^2}[\sigma^2(a)m(a,t)]\,da.$$

用微积分基本定理，右边变为边界项：

$$-[s(a)m(a,t)]_{\underline{a}}^{\bar{a}} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial a}(\sigma^2(a)m(a,t))\right]_{\underline{a}}^{\bar{a}}.$$

这正是边界 probability flux 的差。若边界没有净流出，则该项为零，总质量守恒。 □

这个命题虽然简单，但在数值计算中极其重要。若离散化后的 KFE 不守恒，模拟出来的家庭总质量会慢慢不是 1，任何财富分布和总量资本结果都会失真。

D.10 连续时间异质性主体模型的骨架

现在把附录 C 的不完全市场思想改写成连续时间。家庭资产 a 和收入状态 e 构成个体状态。收入状态可以是有限状态 Markov chain，转移强度矩阵为 $\Lambda = (\lambda_{ee'})$。家庭选择消费 c，资产漂移为

$$\dot{a} = we + ra - c. \tag{D.35}$$

借贷约束为 $a \geq \underline{a}$。给定工资 w 和利率 r，家庭 HJB 为

$$\rho V(a,e) = \max_c \left\{ u(c) + (we + ra - c)V_a(a,e) + \sum_{e' \neq e} \lambda_{ee'}[V(a,e') - V(a,e)] \right\}. \tag{D.36}$$

消费一阶条件为

$$u'(c(a,e)) = V_a(a,e), \tag{D.37}$$

只要借贷约束不绑定。约束绑定时，消费不能让资产漂移穿过下界，边界处通常要求

$$we + r\underline{a} - c(\underline{a},e) \geq 0. \tag{D.38}$$

给定最优消费政策 $c(a,e)$，资产漂移为

$$s(a,e) = we + ra - c(a,e).$$

密度 $m(a,e,t)$ 满足一组 KFE：

$$\frac{\partial m(a,e,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial a}\left[s(a,e)m(a,e,t)\right] + \sum_{e' \neq e}\left[\lambda_{e'e}m(a,e',t) - \lambda_{ee'}m(a,e,t)\right]. \tag{D.39}$$

第一项是资产漂移导致的密度流动，第二项是收入状态转换导致的家庭在不同 e 之间移动。

在稳态中，

$$0 = -\frac{\partial}{\partial a}\left[s(a,e)m(a,e)\right] + \sum_{e' \neq e}\left[\lambda_{e'e}m(a,e') - \lambda_{ee'}m(a,e)\right]. \tag{D.40}$$

总资本由分布加总：

$$K = \sum_{e}\int a\, m(a,e)\, da. \tag{D.41}$$

企业一阶条件给出

$$r = \alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} - \delta, \qquad w = (1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha}. \tag{D.42}$$

定义 D.3 (连续时间 stationary equilibrium). 给定参数、收入状态转移强度和借贷下限，一个连续时间不完全市场稳态均衡由价值函数 $V(a,e)$、消费政策 $c(a,e)$、密度 $m(a,e)$、工资 w、利率 r 和总资本 K 构成，使得：

1. 家庭 *HJB* (D.36) 成立，且消费政策最优；
2. 密度满足稳态 *KFE* (D.40)，总质量为 *1*；
3. 企业价格满足 (D.42)；
4. 资本市场清算：$K = \sum_e \int a\, m(a,e)\, da$。

这个定义就是附录 C 的连续时间版本。附录 C 中，个体政策通过 Markov 转移算子推动分布；这里，个体政策通过 KFE 推动密度。二者经济含义相同，只是时间表示不同。

D.11 HJB–KFE 系统的经济读法

连续时间异质性主体模型经常被写成一个 HJB–KFE 系统：

$$\rho V(a,e) = \max_{c}\left\{u(c) + s(a,e)V_a(a,e) + \sum_{e' \neq e}\lambda_{ee'}[V(a,e') - V(a,e)]\right\}, \tag{D.43}$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial a}[s(a,e)m(a,e)] + \sum_{e' \neq e}\left[\lambda_{e'e}m(a,e') - \lambda_{ee'}m(a,e)\right], \tag{D.44}$$

$$K = \sum_{e}\int a\, m(a,e)\, da, \tag{D.45}$$

$$r = F_K(K,L) - \delta, \qquad w = F_L(K,L). \tag{D.46}$$

读这个系统时，不要先被偏微分方程吓住。它只是四句话。

第一，家庭给定价格和风险，选择消费储蓄，这由 HJB 描述。

第二，家庭的消费储蓄选择决定资产漂移，收入冲击决定状态转换，二者一起决定分布，这由 KFE 描述。

第三，分布加总得到资本供给。

第四，总资本决定要素价格，价格又回到家庭问题。

这就是现代 HANK、Aiyagari、财富分布、金融摩擦和连续时间宏观模型的共同结构。不同论文的差别通常在于：状态变量更多，约束更复杂，价格更多，冲击过程更丰富，或者政策工具进入 HJB 和 KFE 的位置不同。

D.12 一个简化的稳态密度例子

为了让 KFE 更直观，考虑一个没有收入状态的资产过程：

$$da_t = \kappa(\bar{a} - a_t)dt + \sigma dW_t. \tag{D.47}$$

这叫 Ornstein–Uhlenbeck 型过程。若 a_t 高于 $\bar{a}$，漂移为负；若低于 $\bar{a}$，漂移为正。它可以粗略表示一种均值回复的财富动态。

稳态 KFE 为

$$0 = -\frac{d}{da}\left[\kappa(\bar{a} - a)m(a)\right] + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{d^2m(a)}{da^2}. \tag{D.48}$$

其稳态分布为正态分布：

$$a \sim N\left(\bar{a}, \frac{\sigma^2}{2\kappa}\right). \tag{D.49}$$

这个结果有一个简单含义。κ 越大，均值回复越强，财富越不分散；σ 越大，随机冲击越强，财富越分散。表 D.6 给出方差例子。

表 D.6: 均值回复资产过程的稳态方差

κ	σ	$\sigma^2/(2\kappa)$
0.20	0.10	0.025
0.20	0.20	0.100
0.40	0.20	0.050
0.10	0.20	0.200

真实财富分布当然远比正态更偏、更厚尾。这个例子的价值不在于拟合现实，而在于展示 KFE 如何把个体漂移和个体风险转化为总体分布。若政策增强低资产家庭的收入保险，相当于降低某些状态的 σ；若金融市场使资产回报差异扩大，相当于提高高资产区域的有效风险或漂移差异；这些改变会通过 KFE 改变稳态分布。

D.13 边界条件：借贷约束不是脚注

在连续时间模型中，边界条件不是技术细节，而是经济约束的数学表达。若资产下限为 $\underline{a}$，家庭不能穿过这个下界。若资产漂移为

$$s(a,e) = we + ra - c(a,e),$$

则边界处必须满足

$$s(\underline{a},e) \geq 0.$$

否则家庭会试图选择让资产低于下限的消费路径。

在 HJB 中，这表现为边界处的约束最优条件；在 KFE 中，则表现为没有概率质量从边界流出。若边界处理错误，数值算法可能产生两个问题：第一，家庭政策违反借贷约束；第二，分布质量从网格中泄漏。二者都会使总资本和利率结果不可信。

表 D.7: 连续时间随机模型中的常见边界条件

边界类型	数学表达	经济含义
反射边界	边界处净流量为零	个体不能穿过资产下限或上限
吸收边界	到达后停留在边界状态	破产、退出、死亡等终止状态
自由边界	边界位置由最优选择决定	进入、退出、违约、技术采用门槛
横截条件	远端价值增长受限	排除爆炸资产路径或泡沫价值

PhD 论文中的许多技术难点都藏在边界条件里。比如企业退出模型要决定退出门槛；违约模型要决定违约边界；技术采用模型要决定何时采用新技术；财富分布模型要确保资产下限处没有质量泄漏。

D.14 随机增长、长期风险与福利

随机过程不仅改变技术推导，也改变福利判断。假设人均消费增长满足

$$d\log c_t = \mu_c\,dt + \sigma_c\,dW_t. \tag{D.50}$$

若效用是 CRRA，风险厌恶参数为 θ，长期福利不仅取决于 μ_c，还取决于 σ_c。在许多近似中，风险调整后的等价增长率会出现类似

$$\mu_c - \frac{1}{2}\theta\sigma_c^2 \tag{D.51}$$

的项。风险厌恶越强，消费波动的福利成本越高。

这对增长政策很重要。一个政策若提高平均增长率 0.3 个百分点，但显著提高宏观波动、失业风险或家庭收入风险，其福利效果未必为正。反过来，一个社会保险或金融稳定政策可能略微降低平均投资率，却通过降低消费风险提高福利。增长经济学不能只比较平均 GDP 增速，还要比较风险如何在家庭和企业之间分配。

D.15 中国与发展延伸：不确定性、储蓄与创新

连续时间随机工具在中国与发展问题中有三个特别有用的切入点。

D.15.1 收入风险与高储蓄

如果家庭资产满足

$$da_t = (we_t + ra_t - c_t)dt,$$

而收入状态 e_t 按 Markov chain 跳转，那么失业、疾病、教育支出和养老风险都会通过 HJB 改变边际价值 V_a。风险越高、保险越不完全、借贷约束越紧，低资产家庭越倾向于提高储蓄。这个机制不是“文化偏好”解释，而是可以在 HJB–KFE 系统中被精确表达的预防性储蓄机制。

一个有用的判断是：若政策降低低收入状态到达率，或提高低收入状态下的保险支付，它会同时改变 HJB 中的状态转换价值差和 KFE 中的分布流动。最终总储蓄可能下降，消费风险下降，福利上升。

D.15.2 金融摩擦与企业创新

创新模型 (D.30) 中，研发强度为

$$z^* = \frac{\lambda}{\psi}(\bar{V} - V).$$

金融摩擦可以通过两个渠道进入。第一，它提高研发融资成本，相当于提高 ψ。第二，它降低成功后企业能保留或实现的价值，相当于降低 $\bar{V} - V$。这解释了为什么“有技术机会”不必然转化为“高创新强度”：如果融资、知识产权、市场准入或退出机制扭曲，创新到达率会低于社会最优。

D.15.3 宏观波动与长期增长质量

若生产率满足

$$d\log A_t = \left(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)dt + \sigma_A dW_t,$$

则提高长期增长质量不只是提高 μ_A，也包括降低无谓波动 σ_A。发展中经济体在转型过程中往往面对更大的企业退出风险、地方财政波动、外需波动和金融周期。若这些风

险无法被有效分散，家庭和企业会通过高储蓄、低风险投资或延迟创新来应对。连续时间随机模型提供了一种语言：风险不是背景噪音，而是改变最优决策和分布演化的状态过程。

表 D.8: 中国与发展问题中的随机过程表达

问题	可用过程	关键机制
家庭收入风险	Markov chain 或扩散收入过程	预防性储蓄、消费不平等、保险需求
企业创新	Poisson 到达过程	研发强度、成功概率、创造性破坏
金融危机	跳跃过程或 regime switching	资产价格跳跌、融资约束突然收紧
技术追赶	漂移加跳跃的生产率过程	平均追赶速度与关键技术突破
财富分布	HJB–KFE 系统	个体储蓄政策与总体分布共同决定资本供给

D.16 数值实现的最小路线图

本附录重点是理论语言，但连续时间随机模型最终通常要数值求解。最小路线图如下。

第一，离散化状态空间。例如资产网格

$$\underline{a} = a_1 < a_2 < \cdots < a_I = \bar{a}.$$

第二，用有限差分近似 HJB 中的一阶导数。由于资产漂移方向会随状态变化，通常要用 upwind scheme：若储蓄漂移 $s(a,e) > 0$，用 backward difference；若 $s(a,e) < 0$，用 forward difference。

