Chapter 1 Savings Choice

Principles of Economics

week 8 2025

1 模型引言

在先前课程中，我们回顾了**消费者选择理论**，并运用该理论初步解释了人们如何在当前与未来之间配置资金。同样地，我们很容易识别出资金的供需模型。为便于阐述与证明，我们将首先考虑资金配置的**两期模型**——具体研究人们在今年与明年之间的储蓄选择——并构建二维模型进行推导。随后，我们将把该模型拓展至 n **期形式**。

2 无货币条件下的储蓄模型

首先让我们思考，在不存在货币的经济体中，人们将如何制定当前与未来之间的储蓄决策。此处，我们令 c_1 与 c_2 分别表示今年与明年的消费水平，y_1 表示今年收入，S 表示今年储蓄，ρ 表示贴现率，r 表示实际利率。由此可推导出它们满足的关系式及相应效用函数：

$$U(c_1, c_2) = u(c_1) + \frac{u(c_2)}{1+\rho} \tag{1}$$

$$\begin{cases} c_1 + s = y_1 & (2) \\ c_2 = (1+r)s & (3) \end{cases}$$

联立公式 (2) 与 (3) 可得：

$$c_2 = (1+r)(y_1 - c_1) \tag{4}$$

$$c_1 + \frac{1}{1+r}c_2 = y_1 \tag{5}$$

该问题转化为在约束条件 (2) 与 (3) 下求效用函数 (1) 的最大化问题。对 (1) 求导可得：

$$u'(c_1^*) - \frac{1+r}{1+\rho} u'((1+r)(y_1 - c_1^*)) = 0 \tag{6}$$

其中 c_1^*, c_2^*, s^* 代表这些变量在最优状态下的取值。
由此我们得到：

$$\begin{cases} \dfrac{u'(c_1^*)}{u'(c_2^*)} = \dfrac{1+r}{1+\rho} & (7) \\ c_2^* = (1+r)(y_1 - c_1^*) = (1+r)s^* & (8) \end{cases}$$

(7) 描述了个体在当前与未来消费之间实现最优均衡的状态。等式左侧的边际效用比率衡量个体对当前消费的主观偏好程度，右侧则表征市场回报（即实际利率）与等待成本（贴现率）之间的权衡关系。

- 当 $r < \rho$ 时，意味着等待产生的效用损失超过市场提供的回报，导致个体更倾向于当期消费而非储蓄
- 反之，若 $r > \rho$，则表明市场回报超过个体的不耐程度，这将促使他们减少当期消费并增加储