第三，根据 HJB 得到消费政策和漂移 $s(a,e)$。

第四，用同一个漂移构造 KFE 的转移矩阵，求稳态分布。

第五，检查市场清算、总质量守恒和 Euler/HJB 误差。

附录 F 会专门讨论数值实现。本附录只强调一点：HJB 和 KFE 必须作为同一个系统求解。若 HJB 用一套漂移，KFE 用另一套漂移，或者边界条件不一致，结果会看似收敛但经济含义错误。

表 D.9: 连续时间 HJB–KFE 数值检查清单

检查项	应该确认什么
HJB 残差	代回最优政策后，HJB 左右两边差距足够小
边界条件	资产下限处政策不使个体穿越下界
分布质量	$\sum_e \int m(a,e)da = 1$
KFE 残差	稳态分布满足 $\partial_t m = 0$
市场清算	家庭资产加总等于企业资本需求
网格稳健性	加密网格后核心结果不发生实质改变

D.17 常见错误

第一，把 dW_t 当成 dt 量级。正确量级是 dW_t 的标准差为 $\sqrt{dt}$，所以 $(dW_t)^2$ 留下 dt 项。

第二，使用普通链式法则处理随机过程，漏掉 Ito 修正项 $\frac{1}{2}\sigma^2 F_{xx}$。

第三，把水平增长率和对数增长率混为一谈。GBM 中 dA/A 的漂移是 μ，但 $d\log A$ 的漂移是 $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$。

第四，写 HJB 时只写漂移项，忘记扩散项或跳跃项。

第五，写 KFE 时符号方向弄反。漂移项是 $-\partial_a(sm)$，不是 $+\partial_a(sm)$。

第六，把 HJB 当成“个体方程”，把 KFE 当成“技术附录”。在异质性主体模型中，KFE 和 HJB 同等重要：没有 KFE，就没有总体资本、财富分布和市场清算。

第七，忽略边界条件。借贷约束、退出、违约和技术采用门槛都必须通过边界条件进入模型。

D.18 英文术语表

表 D.10: 连续时间随机增长术语表

英文术语	中文解释
Brownian motion	布朗运动；连续时间扩散冲击的基础过程。
drift	漂移项；状态变量的可预期平均变化。
diffusion	扩散项；由 Brownian shock 产生的连续随机波动。

英文术语	中文解释
Ito's lemma	Ito 引理；随机过程中的链式法则，包含二阶修正项。
quadratic variation	二次变差；解释为什么 $(dW_t)^2$ 是 dt 量级。
geometric Brownian motion	几何布朗运动；常用于技术、资产价格或生产率过程。
Poisson process	Poisson 过程；描述随机到达的离散事件。
jump process	跳跃过程；状态变量发生离散跳变的随机过程。
infinitesimal generator	无穷小生成元；价值函数瞬时预期变化率的算子。
stochastic HJB	随机 HJB；带扩散或跳跃风险的连续时间 Bellman 方程。
Kolmogorov forward equation	Kolmogorov 前向方程；描述状态密度随时间演化。
Fokker–Planck equation	Fokker–Planck 方程；扩散过程的 KFE 常见名称。
stationary distribution	稳态分布；密度不再随时间变化的分布。
upwind scheme	迎风格式；按漂移方向选择有限差分方向的数值方法。
reflecting boundary	反射边界；概率质量不能穿过边界。
absorbing boundary	吸收边界；过程到达后停留或终止的边界。
free boundary	自由边界；边界位置本身由最优选择决定。

D.19 本附录 Review

如果你真正理解本附录，应该能够不看公式回答以下问题。

第一，为什么 Brownian shock 的一阶项均值为零，但二阶项不能忽略？这和 Ito 引理中的 $\frac{1}{2}\sigma^2 F_{xx}$ 有什么关系？

第二，为什么 $dA/A = \mu dt + \sigma dW_t$ 不意味着 $d\log A$ 的平均增长率是 μ？

第三，生成元 $\mathcal{L}^a V$ 的经济含义是什么？为什么它自然出现在 HJB 中？

第四，随机 HJB 和确定性 HJB 的差别在哪里？扩散项进入价值方程后，风险怎样通过价值函数曲率影响决策？

第五，Poisson 创新模型中，创新强度、创新价值差和研发成本如何共同决定研发投入？

第六，KFE 为什么是“分布方程”？它和 HJB 分别回答什么问题？

第七，在连续时间不完全市场模型中，为什么边界条件和质量守恒不是技术细节，而是经济模型的一部分？

第八，若你要研究中国家庭高储蓄、企业创新不足或金融周期风险，应该选择 Brownian shock、Poisson shock、Markov chain，还是它们的组合？选择背后的经济理由是什么？

D.20 核心文献

连续时间随机控制的数学基础可参考 [Oksendal, 2003, Fleming and Soner, 2006]。连续时间消费和投资问题的经典经济学应用来自 [Merton, 1971]。递归方法和动态规划背景可与 [Stokey et al., 1989, Ljungqvist and Sargent, 2018] 对读。连续时间异质性主体和 HJB–KFE 方法在宏观中的系统应用可参考 [Achdou et al., 2022]。若关注增长、金融摩擦和长期风险，本附录应与附录 B、附录 C 和正文第 21–24、35 章一起阅读。

附录 E　增长数据、图表与核算方法手册

前面的章节已经多次使用数据：第 2 章用 Maddison 和 WDI 描述长期收入差异，第 3 章用 PWT 做增长核算，第 25 章把中国增长事实放进表格，第 29–30 章讨论实证识别和论文复制。本附录把这些分散的数据工作统一起来。它的目标不是让你再去“自己找数据”，而是告诉你：本书使用哪些数据源、每个变量代表什么、如何从原始数据变成教材中的图表、哪些口径最容易误读，以及怎样把一张增长图或一张核算表做成可复现材料。

增长数据有一个特点：看起来简单，实际很容易错。GDP 可以是当前美元、不变价本币、不变价美元、PPP 国际元；人口可以是总人口、劳动年龄人口、就业人数或工作小时；资本可以是投资流量、净资本存量、资本服务或资本产出比；TFP 可以是自己计算的 Solow residual，也可以是 PWT 提供的生产率指数。若这些对象混用，图表会很漂亮，结论却不可信。

本附录的定位是方法手册。读完后，你不需要成为数据工程师，但应该知道如何检查一张增长事实图是否严肃，如何解释一张增长核算表，如何记录数据来源和版本，如何把中国数据与国际数据放在同一张表里而不偷换口径。

E.1　学习目标

读完本附录，你应该能够做到七件事。

第一，区分当前价格、固定价格、PPP、市场汇率、总量、人均和每工人的 GDP 口径。

第二，知道本书主要使用的三类跨国数据源：World Development Indicators、Penn World Table 和 Maddison Project Database，并理解它们各自适合回答什么问题。

第三，能够用一套固定公式计算年均对数增长率、指数化序列、收敛散点图和简化增长核算。

第四，理解资本存量、人力资本和 TFP residual 的测量边界，避免把 residual 直接当成“纯技术进步”。

第五，能够读懂本项目 `data/` 和 `scripts/` 中已有的数据文件和抓取脚本。

第六，能够在中国数据中检查口径、价格、地区、产业分类和统计修订问题。

第七，能够为一张图或一张表写出可复现说明：数据源、变量代码、样本、年份、变换、缺失值处理和生成脚本。

E.2 数据不是装饰，而是模型的约束

增长理论中的数据至少有三种角色。

第一，数据告诉我们模型要解释什么。Solow 模型之所以重要，不是因为它数学上漂亮，而是因为它解释了资本深化、稳态、条件收敛和转移动态这些事实。若没有长期收入差异、追赶和资本积累的数据，模型会失去对象。

第二，数据帮助我们区分机制。高投资和高增长同时出现，并不自动说明投资导致增长。增长核算至少能先问：产出增长中有多少来自资本深化，有多少来自人力资本，有多少被记为 residual？这个分解不是因果识别，但它能防止讨论停留在口号。

第三，数据暴露模型的边界。若一个模型预测资本产出比持续爆炸，而实际数据中资本产出比长期相对稳定，那么模型缺少平衡增长机制。若一个模型预测人口越多增长越快，而后 20 世纪数据不支持简单规模效应，那么模型就需要引入半内生增长、知识稀释或研发拥挤。

因此，本书中的数据图表不是“课后练习材料”，而是正文的一部分。读图表时，要像读方程一样认真：每一列是什么单位？每个变量如何定义？基期是什么？样本为什么选这些国家？年份为什么从这里开始？缺失值如何处理？这些问题决定了图表能否支持正文的机制判断。

E.3 三个核心数据源

本书最常用的跨国增长数据源是 WDI、PWT 和 Maddison。它们不是互相替代品，而是服务于不同问题。

World Development Indicators 是世界银行的综合发展指标库，来自官方和国际来源，适合做广泛事实图，例如人均 GDP、投资率、城市化率、教育入学率、产业结构和贸易开放度 [World Bank, 2026a]。WDI 的优势是更新频率高、国家覆盖广、API 方便。缺点是它不直接提供完整增长核算所需的资本存量和可比 TFP。

Penn World Table 更适合严肃增长核算。PWT 10.01 覆盖 183 个国家、1950–2019 年，提供相对收入、产出、投入和生产率信息 [Feenstra et al., 2015, Groningen Growth and Development Centre, 2023]。第 3 章的每工人产出、资本深化、人力资本和 TFP 图表就使用这一类数据。PWT 的关键优势是把跨国价格、资本存量、就业和生产率放在统一框架中；它的限制是更新不如 WDI 频繁，且变量很多，初学者很容易选错口径。

Maddison Project Database 用于超长期历史比较。2023 版覆盖 169 个国家和地区，时间跨度从公元 1 年到 2022 年 [Bolt and van Zanden, 2023,

表 E.1: 本书核心增长数据源

数据源	最适合的问题	主要注意事项
World Development Indicators	1980 年以来跨国宏观、人口、教育、城市化、产业结构、贸易、金融指标	变量覆盖广、更新快；但许多指标不是为增长核算专门构造，跨国口径仍需检查
Penn World Table	跨国可比的产出、资本、就业、人力资本、TFP 和生产侧核算	非常适合增长核算；但截至 PWT 10.01 覆盖到 2019 年，且变量选择必须区分支出侧和生产侧
Maddison Project Database	超长期收入历史、工业革命前后比较、世界经济重心变化	适合长期历史事实，不适合精细年度政策评估；早期年份不确定性较高

Bolt and van Zanden, 2024]。第 2 章用它说明现代增长出现得很晚：大多数历史时期，人均收入长期停滞，现代持续增长是近代以后才出现的事实。使用 Maddison 时，要把它当成历史估计，而不是现代国民账户数据的替代品。

E.4 GDP 口径：同一个词，很多含义

GDP 是增长数据里最常见、也最容易被误用的变量。表 E.2 给出常用口径。

最常见错误是把 current US dollars 当成真实增长。若某国本币贬值，按当前美元计算的 GDP 可能下降，但本国实际产出未必下降。相反，若汇率升值，当前美元 GDP 可能显著上升，但真实生产能力未必同步提高。因此，增长率通常应使用固定价格序列，跨国生活水平比较通常应使用 PPP 调整的人均收入。

第二个常见错误是把人均 GDP 和劳动生产率混为一谈。人均 GDP 为

$$\frac{Y}{N}, \tag{E.1}$$

其中 N 是总人口。每工人产出为

$$\frac{Y}{L}, \tag{E.2}$$

其中 L 是就业人数。二者关系为

$$\frac{Y}{N} = \frac{Y}{L} \cdot \frac{L}{N}. \tag{E.3}$$

这说明人均 GDP 的变化既可能来自每个工人生产率提高，也可能来自就业人口占比变化。人口老龄化、劳动参与率下降或青年就业变化都会影响 L/N。若研究生产效率，应该尽量看每工人或每小时产出；若研究平均生活水平，可以看人均 GDP。

表 E.2: GDP 常见口径与用途

口径	适合用途	不适合用途
current US dollars	比较当年名义经济规模、国际金融权重	比较真实生活水平或长期增长，因为受价格和汇率影响大
constant local currency	分析一国自身真实增长率	跨国水平比较，因为各国价格水平不可比
constant US dollars	跨国近现代真实人均 GDP 路径，常用于 WDI 图表	长期历史和生活水平比较仍可能受基准年影响
PPP international dollars	跨国生活水平比较、长期收入差异	短期金融购买力、国际支付能力
GDP per capita	平均生活水平入口	劳动生产率，因为人口不是就业
GDP per worker	劳动生产率近似	福利水平，因为忽略非就业人口和劳动时长

E.5 本书常用 WDI 变量字典

表 E.3 列出本书已经或将会使用的 WDI 指标。写图表注释时，至少应给出指标代码、单位和抓取日期。

表 E.3: 常用 WDI 指标字典

WDI 代码	含义	本书用途
NY.GDP.PCAP.KD	人均 GDP，2015 年不变美元	第 2、4、25 章的人均收入和收敛图
NY.GDP.MKTP.KD	GDP，2015 年不变美元	总量真实增长率
NY.GDP.PCAP.PP.KD	人均 GDP，不变 PPP 国际元	跨国生活水平比较
NE.GDI.FTOT.ZS	总资本形成占 GDP 比重	投资率、资本深化背景
SP.POP.TOTL	总人口	人均变量、人口权重
SL.EMP.TOTL.SP.ZS	就业人口占 15 岁以上人口比重	人均 GDP 与每工人产出拆分

WDI 代码	含义	本书用途
SP.URB.TOTL.IN.ZS	城镇人口占总人口比重	城市化和结构转型
SE.TER.ENRR	高等教育毛入学率	人力资本和教育扩张事实
NV.AGR.TOTL.ZS	农业增加值占 GDP 比重	结构转型
NV.IND.TOTL.ZS	工业增加值占 GDP 比重	工业化和制造业比重
NV.SRV.TOTL.ZS	服务业增加值占 GDP 比重	服务业转型
NE.TRD.GNFS.ZS	货物和服务贸易占 GDP 比重	开放经济增长
FS.AST.PRVT.GD.ZS	金融机构对私人部门国内信贷占 GDP 比重	金融发展与约束

WDI 的 API 查询结构很直接。例如，要抓取中国、美国、韩国和印度 1980–2024 年的人均实际 GDP，可以使用：

```
https://api.worldbank.org/v2/country/CHN;USA;KOR;IND/
indicator/NY.GDP.PCAP.KD?format=json&per_page=20000&date=1980:2024
```

实际脚本中应写成一行 URL。本项目已有 PowerShell 抓取脚本和清洗后 CSV；完整文件名见本附录后面的数据资产索引。

E.6 PWT 变量：增长核算的主力

PWT 的变量很多，初学者最重要的是先掌握表 E.4 这组。

表 E.4: 常用 PWT 变量字典

PWT 变量	含义	本书用途
rgdpna	constant 2017 national prices 下的实际 GDP	计算一国随时间的真实产出增长
rgdpo	output-side real GDP at chained PPPs	跨国产出水平比较
rgdpe	expenditure-side real GDP at chained PPPs	支出侧福利和吸收相关比较

PWT 变量	含义	本书用途
`rnna`	constant 2017 national prices 下的资本存量	资本深化和资本产出比
`emp`	就业人数，单位为百万	每工人产出、每工人资本
`avh`	年均工作小时	每小时产出，若可得
`hc`	人力资本指数	人力资本调整增长核算
`labsh`	劳动收入份额	资本份额 $\alpha = 1 - \texttt{labsh}$ 的参考
`rtfpna`	constant national prices 下的 TFP 指数	一国随时间的 TFP 路径
`ctfp`	current PPPs 下的 TFP 水平	跨国 TFP 水平比较入口

第 3 章采用 `rgdpna`、`rnna`、`emp`、`hc` 和 `rtfpna` 构造每工人产出、每工人资本、人力资本和 TFP 指数。抓取脚本是 [`scripts/fetch_growth_sources.ps1`]，生成的关键文件包括：

`data/pwt_output_worker_index.csv`	每工人实际产出指数，1980=100,
`data/pwt_tfp_index.csv`	TFP 指数，1980=100,
`data/pwt_growth_inputs.csv`	增长核算输入数据,
`data/pwt_growth_accounting.csv`	增长核算结果表.

PWT 的一个关键选择是：做时间序列增长时，通常使用 constant national prices 变量；做跨国水平比较时，要考虑 PPP 口径。不要把 `rgdpna` 和 `rgdpo` 随意混用。前者更适合看一个国家自己的增长路径，后者更适合比较不同国家的产出水平。

E.7　Maddison：超长期历史的入口

Maddison 数据在本书中主要回答一个问题：现代经济增长到底有多“现代”？第 2 章用中国、印度、英国和美国的长期人均 GDP 表说明，在相当长的历史时期中，人均收入增长极慢；持续的人均收入增长是工业革命以后才逐渐成为核心事实。

使用 Maddison 时，有三点需要记住。

第一，它是历史估计，不是现代国民账户。公元 1 年、1000 年、1500 年这类年份的数据不可能像 2024 年 WDI 那样精确。它适合展示长期数量级和历史转折，不适合做精细年度政策识别。

第二，它的单位通常是 PPP 调整后的国际元，便于比较长期生活水平，但基准和方法会随版本变化。写图表时必须说明版本，例如 Maddison Project Database 2023。

第三，如果通过 Our World in Data 等整理渠道获取 Maddison 数据，要在注释中同时说明原始来源和整理渠道。本项目脚本 [`scripts/fetch_growth_sources.ps1`] 从 Our World in Data 的 Maddison 整理 CSV 获取少量示例年份，并生成 [`data/maddison_gdp_pc_selected.csv`]。

E.8 增长率：为什么本书偏好对数增长

若变量从 x_0 变为 x_T，简单年均增长率可以写成

$$\left(\frac{x_T}{x_0}\right)^{1/T} - 1.$$

本书更常用年均对数增长率：

$$g_x = \frac{\log x_T - \log x_0}{T}. \tag{E.4}$$

如果要用百分数表示，就乘以 100。

对数增长有三个好处。第一，它近似普通增长率，但更容易加总分解。第二，它和连续时间增长模型自然对应。第三，它使“翻倍”这种比例变化更直观：从 1000 到 2000 与从 40000 到 80000 的对数变化相同。

表 E.5: 对数增长率的一个小例子

起点	终点	年数	年均对数增长率
1,000	2,000	20	3.47%
10,000	20,000	20	3.47%
10,000	15,000	20	2.03%
10,000	30,000	20	5.49%

注意，对数增长率不是万能的。若变量可以为零或负数，就不能直接取对数。贸易余额、净出口、利润、TFP 增长率这类变量可能出现负值，应先判断经济含义，再选择变换。

E.9 指数化图表：把不同国家放到同一起点

增长教材中常见一种图：把各国某个变量在基期统一设为 100，然后比较相对增长路径。若原始变量为 x_{it}，基期为 t_0，指数为

$$I_{it} = 100 \cdot \frac{x_{it}}{x_{it_0}}. \tag{E.5}$$

第 3 章的 PWT 每工人产出图和 TFP 图就使用这个方法。

指数化有一个优点：它让起点水平不同的国家可以比较增长速度。中国、韩国、美国和印度的每工人产出水平差异很大，直接画水平会让低收入国家挤在图底；指数化后，读者可以看出哪个国家相对自身起点增长更快。

但指数化也有一个危险：它隐藏了水平差异。一个低收入国家从 100 到 400，不意味着它超过了一个高收入国家从 100 到 130；它只是相对自己的基期翻了几倍。因此，指数图最好和水平表一起读。

E.10 收敛图：事实入口，不是因果证明

收敛散点图通常把初始收入放在横轴，把后续增长率放在纵轴。最简单形式是

$$g_{i,t_0:T} = \alpha + \beta \log y_{i,t_0} + \varepsilon_i. \tag{E.6}$$

若 $\beta < 0$，低初始收入经济体增长更快，称为绝对收敛；若加入教育、投资、制度、地区等控制后 $\beta < 0$，则更接近条件收敛。

本项目已有两个收敛数据文件：

`data/convergence_scatter_wdi.csv` WDI 全样本收敛散点数据,

`data/convergence_selected_wdi.csv` 若干代表国家的收敛表.

它们由 [`scripts/fetch_convergence_data.ps1`] 生成，使用 WDI `NY.GDP.PCAP.KD`。

收敛图的解释要克制。它可以提出问题：为什么有些低收入国家追赶很快，有些没有？它不能单独证明贫穷导致高增长，也不能说明某项政策有效。初始收入、制度、教育、冲突、地理、产业结构和全球环境都可能同时影响后续增长。

E.11 增长核算公式

本书的基础增长核算来自 Cobb–Douglas 生产函数：

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} (H_t L_t)^{1-\alpha}, \tag{E.7}$$

其中 H_t 是劳动质量或人力资本指数。两边除以就业 L_t，得到

$$y_t = A_t k_t^{\alpha} H_t^{1-\alpha}, \tag{E.8}$$

其中 $y_t = Y_t/L_t$，$k_t = K_t/L_t$。取对数差，得到

$$g_y = g_A + \alpha g_k + (1-\alpha) g_H. \tag{E.9}$$

于是 TFP residual 为

$$g_A = g_y - \alpha g_k - (1-\alpha) g_H. \tag{E.10}$$

这个 residual 是一个会计剩余项，不是纯技术进步。它可能包含技术、管理、资源配置、规模经济、产能利用、测量误差、价格口径错误、劳动质量未充分调整、资本服务测量不足，以及产业结构变化。把 residual 直接解释成“科技进步”是增长核算中最常见的过度解释。

表 E.6: 简化增长核算模板

经济体/时期	g_y	αg_k	$(1-\alpha)g_H$	g_A	注释
追赶早期	高	高	中	中/高	资本深化、教育扩张、结构转型共同发生
追赶后期	中	中/高	低/中	低/中	资本回报下降，配置效率和创新更关键
前沿经济	低/中	低	低	中	TFP、创新和组织效率更重要

表 E.6 是阅读核算结果的直觉模板。追赶经济体早期往往资本深化贡献大，但 residual 也可能很高，因为资源从低生产率部门转向高生产率部门、市场化提高配置效率、技术吸收加速。进入中高收入阶段后，继续靠资本深化维持高增长变难，TFP 和创新质量变得更重要。

E.12 本项目现有数据资产索引

为了避免数据散落，本书当前正式使用的数据文件可以按表 E.7 理解。表中用短标签说明用途，完整文件名随后列出。

表 E.7: 本项目现有数据文件索引

文件组	来源与变量	主要用途
WDI 人均收入	WDI `NY.GDP.PCAP.KD`	第 2 章人均实际 GDP 路径
WDI 投资率	WDI `NE.GDI.FTOT.ZS`	第 3 章投资率图
Maddison 历史	Maddison/OWID 整理	第 2 章长期历史收入表
PWT 产出指数	PWT `rgdpna`/`emp`	第 3 章每工人产出指数
PWT TFP 指数	PWT `rtfpna`	第 3 章 TFP 指数
PWT 核算输入	PWT `rgdpna`, `rnna`, `emp`, `hc`, `rtfpna`	增长核算输入

文件组	来源与变量	主要用途
PWT 核算结果	由 PWT 输入计算	第 3 章增长核算表
收敛散点	WDI NY.GDP.PCAP.KD 全样本	第 4 章收敛散点图
代表国家收敛	WDI 代表国家	第 4 章代表国家收敛表
sigma 收敛	WDI 人均 GDP 横截面对数标准差	第 4 章 sigma 收敛图

完整文件名如下，均位于 data/ 目录：

```
gdp_pc.csv
investment_rate.csv
maddison_gdp_pc_selected.csv
pwt_output_worker_index.csv
pwt_tfp_index.csv
pwt_growth_inputs.csv
pwt_growth_accounting.csv
convergence_scatter_wdi.csv
convergence_selected_wdi.csv
sigma_convergence_wdi.csv
```

对应脚本见表 E.8。

表 E.8: 本项目现有数据脚本索引

脚本	作用
fetch_worldbank_data.ps1	抓取中国、美国、韩国、印度的人均 GDP 和投资率，生成第 2–3 章基础图表数据
fetch_growth_sources.ps1	抓取 PWT 10.0/10.01 相关序列和 Maddison/OWID 历史数据，生成增长核算文件
fetch_convergence_data.ps1	抓取 WDI 全样本人均 GDP，生成收敛散点和 sigma 收敛文件

若后续新增图表，应遵循同一规则：数据文件放入 data/，抓取或清洗脚本放入 scripts/，图表注释写清数据源、变量代码、年份、单位和生成脚本。

E.13 图表注释模板

一张增长图表至少要让读者知道七件事：

Source, Version, Variable, Unit, Sample, Transform, Script.

可以写成如下模板：

> 数据来源：World Bank, World Development Indicators，指标 `NY.GDP.PCAP.KD`，单位为 2015 年不变美元。样本为中国、美国、韩国和印度，年份为 1980–2024。图中数值按 1980 年设为 100 指数化。抓取脚本为 `scripts/fetch_worldbank_data.ps1`，数据文件为 `data/gdp_pc.csv`。

如果图表来自人工整理而非脚本生成，也要说明整理步骤。例如“表中 1980、1990、2000、2010、2020、2024 年为从年度序列抽取，数值四舍五入到一位小数”。不要只写“数据来源：世界银行”。这对复现几乎没有帮助。

E.14 中国数据：更要检查口径

中国增长数据有两个层次。第一层是国际可比数据，例如 WDI、PWT、Maddison、IMF 和 OECD。这些数据便于跨国比较，但它们通常来自或依赖官方统计，并经过国际组织整理。第二层是中国本土数据，例如国家统计局 National Data、中国统计年鉴、省级统计年鉴、行业年鉴、财政数据、海关数据、上市公司和工商注册数据。

使用中国数据时，要特别检查五个问题。

第一，价格口径。名义 GDP、实际 GDP、GDP 指数、不变价增加值和可比价增长率不能混用。若研究真实增长，应优先使用实际指标或明确使用价格指数平减。

第二，地区加总。中国省级 GDP 加总不一定完全等于全国 GDP，原因包括统计修订、地区口径、跨地区经营和核算方法差异。研究地区增长时，不要把省份加总值直接当作国家口径。

第三，产业分类。三次产业、制造业、工业、规模以上工业、服务业中的现代服务业，不是同一层级。结构转型图必须说明使用的是增加值、就业还是企业数。

第四，行政区划变化。城市扩区、县改区、撤县设市会改变城市边界。研究城市化、夜间灯光、房价或地方财政时，要处理地理边界可比性。

第五，统计修订。GDP、人口、就业和教育数据可能随普查或核算制度调整而修订。严肃写作中，要记录下载日期和版本，必要时说明是否使用修订后序列。

这并不是说中国数据不能用。恰恰相反，中国数据非常丰富，但越丰富越需要口径意识。一个好的中国增长研究，往往不是找到一个“神奇变量”，而是把变量的统计含义、经济机制和模型对象对齐。

表 E.9: 中国增长数据的常见口径风险

对象	常见风险	检查方式
GDP 增长	名义和实际混用	查单位、价格基期、是否为可比价
地区数据	省级加总与全国不一致	区分国家核算与地方核算
就业	城镇单位就业、总就业、调查失业口径不同	明确覆盖对象和统计制度
产业结构	工业和制造业混用	查看行业分类和增加值口径
资本形成	投资流量不等于资本存量	若做核算，应构造资本存量或用 PWT
城市数据	行政边界变化	使用一致边界或说明调整方法

E.15 从数据到图表：一条可复现流水线

本书推荐每张图表都遵循一条简单流水线：

$$\text{raw source} \to \text{script} \to \text{clean csv} \to \text{LaTeX figure/table} \to \text{caption with provenance.} \tag{E.11}$$

例如第 3 章 PWT 核算图的流水线可以写成四步。第一，从 DB.NOMICS/PWT API 获取原始序列。第二，运行 `fetch_growth_sources.ps1`。第三，在 `data/` 中生成每工人产出指数、TFP 指数和增长核算 CSV。第四，LaTeX 从这些 CSV 生成第 3 章图表和表格。

这种流水线的好处是，图表不是手工截图，也不是不可追踪的 Excel 操作。若 WDI 或 PWT 更新，理论上可以重新运行脚本并检查变化。若结果改变，也能定位是数据更新、变量口径变化，还是代码处理变化。

E.16 如何处理缺失值

跨国数据中缺失值非常常见。处理缺失值时，最坏做法是不说明；第二坏的做法是随意用 0 填充。增长数据中，缺失通常表示没有观测，而不是变量为 0。

本书建议遵循三条规则。

第一，做增长率时，若起点或终点缺失，就不要计算该时期增长率。不要用临近年份偷偷替代，除非明确说明。

第二，做面板图时，可以让某国线段从有数据的年份开始，而不是强行补齐。

第三，做回归或收敛散点时，要报告样本选择规则。例如“保留 1980 和 2024 年均有人均 GDP 数据的国家，且剔除世界银行地区总量和收入组汇总项”。

E.17　数据版本与下载日期

经济数据会修订。WDI 会更新，PWT 会发布新版本，Maddison 也会修订历史估计。为了让书稿可复现，每张数据图表至少应记录：

$$\text{source name} + \text{version or access date} + \text{indicator code}.$$

例如：

World Bank WDI, accessed 2026-05-22, NY.GDP.PCAP.KD.

或：

Penn World Table 10.01, rgdpna, rnna, emp, hc, rtfpna.

如果以后更新全书数据，最应该做的不是悄悄改数字，而是建立一个数据更新日志，记录旧版本、新版本、更新日期和主要变化。这样读者知道数字为什么和前一版不同。

E.18　增长数据的解释边界

数据能约束模型，但数据本身不会自动给出机制。表 E.10 总结几类常见误读。

表 E.10: 增长数据的常见误读

看到的事实	不能直接推出	更谨慎的读法
投资率高、增长快	投资必然导致增长	资本深化是近因，仍需解释投资回报和配置效率
TFP residual 高	技术进步一定快	residual 包含技术、配置、测量误差和结构变化
低收入国家增长快	贫穷自动带来收敛	可能是条件收敛，也可能由政策、制度或样本选择驱动
服务业比重上升	经济必然更高级	需要看服务业生产率、就业质量和结构
信贷占 GDP 高	金融发展一定好	还要看信贷配置效率、风险和软预算约束

这张表的精神很重要：数据事实是问题的入口，不是推理的终点。一个成熟的增长解释通常需要三步：先展示事实，再用模型说明机制，最后用更多数据或识别策略检验机制。

E.19　附录 E 的最小复现规范

以后本书新增任何数据图表，都应满足以下最小规范。

第一，图表正文给出足够解释，不把核心理解外包给读者。

第二，图表注释写明数据源、变量代码、单位、样本、年份和变换。

第三，若数据来自脚本，脚本路径写入注释或本附录索引。

第四，若数据来自手工整理，说明整理来源和处理步骤。

第五，若存在口径风险，正文直接提醒，不把它藏在脚注。

第六，若图表支持中国与发展延伸中的机制判断，必须说明该图表能支持什么、不能支持什么。

E.20　英文术语表

表 E.11: 增长数据与核算术语表

英文术语	中文解释
current prices	当期价格；未剔除通货膨胀的名义价格。
constant prices	不变价格；用固定基期价格衡量真实变化。
PPP	购买力平价；用于跨国生活水平比较的价格调整。
market exchange rate	市场汇率；用于国际金融和名义美元规模比较。
GDP per capita	人均 GDP；总产出除以总人口。
GDP per worker	每工人 GDP；总产出除以就业人数。
capital stock	资本存量；过去投资扣除折旧后的积累。
gross capital formation	总资本形成；投资流量，不等同于资本存量。
human capital index	人力资本指数；劳动质量或教育调整的近似指标。
TFP	全要素生产率；给定投入下的产出效率指标。
Solow residual	Solow 剩余；产出增长扣除投入贡献后的剩余项。

英文术语	中文解释
growth accounting	增长核算；把增长分解为投入增长和 residual。
level accounting	水平核算；解释收入水平差异的核算方法。
convergence	收敛；低收入经济体相对高收入经济体追赶的现象或模型预测。
metadata	元数据；描述变量定义、单位、来源和方法的信息。
reproducibility	可复现性；他人能用同一数据和步骤得到同一结果。

E.21 本附录 Review

如果你真正理解本附录，应该能够回答以下问题。

第一，为什么 current US dollars 不适合直接比较长期真实增长？

第二，为什么人均 GDP 和每工人产出不是同一个概念？式 (E.3) 对人口老龄化有什么含义？

第三，WDI、PWT 和 Maddison 分别适合回答什么问题？如果要做中国 1980–2019 年增长核算，为什么 PWT 比 WDI 更方便？

第四，为什么本书偏好年均对数增长率？什么时候不能使用对数增长？

第五，指数化图表隐藏了什么信息？为什么它最好和水平表一起读？

第六，TFP residual 为什么不能直接等同于技术进步？它可能包含哪些东西？

第七，一张可复现增长图表至少应该写清哪些信息？

第八，使用中国省级或城市数据时，为什么行政区划变化和地区加总问题会影响结论？

E.22 核心文献与数据入口

跨国发展指标的主要入口是 World Bank World Development Indicators [World Bank, 2026a]。增长核算和跨国可比生产率数据可从 Penn World Table 入手，方法论文为 [Feenstra et al., 2015]，本书当前参考 PWT 10.01 [Groningen Growth and Development Centre, 2023]。超长期收入历史可从 Maddison Project Database 入手，2023 版见 [Bolt and van Zanden, 2023, Bolt and van Zanden, 2024]。中国官方统计入口包括国家统计局和 National Data [National Bureau of Statistics of China, 2026]。关于增长核算的解释边界，东亚增长经

验中的经典提醒可读 [Young, 1995]；中国增长核算可与 [Brandt and Zhu, 2010] 一起阅读。

附录 F　增长模型数值实现与误差诊断

到这里，本书已经讲过很多无法只靠纸笔完成的模型。随机增长模型需要离散化生产率过程，Aiyagari 模型需要同时求个体政策和财富分布，连续时间 HJB–KFE 系统需要处理偏微分方程，开放经济和创新模型常常需要求解转移动态。附录 A 解释了随机递归方法的基本思想，附录 D 解释了连续时间随机 HJB 和 KFE 的数学语言。本附录继续向前一步：如果真的要把这些模型算出来，应该怎样组织算法，怎样判断结果可信，怎样避免把程序输出误当成经济结论？

数值方法不是增长理论的替代品。它是把理论推进到没有解析解区域的工具。一个数值模型若只给出漂亮曲线，却没有说明网格、插值、收敛标准、误差诊断和稳健性，它的可信度很低。相反，一个好的数值结果应该能回答三类问题：模型方程是否被正确求解？数值误差是否足够小？经济结论是否对网格、算法、初始值和参数选择稳健？

本附录写成手册式正文。它不要求你立刻写出完整 HANK 程序，但要让你能够读懂定量增长论文的方法附录，知道 VFI、policy iteration、EGM、shooting、collocation 和 finite difference 分别在解决什么问题，也知道 Euler error、Bellman residual、市场清算误差、KFE 质量守恒和转移路径误差应该怎样解释。

F.1　学习目标

读完本附录，你应该能够做到八件事。

第一，把经济模型翻译成数值问题：状态、控制、约束、价格、分布和均衡条件分别对应哪些计算对象。

第二，理解值函数迭代的优点和局限，知道为什么它稳健但可能很慢。

第三，理解 policy iteration 与 Howard improvement 如何加速 Bellman 型问题。

第四，掌握 endogenous grid method 的基本逻辑，知道它为什么在消费储蓄问题中比暴力搜索更快。

第五，理解 shooting method 如何求解 Ramsey 型鞍路径和转移动态。

第六，理解 collocation、projection 和 finite difference 如何用于连续状态或连续时间 HJB。

第七，能够设计误差诊断：Euler error、Bellman residual、资源约束误差、市场清算误差、分布误差、TVC 检查和网格稳健性。

第八，能够写出可复现的数值结果报告，说明参数、网格、算法、容忍度、随机种子、软件版本和运行环境。

F.2 从经济模型到数值问题

数值求解的第一步不是写代码，而是把模型对象分类。一个典型动态增长模型可以写成：

$$V(x) = \max_{a \in \mathcal{A}(x)} \{u(x,a) + \beta \mathbb{E}[V(x') \mid x, a]\}, \tag{F.1}$$

$$x' = G(x, a, \varepsilon'). \tag{F.2}$$

这里 x 是状态，a 是控制，$\mathcal{A}(x)$ 是可行选择集，x' 是下一期状态。计算机不能直接处理任意连续函数，所以必须选择近似方式：把状态离散成网格、把函数用基函数逼近、或把一阶条件转化为有限维方程。

表 F.1: 经济对象与计算对象的对应

经济对象	计算对象	常见风险
状态变量	网格点、节点或模拟样本	网格太窄、边界处理错误
控制变量	搜索集合、策略函数或一阶条件解	可行约束被违反、局部最优
期望	求和、积分、模拟平均或正交节点	转移概率错误、尾部风险被截断
均衡价格	root finding 或外层固定点	市场清算误差未收敛
分布	转移矩阵、不变分布、KFE 离散化	总质量不守恒、负密度
转移路径	shooting、time iteration 或 sequence method	初始跳跃变量错误、TVC 失败

表 F.1 的核心含义是：算法的每个技术选择都有经济含义。资产网格上界太低，会人为限制富裕家庭储蓄；生产率网格太窄，会低估危机状态；KFE 离散化不守恒，会改变家庭总质量；市场清算误差太大，会让“均衡”其实不是均衡。

F.3 网格：状态空间不是随便切

最常见的做法是把连续状态 x 替换为有限网格

$$\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}.$$

网格选择至少包括三个问题：范围、密度和形状。

范围决定模型允许经济走多远。若研究 Ramsey 模型稳态附近的小扰动，网格可以围绕稳态；若研究金融危机、借贷约束或发展陷阱，网格必须覆盖低资产、低资本或低生产率区域。一个简单原则是：模拟出来的最优状态不应频繁撞到网格上下界。若大量主体选择最高资产点，网格上界通常太低。

密度决定精度。网格越密，近似误差通常越小，但计算成本上升。若状态有 d 个维度，每个维度取 N 个点，笛卡尔网格总点数是 N^d。这就是 curse of dimensionality。一个三维状态、每维 100 个点的模型已有 10^6 个状态；若每个状态还要搜索 100 个控制点，暴力 VFI 会非常慢。

形状决定有限计算资源放在哪里。消费储蓄模型中，资产接近借贷下限时政策函数弯曲更强，因此常用非均匀网格，在低资产区域更密：

$$a_i = \underline{a} + (\bar{a} - \underline{a}) \left(\frac{i-1}{N-1} \right)^{\eta}, \qquad \eta > 1. \tag{F.3}$$

当 $\eta > 1$ 时，网格点在下界附近更密，有利于捕捉约束家庭的高边际消费倾向。

F.4 值函数迭代：最稳健的基准算法

值函数迭代是最直接的算法。给定初始值函数 V_0，不断应用 Bellman 算子：

$$V_{n+1} = TV_n. \tag{F.4}$$

在标准折现动态规划中，T 是压缩映射，因此 V_n 会收敛到唯一值函数。附录 A 已经证明了这个思想。

表 F.2: 值函数迭代的标准流程

步骤	内容
1	选择状态网格 $\mathcal{X}$、控制候选集合 $\mathcal{A}(x)$、转移矩阵或积分方法。
2	初始化 $V_0(x)$，通常可设为 0、稳态效用近似，或前一次参数下的解。
3	对每个状态 x_i，遍历所有可行控制 a_j，计算当期效用和未来价值。
4	取最大值作为 $V_{n+1}(x_i)$，记录最优控制作为策略函数。
5	计算 $\|V_{n+1} - V_n\|_\infty$。若小于容忍度，停止；否则继续。

VFI 的优点是稳健。它对初始值不敏感，适合教学，适合有不连续选择、约束和非凸性的模型。缺点也明显：慢。因为每次迭代都要在每个状态上最大化，且当 β 接近

1 时，压缩速度很慢。宏观增长模型中 β 常为 0.96、0.98 甚至更高，VFI 可能需要很多轮。

表 F.3: VFI 的优势与局限

维度	优势	局限
理论稳健性	压缩映射给出收敛保证	需要有界性、紧性等条件
实现难度	逻辑直接，适合第一版程序	高维状态下暴力搜索极慢
约束处理	容易处理借贷约束和不可行消费	策略函数可能受网格离散影响
误差诊断	Bellman 残差自然可算	值函数收敛不等于 Euler 误差小

F.5 Policy iteration 与 Howard improvement

如果 VFI 太慢，一个常用加速方法是 policy iteration。核心思想是分开两件事：给定策略，评估它的价值；给定价值，改进策略。

设策略为 $g(x)$。给定该策略，值函数满足

$$V^g(x) = u(x, g(x)) + \beta \mathbb{E}[V^g(x') \mid x, g(x)]. \tag{F.5}$$

离散状态下，这是一组线性方程：

$$V^g = u^g + \beta P^g V^g, \qquad (I - \beta P^g) V^g = u^g. \tag{F.6}$$

求出 V^g 后，再对每个状态重新最大化，得到改进策略。

Howard improvement 是 practical compromise：不必每次都精确解线性系统，可以在同一策略下连续迭代价值若干次，再更新策略。这样减少昂贵的最大化次数。

数值经济学中一个好习惯是：先写慢但稳的 VFI，确认模型和误差诊断正确，再用 Howard 或 policy iteration 加速。不要一开始就追求最快算法；最快的错误答案仍然是错误答案。

F.6 Endogenous grid method：从 Euler 方程反推网格

在标准消费储蓄问题中，EGM 往往比 VFI 快很多。考虑家庭问题：

$$V(a, e) = \max_{c, a'} \left\{ u(c) + \beta \sum_{e'} \Pi(e, e') V(a', e') \right\} \tag{F.7}$$

表 F.4: VFI、Howard 与 policy iteration 的比较

方法	适用场景	主要注意事项
纯 VFI	第一版程序、非凸、约束多	慢，但稳健
Howard improvement	策略函数更新慢、最大化昂贵	每次策略评估次数不宜盲目过大
Policy iteration	离散状态下线性系统可解	线性系统大时需用稀疏矩阵方法

subject to

$$c + a' = we + (1 + r)a, \qquad a' \geq \underline{a}. \tag{F.8}$$

内点 Euler 方程为

$$u'(c) = \beta(1 + r) \sum_{e'} \Pi(e, e')u'(c'(a', e')). \tag{F.9}$$

VFI 通常在当前资产 a 网格上搜索 a'。EGM 反过来：先选择下一期资产 a' 的网格，然后用 Euler 方程算出当前消费 c，再由预算约束反推出当前资产 a：

$$a = \frac{c + a' - we}{1 + r}. \tag{F.10}$$

这就是 endogenous grid 的来源：当前资产网格不是外生给定的，而是由 Euler 方程和下一期资产网格内生生成。

表 F.5: EGM 的基本流程

步骤	内容
1	选择下一期资产网格 $\{a'_j\}$ 和收入状态 $\{e_m\}$。
2	给定上一轮消费政策 $c_n(a, e)$，计算 Euler 右边的预期边际效用。
3	由 $u'(c) = \beta(1 + r)\mathbb{E}[u'(c')]$ 反推出当前消费 c。
4	用预算约束反推出当前资产 $a = (c + a' - we)/(1 + r)$。
5	得到一组内生点 (a, c)，插值回外生资产网格。
6	在借贷约束附近单独处理绑定状态。

EGM 快，是因为它避免了在每个状态上对 a' 做最大化搜索。但它不是万能的。它依赖 Euler 方程和单调性，适合凸的消费储蓄问题；遇到非凸调整成本、离散选择、固定成本、违约或进入退出时，EGM 可能需要扩展或不能直接用。

F.7 Shooting method：求转移路径和鞍路径

Ramsey 型模型中，资本是状态变量，消费是跳跃变量。给定初始资本 k_0，只有一个初始消费 c_0 能让路径收敛到稳态并满足横截条件。shooting method 的思想就是猜 c_0，模拟动态系统，看是否打中目标。

以连续时间 Ramsey 模型为例：

$$\dot{k} = f(k) - c - \delta k, \tag{F.11}$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left[f'(k) - \delta - \rho\right]. \tag{F.12}$$

稳态为 (k^*, c^*)。给定 k_0，选择一个猜测 c_0，用数值 ODE 方法模拟到很远的 T。若 c_0 太高，资本可能被耗尽；若 c_0 太低，资本可能过度积累。通过二分法或 root finding 调整 c_0，使得 k_T 接近 k^*，或使终端条件残差接近 0。

表 F.6: shooting method 中常见失败信号

失败信号	可能原因
路径很快出现 $k_t < 0$	初始消费猜得太高，或步长太大
资本持续远离稳态	初始消费不在稳定路径上
不同步长给出不同路径	ODE 离散化误差太大
终端条件满足但中间路径异常	终端时间太短，或目标函数设计不当
root finder 不收敛	稳态算错、方程方向错、初始 bracket 不包含根

shooting 的优点是经济直观，特别适合低维 saddle path。缺点是高维系统会很脆弱，因为需要同时猜多个跳跃变量。对于高维转移动态，time iteration、projection 或 sequence-space 方法通常更稳定。

F.8 Collocation 与 projection：用基函数逼近未知函数

如果状态连续且维度不太高，可以不用密集网格遍历所有点，而是把未知函数写成基函数组合。例如：

$$V(x) \approx \hat{V}(x; \mathbf{b}) = \sum_{j=1}^{J} b_j \phi_j(x), \tag{F.13}$$

其中 $\phi_j(x)$ 是多项式、Chebyshev 基函数、样条或其他基函数。把 (F.13) 代入 Bellman 方程或 Euler 方程，会得到残差：

$$R(x;\mathbf{b}) = \rho\hat{V}(x;\mathbf{b}) - \max_a \left\{ u(x,a) + \mathcal{L}^a \hat{V}(x;\mathbf{b}) \right\}. \tag{F.14}$$

collocation 要求残差在若干节点 $\{x_i\}_{i=1}^J$ 上为零：

$$R(x_i;\mathbf{b}) = 0, \qquad i = 1,\dots,J. \tag{F.15}$$

于是求函数变成求有限个系数 $\mathbf{b}$。

Projection 方法的精神类似，只是要求残差与某些权重函数正交，而不是在节点上精确为零。它的优势是逼近效率高，适合光滑函数；局限是实现更复杂，对初始值、节点选择和非光滑约束比较敏感。

F.9 Finite difference：连续时间 HJB 的工作马

连续时间 HJB 常写成

$$\rho V(a,e) = \max_c \left\{ u(c) + s(a,e)V_a(a,e) + \sum_{e' \neq e} \lambda_{ee'}[V(a,e') - V(a,e)] \right\}, \tag{F.16}$$

其中 $s(a,e) = we + ra - c$ 是资产漂移。finite difference 的核心是用网格差分近似导数。若资产网格为 $a_1,\dots,a_N$，向前差分和向后差分为

$$V_a^F(a_i,e) = \frac{V(a_{i+1},e) - V(a_i,e)}{a_{i+1} - a_i}, \tag{F.17}$$

$$V_a^B(a_i,e) = \frac{V(a_i,e) - V(a_{i-1},e)}{a_i - a_{i-1}}. \tag{F.18}$$

HJB 中最重要的数值原则是 upwind。若资产漂移 $s(a_i,e) > 0$，家庭状态向右移动，导数应使用向后差分；若 $s(a_i,e) < 0$，状态向左移动，导数应使用向前差分。这样离散化方向与经济状态流动方向一致，能避免不稳定振荡。

给定消费政策，HJB 可以写成矩阵形式：

$$\rho\mathbf{V} = \mathbf{u} + A\mathbf{V}, \qquad (\rho I - A)\mathbf{V} = \mathbf{u}, \tag{F.19}$$

其中 A 是由资产漂移和收入状态转移构成的生成元矩阵。一个基本检查是：生成元每行求和应为 0，非对角元素应非负。若这两个条件失败，离散化通常不再代表合法 Markov 过程。

F.10 KFE 离散化与分布求解

给定策略后，分布满足 KFE。离散状态下，若 A 是 HJB 中对应状态转移的生成元矩阵，稳态分布 $\mathbf{m}$ 通常满足

$$A^\top \mathbf{m} = 0, \qquad \sum_i m_i = 1. \tag{F.20}$$

这说明 HJB 和 KFE 不是两套无关算法。HJB 用 A 描述个体状态如何移动；KFE 用 $A^\top$ 描述总体质量如何在状态之间流动。

命题 F.1 (离散 KFE 的质量守恒检查). *若生成元矩阵 A 的每一行求和为 0，则对任意分布 $\mathbf{m}$，有*

$$\mathbf{1}^\top A^\top \mathbf{m} = 0.$$

因此由 $\dot{\mathbf{m}} = A^\top \mathbf{m}$ 描述的分布动态保持总质量不变。

证明. 由于 A 每行求和为 0，等价于 $A\mathbf{1} = 0$。于是

$$\mathbf{1}^\top A^\top \mathbf{m} = (A\mathbf{1})^\top \mathbf{m} = 0.$$

因此 $\frac{d}{dt}\mathbf{1}^\top \mathbf{m} = 0$，总质量守恒。 □

这个命题非常实用。很多连续时间异质性主体程序的错误，不是 HJB 一阶条件写错，而是离散化后的 A 不是合法生成元，导致 KFE 求出的分布有负质量或总质量漂移。

F.11 外层均衡：价格不是参数

在局部家庭问题中，利率 r 和工资 w 往往被当成给定。但在一般均衡中，它们必须由市场清算决定。以 Aiyagari 模型为例，外层算法可以写成：

1. 猜测利率 r，由企业一阶条件得到资本需求 $K^d(r)$ 和工资 $w(r)$。
2. 给定价格，求解家庭问题，得到资产政策 $g_r(a, e)$。
3. 给定政策，求不变分布 Γ_r。
4. 加总得到资本供给 $K^s(r) = \int g_r(a, e) d\Gamma_r$。
5. 调整 r，直到

$$K^s(r) - K^d(r) = 0.$$

外层 root finding 的误差就是市场清算误差。一个模型不能只说“家庭问题收敛”；还必须说明市场清算误差多小。

表 F.7: 一般均衡数值结果应报告的外层误差

误差	计算方式	经济含义
资本市场误差	$\lvert K^s - K^d\rvert / K^d$	资产供给是否等于企业资本需求
劳动市场误差	$\lvert L^s - L^d\rvert / L^d$	劳动供需是否一致
政府预算误差	$\lvert G+T-b'-(\tau Y+(1+r)b)\rvert$	政策实验是否财政可行
资源约束误差	$\lvert Y - C - I - G\rvert / Y$	总量会计是否闭合

F.12　误差诊断：程序跑完不等于模型解好

数值结果至少需要四层诊断。

第一层是算法收敛，例如 $\|V_{n+1} - V_n\|_\infty$ 或策略函数变化。但这只是内部迭代停止标准。

第二层是经济方程误差，例如 Euler error、Bellman residual、HJB residual、资源约束误差。它检查求得的政策是否真的满足模型条件。

第三层是均衡误差，例如市场清算、政府预算、KFE 质量守恒和不变分布残差。它检查个体最优是否和总量一致。

第四层是稳健性，例如网格加密、边界扩大、时间步长缩小、模拟样本变长、随机种子变化和不同算法交叉验证。

表 F.8: 增长模型数值误差诊断表

诊断对象	常见指标	解释
值函数收敛	$\|V_{n+1} - V_n\|_\infty$	Bellman 迭代是否停止
策略函数收敛	$\|g_{n+1} - g_n\|_\infty$	决策规则是否稳定
Euler error	$\log_{10}$ 消费等价误差	跨期最优条件是否近似成立
Bellman residual	$\lvert V - TV\rvert$	值函数是否接近 Bellman 不动点
HJB residual	HJB 左右两边差	连续时间方程是否满足
资源约束误差	$\lvert Y - C - I - G\rvert / Y$	总量会计是否闭合
市场清算误差	供给与需求差额	是否真的达到一般均衡
KFE 残差	$\|A^\top m\|$	稳态分布是否不变

诊断对象	常见指标	解释
质量守恒	$\lvert\sum_i m_i - 1\rvert$	分布总质量是否为 1
边界误差	撞上网格上界或下界的质量	网格范围是否足够

一个有用的经验是：误差应该被画出来，而不只是给一个最大值。Euler error 在资产网格上的形状可以告诉你哪里出问题。若误差只在极端边界大，可能问题不严重；若误差在高密度区域大，就会影响总量结论。若误差在约束点附近大，要区分这是数值插值问题，还是 Kuhn–Tucker 条件导致 Euler 等式本来就不成立。

F.13　Euler error 的消费等价解释

在消费储蓄问题中，Euler 方程可写为

$$u'(c_t) = \beta R_{t+1} \mathbb{E}_t[u'(c_{t+1})]. \tag{F.21}$$

若数值政策给出的右边为 M_t，则可以定义使 Euler 方程成立的隐含消费 $\tilde{c}_t$：

$$u'(\tilde{c}_t) = M_t. \tag{F.22}$$

消费等价误差为

$$\epsilon_t = \frac{\tilde{c}_t - c_t}{c_t}. \tag{F.23}$$

若 $|\epsilon_t| = 10^{-4}$，可以粗略理解为当前消费需要调整万分之一才满足 Euler 方程。许多论文报告 $\log_{10}|\epsilon_t|$；数值为 -4 表示误差约为 10^{-4}。

表 F.9: Euler error 的数量级解释

$\log_{10}\lvert\epsilon\rvert$	消费等价误差	粗略解释
-2	10^{-2}	约 1%，通常偏大
-3	10^{-3}	约 0.1%，教学模型可接受
-4	10^{-4}	约 0.01%，较好
-6	10^{-6}	非常精确

这些阈值不是法律。若模型用于定性教学，误差要求可以低一些；若模型用于福利比较、最优政策或微小效应，误差要求必须高得多。尤其当政策实验的福利收益只有 0.05% 消费等价时，数值误差若也是 0.05%，结论就不可信。

F.14 模拟设计：ADEMP 在增长模型中的版本

当数值模型要做模拟比较时，应清楚说明五个对象。这和统计模拟中的 ADEMP 框架相同，只是换成增长语境。

表 F.10: 增长模型模拟设计的 ADEMP 框架

组成	问题	增长模型中的写法
Aims	想学什么？	风险是否提高储蓄？金融摩擦是否降低 TFP？政策是否提高福利？
DGP	数据如何生成？	冲击过程、转移矩阵、生产函数、政策规则、初始分布
Estimands	比较什么对象？	稳态资本、平均增长率、福利、财富 Gini、TFP 损失
Methods	用什么算法？	VFI、EGM、finite difference、shooting、Monte Carlo 模拟
Performance	如何评价？	误差、矩匹配、福利差、计算时间、稳健性

如果论文只说“我们模拟模型”，而没有说明这些对象，读者就无法判断模拟结果回答了什么问题。增长模型模拟尤其要说明 burn-in、模拟长度和随机种子。若比较的是罕见危机或尾部风险，还要说明模拟样本是否足够长，否则尾部矩会非常不稳定。

F.15 数值稳定性：浮点数也会改变结论

经济学数值计算使用有限精度。双精度浮点数大约有 15–17 位有效数字，这通常足够，但不是无条件安全。

第一，避免不必要的矩阵求逆。求解线性方程时应解

$$Ax = b,$$

而不是显式计算 $A^{-1}b$。在 HJB、KFE 和 policy evaluation 中，大型稀疏线性系统很常见，应使用适合稀疏矩阵的求解方法。

第二，注意病态矩阵。若矩阵条件数很大，微小舍入误差会被放大。接近单位根、贴现因子接近 1、状态高度持久或网格极不均匀时，矩阵可能变得难解。

第三，避免灾难性相消。两个很接近的大数相减，可能丢失有效数字。增长率、福利差和政策反事实经常是小差异，应该用对数差、解析化简或高精度检查。

第四，概率和似然尽量在 log scale 上计算。虽然增长模型不总是估计似然，但在模拟极端状态、长期路径概率或离散选择时，乘很多小概率会下溢为 0。

F.16 可复现结构：一篇论文的数值附录应写什么

一个严肃的数值附录至少应包含以下信息。

表 F.11: 数值结果报告模板

项目	应报告内容
参数	所有校准参数、估计参数、政策参数和来源
状态网格	每个状态变量的上下界、点数、是否非均匀
冲击过程	离散化方法、状态点、转移矩阵、原始连续过程参数
算法	VFI、EGM、policy iteration、finite difference 或其他方法
插值	线性、样条、Chebyshev 或无插值；外推规则
收敛标准	值函数、策略函数、市场清算和分布残差的容忍度
误差诊断	Euler error、Bellman/HJB residual、资源约束误差、KFE 残差
稳健性	网格加密、边界扩大、步长缩小、不同算法比较
模拟设置	随机种子、模拟长度、burn-in、重复次数
软件环境	语言、主要包、版本、硬件或运行时间

这张表也可以作为你阅读论文的检查单。若一篇定量增长论文没有报告网格边界，没有 Euler error，没有市场清算误差，也没有稳健性检查，那么即使结论很有趣，也应该谨慎。

F.17 常见错误

第一，只报告“收敛了”，不报告误差。收敛标准是算法停止条件，不是经济正确性的证明。

第二，网格太窄。若许多状态选择网格上界，模型可能人为压低储蓄、财富不平等或资本供给。

第三，把 Euler 等式用于约束绑定状态。借贷约束绑定时应检查 Euler 不等式和互补松弛，而不是要求等式误差为零。

第四，KFE 离散化不守恒。若分布总质量不是 1，或出现负密度，后续总量结果都不可信。

第五，忽略市场清算。家庭问题解得再准，若资本市场没有清算，就不是一般均衡。

第六，在政策比较中让数值误差大于政策效应。若福利增益很小，误差诊断必须更严格。

第七，只在一个网格上跑一次。高维模型当然贵，但至少应做关键网格和边界稳健性检查。

第八，用算法掩盖经济解释。最终要回答的是资本、风险、创新、分布和政策机制，而不是展示程序技巧。

F.18 英文术语表

表 F.12: 数值实现与误差诊断术语表

英文术语	中文解释
Value function iteration	值函数迭代；反复应用 Bellman 算子求不动点。
Policy iteration	策略迭代；交替进行策略评估和策略改进。
Howard improvement	Howard 加速；在策略不变时多次更新价值以减少最大化次数。
Endogenous grid method	内生网格法；用 Euler 方程从下一期资产反推出当前资产。
Shooting method	射击法；猜测跳跃变量并模拟路径以满足终端条件。
Collocation	配点法；要求方程残差在选定节点上为零。
Projection method	投影法；用基函数逼近未知函数并约束残差。
Finite difference	有限差分；用网格上函数值近似导数。
Upwind scheme	迎风格式；按状态漂移方向选择差分方向。
Euler error	Euler 误差；衡量数值策略是否满足跨期最优条件。
Bellman residual	Bellman 残差；衡量 V 与 TV 的差距。

英文术语	中文解释
HJB residual	HJB 残差；衡量连续时间价值方程左右两边差距。
Market-clearing error	市场清算误差；供给与需求之间的残差。
KFE residual	KFE 残差；分布是否满足稳态前向方程。
Grid refinement	网格加密；增加网格点检查结果稳健性。
Burn-in	预热期；模拟中丢弃初始过渡样本。
Random seed	随机种子；使随机模拟可复现的初始设置。

F.19 本附录 Review

如果你真正理解本附录，应该能够回答以下问题。

第一，为什么值函数收敛不等于策略函数已经满足 Euler 方程？

第二，VFI、policy iteration 和 EGM 分别适合什么类型的问题？它们的核心权衡是什么？

第三，为什么 EGM 在标准消费储蓄模型中很快，但在非凸或离散选择模型中不一定适用？

第四，shooting method 为什么适合低维 saddle path，却不适合很多高维转移动态？

第五，连续时间 HJB 中为什么要使用 upwind scheme？若差分方向错了，会有什么后果？

第六，为什么离散生成元矩阵每行求和为 0 是 KFE 质量守恒的关键？

第七，Euler error 的消费等价解释是什么？为什么政策福利比较越小，对数值误差要求越高？

第八，一篇定量增长论文的方法附录至少应报告哪些数值细节？

F.20 核心文献

递归方法的理论基础可读 [Stokey et al., 1989, Ljungqvist and Sargent, 2018]。计算经济学和数值动态模型的系统教材可参考 [Judd, 1998, Adda and Cooper, 2003]。生产率过程离散化常用 [Tauchen, 1986]。连续时间 HJB–KFE 的现代宏观实现可与 [Achdou et al., 2022] 一起阅读。本附录应与附录 A 的随机递归方法、附录 C 的异质性主体均衡、附录 D 的随机 HJB 和 KFE 配合使用。

参考文献与延伸阅读

[Acemoglu, 2002] Acemoglu, D. (2002). Directed technical change. *Review of Economic Studies*, 69(4):781–809.

[Acemoglu, 2009] Acemoglu, D. (2009). *Introduction to Modern Economic Growth*. Princeton University Press.

[Acemoglu et al., 2001] Acemoglu, D., Johnson, S., and Robinson, J. A. (2001). The colonial origins of comparative development: An empirical investigation. *American Economic Review*, 91(5):1369–1401.

[Acemoglu and Restrepo, 2018] Acemoglu, D. and Restrepo, P. (2018). The race between man and machine: Implications of technology for growth, factor shares, and employment. *American Economic Review*, 108(6):1488–1542.

[Acemoglu and Restrepo, 2019] Acemoglu, D. and Restrepo, P. (2019). Automation and new tasks: How technology displaces and reinstates labor. *Journal of Economic Perspectives*, 33(2):3–30.

[Acemoglu and Ventura, 2002] Acemoglu, D. and Ventura, J. (2002). The world income distribution. *Quarterly Journal of Economics*, 117(2):659–694.

[Achdou et al., 2022] Achdou, Y., Han, J., Lasry, J.-M., Lions, P.-L., and Moll, B. (2022). Income and wealth distribution in macroeconomics: A continuous-time approach. *Review of Economic Studies*, 89(1):45–86.

[Adda and Cooper, 2003] Adda, J. and Cooper, R. (2003). *Dynamic Economics: Quantitative Methods and Applications*. MIT Press.

[Aghion et al., 2005] Aghion, P., Bloom, N., Blundell, R., Griffith, R., and Howitt, P. (2005). Competition and innovation: An inverted-u relationship. *Quarterly Journal of Economics*, 120(2):701–728.

[Aghion et al., 2001] Aghion, P., Harris, C., Howitt, P., and Vickers, J. (2001). Competition, imitation and growth with step-by-step innovation. *Review of Economic Studies*, 68(3):467–492.

[Aghion and Howitt, 1992] Aghion, P. and Howitt, P. (1992). A model of growth through creative destruction. *Econometrica*, 60(2):323–351.

[Aghion and Howitt, 2009] Aghion, P. and Howitt, P. (2009). *The Economics of Growth*. MIT Press.

[Aiyagari, 1994] Aiyagari, S. R. (1994). Uninsured idiosyncratic risk and aggregate saving. *Quarterly Journal of Economics*, 109(3):659–684.

[Alcalá and Ciccone, 2004] Alcalá, F. and Ciccone, A. (2004). Trade and productivity. *Quarterly Journal of Economics*, 119(2):613–646.

[Angrist and Pischke, 2009] Angrist, J. D. and Pischke, J.-S. (2009). *Mostly Harmless Econometrics: An Empiricist's Companion*. Princeton University Press.

[Arkolakis et al., 2012] Arkolakis, C., Costinot, A., and Rodríguez-Clare, A. (2012). New trade models, same old gains? *American Economic Review*, 102(1):94–130.

[Arrow, 1962] Arrow, K. J. (1962). The economic implications of learning by doing. *Review of Economic Studies*, 29(3):155–173.

[Arrow and Debreu, 1954] Arrow, K. J. and Debreu, G. (1954). Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*, 22(3):265–290.

[Autor et al., 2003] Autor, D. H., Levy, F., and Murnane, R. J. (2003). The skill content of recent technological change: An empirical exploration. *Quarterly Journal of Economics*, 118(4):1279–1333.

[Azariadis, 1996] Azariadis, C. (1996). The economics of poverty traps part one: Complete markets. *Journal of Economic Growth*, 1(4):449–486.

[Banerjee and Newman, 1993] Banerjee, A. V. and Newman, A. F. (1993). Occupational choice and the process of development. *Journal of Political Economy*, 101(2):274–298.

[Barro, 1991] Barro, R. J. (1991). Economic growth in a cross section of countries. *Quarterly Journal of Economics*, 106(2):407–443.

[Barro and Lee, 2013] Barro, R. J. and Lee, J.-W. (2013). A new data set of educational attainment in the world, 1950–2010. *Journal of Development Economics*, 104:184–198.

[Barro and Sala-i Martin, 1992] Barro, R. J. and Sala-i Martin, X. (1992). Convergence. *Journal of Political Economy*, 100(2):223–251.

[Barro and Sala-i Martin, 2004] Barro, R. J. and Sala-i Martin, X. (2004). *Economic Growth*. MIT Press.

[Bartelsman et al., 2013] Bartelsman, E., Haltiwanger, J., and Scarpetta, S. (2013). Cross-country differences in productivity: The role of allocation and selection. *American Economic Review*, 103(1):305–334.

[Baumol, 1986] Baumol, W. J. (1986). Productivity growth, convergence, and welfare: What the long-run data show. *American Economic Review*, 76(5):1072–1085.

[Beck et al., 2000] Beck, T., Levine, R., and Loayza, N. (2000). Finance and the sources of growth. *Journal of Financial Economics*, 58(1–2):261–300.

[Becker, 1964] Becker, G. S. (1964). *Human Capital: A Theoretical and Empirical Analysis, with Special Reference to Education*. University of Chicago Press.

[Bellman, 1957] Bellman, R. (1957). *Dynamic Programming*. Princeton University Press.

[Bencivenga and Smith, 1991] Bencivenga, V. R. and Smith, B. D. (1991). Financial intermediation and endogenous growth. *Review of Economic Studies*, 58(2):195–209.

[Benhabib and Spiegel, 1994] Benhabib, J. and Spiegel, M. M. (1994). The role of human capital in economic development: Evidence from aggregate cross-country data. *Journal of Monetary Economics*, 34(2):143–173.

[Bertrand et al., 2004] Bertrand, M., Duflo, E., and Mullainathan, S. (2004). How much should we trust differences-in-differences estimates? *Quarterly Journal of Economics*, 119(1):249–275.

[Bewley, 1977] Bewley, T. (1977). The permanent income hypothesis: A theoretical formulation. *Journal of Economic Theory*, 16(2):252–292.

[Bloom et al., 2020] Bloom, N., Jones, C. I., Van Reenen, J., and Webb, M. (2020). Are ideas getting harder to find? *American Economic Review*, 110(4):1104–1144.

[Bolt and van Zanden, 2023] Bolt, J. and van Zanden, J. L. (2023). Maddison style estimates of the evolution of the world economy: A new 2023 update. *Maddison Project Database*.

[Bolt and van Zanden, 2024] Bolt, J. and van Zanden, J. L. (2024). Maddison project database 2023. DataverseNL, Version 1.0.

[Boote and Beile, 2005] Boote, D. N. and Beile, P. (2005). Scholars before researchers: On the centrality of the dissertation literature review in research preparation. *Educational Researcher*, 34(6):3–15.

[Brandt and Zhu, 2010] Brandt, L. and Zhu, X. (2010). Accounting for china's growth. IZA Discussion Paper 4764, IZA.

[Bresnahan and Trajtenberg, 1995] Bresnahan, T. F. and Trajtenberg, M. (1995). General purpose technologies: Engines of growth? *Journal of Econometrics*, 65(1):83–108.

[Brynjolfsson et al., 2021] Brynjolfsson, E., Rock, D., and Syverson, C. (2021). The productivity j-curve: How intangibles complement general purpose technologies. *American Economic Journal: Macroeconomics*, 13(1):333–372.

[Buera et al., 2011] Buera, F. J., Kaboski, J. P., and Shin, Y. (2011). Finance and development: A tale of two sectors. *American Economic Review*, 101(5):1964–2002.

[Callaway and Sant'Anna, 2021] Callaway, B. and Sant'Anna, P. H. C. (2021). Difference-in-differences with multiple time periods. *Journal of Econometrics*, 225(2):200–230.

[Caselli, 2005] Caselli, F. (2005). Accounting for cross-country income differences. In *Handbook of Economic Growth*, volume 1A, pages 679–741. Elsevier.

[Cass, 1965] Cass, D. (1965). Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation. *Review of Economic Studies*, 32(3):233–240.

[Chang and Li, 2015] Chang, A. C. and Li, P. (2015). Is economics research replicable? sixty published papers from thirteen journals say "usually not". Finance and Economics Discussion Series 2015-083, Board of Governors of the Federal Reserve System.

[Christensen and Miguel, 2018] Christensen, G. and Miguel, E. (2018). Transparency, reproducibility, and the credibility of economics research. *Journal of Economic Literature*, 56(3):920–980.

[Coe and Helpman, 1995] Coe, D. T. and Helpman, E. (1995). International r&d spillovers. *European Economic Review*, 39(5):859–887.

[Comin and Hobijn, 2004] Comin, D. and Hobijn, B. (2004). Cross-country technology adoption: Making the theories face the facts. *Journal of Monetary Economics*, 51(1):39–83.

[Comin and Hobijn, 2010] Comin, D. and Hobijn, B. (2010). An exploration of technology diffusion. *American Economic Review*, 100(5):2031–2059.

[Debreu, 1959] Debreu, G. (1959). *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*. Yale University Press.

[Dewald et al., 1986] Dewald, W. G., Thursby, J. G., and Anderson, R. G. (1986). Replication in empirical economics: The journal of money, credit and banking project. *American Economic Review*, 76(4):587–603.

[Diamond, 1965] Diamond, P. A. (1965). National debt in a neoclassical growth model. *American Economic Review*, 55(5):1126–1150.

[Dixit and Stiglitz, 1977] Dixit, A. K. and Stiglitz, J. E. (1977). Monopolistic competition and optimum product diversity. *American Economic Review*, 67(3):297–308.

[Donaldson, 2018] Donaldson, D. (2018). Railroads of the raj: Estimating the impact of transportation infrastructure. *American Economic Review*, 108(4–5):899–934.

[Eaton and Kortum, 2002] Eaton, J. and Kortum, S. (2002). Technology, geography, and trade. *Econometrica*, 70(5):1741–1779.

[Feenstra et al., 2015] Feenstra, R. C., Inklaar, R., and Timmer, M. P. (2015). The next generation of the penn world table. *American Economic Review*, 105(10):3150–3182.

[Fleming and Soner, 2006] Fleming, W. H. and Soner, H. M. (2006). *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Springer, 2 edition.

[Frankel and Romer, 1999] Frankel, J. A. and Romer, D. (1999). Does trade cause growth? *American Economic Review*, 89(3):379–399.

[Galor, 1996] Galor, O. (1996). Convergence? inferences from theoretical models. *Economic Journal*, 106(437):1056–1069.

[Gentzkow and Shapiro, 2014] Gentzkow, M. and Shapiro, J. M. (2014). Code and data for the social sciences: A practitioner's guide. Manuscript.

[Goldin and Katz, 2008] Goldin, C. and Katz, L. F. (2008). *The Race between Education and Technology*. Harvard University Press, Cambridge, MA.

[Grant and Booth, 2009] Grant, M. J. and Booth, A. (2009). A typology of reviews: An analysis of 14 review types and associated methodologies. *Health Information & Libraries Journal*, 26(2):91–108.

[Greenwood and Jovanovic, 1990] Greenwood, J. and Jovanovic, B. (1990). Financial development, growth, and the distribution of income. *Journal of Political Economy*, 98(5):1076–1107.

[Groningen Growth and Development Centre, 2023] Groningen Growth and Development Centre (2023). Penn world table version 10.01. University of Groningen; accessed May 24, 2026.

[Grossman and Helpman, 1991] Grossman, G. M. and Helpman, E. (1991). *Innovation and Growth in the Global Economy*. MIT Press.

[Hall and Jones, 1999] Hall, R. E. and Jones, C. I. (1999). Why do some countries produce so much more output per worker than others? *Quarterly Journal of Economics*, 114(1):83–116.

[Helpman and Trajtenberg, 1998] Helpman, E. and Trajtenberg, M. (1998). A time to sow and a time to reap: Growth based on general purpose technologies. In Helpman, E., editor, *General Purpose Technologies and Economic Growth*. MIT Press.

[Herrendorf et al., 2014] Herrendorf, B., Rogerson, R., and Valentinyi, Á. (2014). Growth and structural transformation. In Aghion, P. and Durlauf, S. N., editors, *Handbook of Economic Growth*, volume 2, pages 855–941. Elsevier.

[Hopenhayn, 1992] Hopenhayn, H. A. (1992). Entry, exit, and firm dynamics in long run equilibrium. *Econometrica*, 60(5):1127–1150.

[Hsieh and Klenow, 2009] Hsieh, C.-T. and Klenow, P. J. (2009). Misallocation and manufacturing tfp in china and india. *Quarterly Journal of Economics*, 124(4):1403–1448.

[Huggett, 1993] Huggett, M. (1993). The risk-free rate in heterogeneous-agent incomplete-insurance economies. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 17(5–6):953–969.

[Jin et al., 2005] Jin, H., Qian, Y., and Weingast, B. R. (2005). Regional decentralization and fiscal incentives: Federalism, chinese style. *Journal of Public Economics*, 89(9–10):1719–1742.

[Jones, 1995] Jones, C. I. (1995). R&d-based models of economic growth. *Journal of Political Economy*, 103(4):759–784.

[Jones and Vollrath, 2013] Jones, C. I. and Vollrath, D. (2013). *Introduction to Economic Growth*. W. W. Norton.

[Judd, 1998] Judd, K. L. (1998). *Numerical Methods in Economics*. MIT Press.

[Kaldor, 1961] Kaldor, N. (1961). Capital accumulation and economic growth. *The Theory of Capital*, pages 177–222.

[Kamien and Schwartz, 2012] Kamien, M. I. and Schwartz, N. L. (2012). *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. Dover Publications.

[Karabarbounis and Neiman, 2014] Karabarbounis, L. and Neiman, B. (2014). The global decline of the labor share. *Quarterly Journal of Economics*, 129(1):61–103.

[Keller, 2004] Keller, W. (2004). International technology diffusion. *Journal of Economic Literature*, 42(3):752–782.

[King and Levine, 1993] King, R. G. and Levine, R. (1993). Finance and growth: Schumpeter might be right. *Quarterly Journal of Economics*, 108(3):717–737.

[Kiyotaki and Moore, 1997] Kiyotaki, N. and Moore, J. (1997). Credit cycles. *Journal of Political Economy*, 105(2):211–248.

[Klenow and Rodriguez-Clare, 1997] Klenow, P. J. and Rodriguez-Clare, A. (1997). The neoclassical revival in growth economics: Has it gone too far? In *NBER Macroeconomics Annual 1997*, volume 12, pages 73–103. MIT Press.

[Kongsamut et al., 2001] Kongsamut, P., Rebelo, S., and Xie, D. (2001). Beyond balanced growth. *Review of Economic Studies*, 68(4):869–882.

[Koopmans, 1965] Koopmans, T. C. (1965). On the concept of optimal economic growth. In *The Econometric Approach to Development Planning*. North-Holland, Amsterdam.

[Krusell et al., 2000] Krusell, P., Ohanian, L. E., Ríos-Rull, J.-V., and Violante, G. L. (2000). Capital-skill complementarity and inequality: A macroeconomic analysis. *Econometrica*, 68(5):1029–1053.

[Kuznets, 1966] Kuznets, S. (1966). *Modern Economic Growth: Rate, Structure, and Spread*. Yale University Press.

[Levine, 2005] Levine, R. (2005). Finance and growth: Theory and evidence. *Handbook of Economic Growth*, 1:865–934.

[Lewis, 1954] Lewis, W. A. (1954). Economic development with unlimited supplies of labour. *The Manchester School*, 22(2):139–191.

[Ljungqvist and Sargent, 2018] Ljungqvist, L. and Sargent, T. J. (2018). *Recursive Macroeconomic Theory*. MIT Press, 4 edition.

[Lucas, 1988] Lucas, R. E. (1988). On the mechanics of economic development. *Journal of Monetary Economics*, 22(1):3–42.

[Mankiw et al., 1992] Mankiw, N. G., Romer, D., and Weil, D. N. (1992). A contribution to the empirics of economic growth. *Quarterly Journal of Economics*, 107(2):407–437.

[Mas-Colell et al., 1995] Mas-Colell, A., Whinston, M. D., and Green, J. R. (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press.

[Melitz, 2003] Melitz, M. J. (2003). The impact of trade on intra-industry reallocations and aggregate industry productivity. *Econometrica*, 71(6):1695–1725.

[Merton, 1971] Merton, R. C. (1971). Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory*, 3(4):373–413.

[National Bureau of Statistics of China, 2026] National Bureau of Statistics of China (2026). National data. Accessed May 24, 2026.

[Nelson and Phelps, 1966] Nelson, R. R. and Phelps, E. S. (1966). Investment in humans, technological diffusion, and economic growth. *American Economic Review*, 56(1/2):69–75.

[North, 1990] North, D. C. (1990). *Institutions, Institutional Change and Economic Performance*. Cambridge University Press.

[Oksendal, 2003] Oksendal, B. (2003). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer, 6 edition.

[Pontryagin et al., 1962] Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V., and Mishchenko, E. F. (1962). *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Interscience.

[Prescott, 1998] Prescott, E. C. (1998). Needed: A theory of total factor productivity. *International Economic Review*, 39(3):525–551.

[Qian and Weingast, 1997] Qian, Y. and Weingast, B. R. (1997). Federalism as a commitment to preserving market incentives. *Journal of Economic Perspectives*, 11(4):83–92.

[Quah, 1996] Quah, D. T. (1996). Twin peaks: Growth and convergence in models of distribution dynamics. *Economic Journal*, 106(437):1045–1055.

[Rajan and Zingales, 1998] Rajan, R. G. and Zingales, L. (1998). Financial dependence and growth. *American Economic Review*, 88(3):559–586.

[Ramsey, 1928] Ramsey, F. P. (1928). A mathematical theory of saving. *Economic Journal*, 38(152):543–559.

[Rebelo, 1991] Rebelo, S. (1991). Long-run policy analysis and long-run growth. *Journal of Political Economy*, 99(3):500–521.

[Restuccia and Rogerson, 2008] Restuccia, D. and Rogerson, R. (2008). Policy distortions and aggregate productivity with heterogeneous establishments. *Review of Economic Dynamics*, 11(4):707–720.

[Rodríguez and Rodrik, 2001] Rodríguez, F. and Rodrik, D. (2001). Trade policy and economic growth: A skeptic's guide to the cross-national evidence. *NBER Macroeconomics Annual*, 15:261–325.

[Romer, 2019] Romer, D. (2019). *Advanced Macroeconomics*. McGraw-Hill.

[Romer, 1986] Romer, P. M. (1986). Increasing returns and long-run growth. *Journal of Political Economy*, 94(5):1002–1037.

[Romer, 1990] Romer, P. M. (1990). Endogenous technological change. *Journal of Political Economy*, 98(5):S71–S102.

[Samuelson, 1958] Samuelson, P. A. (1958). An exact consumption-loan model of interest with or without the social contrivance of money. *Journal of Political Economy*, 66(6):467–482.

[Segerstrom, 1998] Segerstrom, P. S. (1998). Endogenous growth without scale effects. *American Economic Review*, 88(5):1290–1310.

[Shapiro, 2022] Shapiro, J. M. (2022). How to get started on research in economics. Manuscript.

[Simon and Blume, 1994] Simon, C. P. and Blume, L. (1994). *Mathematics for Economists*. W. W. Norton.

[Snyder, 2019] Snyder, H. (2019). Literature review as a research methodology: An overview and guidelines. *Journal of Business Research*, 104:333–339.

[Solow, 1956] Solow, R. M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economics*, 70(1):65–94.

[Song et al., 2011] Song, Z., Storesletten, K., and Zilibotti, F. (2011). Growing like china. *American Economic Review*, 101(1):196–233.

[Stanford HAI, 2026] Stanford HAI (2026). The 2026 ai index report. Technical report, Stanford University.

[Stokey et al., 1989] Stokey, N. L., Lucas, R. E., and Prescott, E. C. (1989). *Recursive Methods in Economic Dynamics*. Harvard University Press.

[Sun and Abraham, 2021] Sun, L. and Abraham, S. (2021). Estimating dynamic treatment effects in event studies with heterogeneous treatment effects. *Journal of Econometrics*, 225(2):175–199.

[Sundaram, 1996] Sundaram, R. K. (1996). *A First Course in Optimization Theory*. Cambridge University Press.

[Swan, 1956] Swan, T. W. (1956). Economic growth and capital accumulation. *Economic Record*, 32(2):334–361.

[Tauchen, 1986] Tauchen, G. (1986). Finite state markov-chain approximations to univariate and vector autoregressions. *Economics Letters*, 20(2):177–181.

[Uzawa, 1961] Uzawa, H. (1961). Neutral inventions and the stability of growth equilibrium. *Review of Economic Studies*, 28(2):117–124.

[Webster and Watson, 2002] Webster, J. and Watson, R. T. (2002). Analyzing the past to prepare for the future: Writing a literature review. *MIS Quarterly*, 26(2):xiii–xxiii.

[World Bank, 2026a] World Bank (2026a). World development indicators. Accessed May 22, 2026.

[World Bank, 2026b] World Bank (2026b). Worldwide governance indicators. Accessed May 22, 2026.

[Xu, 2011] Xu, C. (2011). The fundamental institutions of china's reforms and development. *Journal of Economic Literature*, 49(4):1076–1151.

[Young, 1995] Young, A. (1995). The tyranny of numbers: Confronting the statistical realities of the east asian growth experience. *Quarterly Journal of Economics*, 110(3):641–680.

[Young, 1998] Young, A. (1998). Growth without scale effects. *Journal of Political Economy*, 106(1):41–63.

[Young, 2000] Young, A. (2000). The razor's edge: Distortions and incremental reform in the people's republic of china. *Quarterly Journal of Economics*, 115(4):1091–1135.

[Zhu, 2012] Zhu, X. (2012). Understanding china's growth: Past, present, and future. *Journal of Economic Perspectives*, 26(4):103–124.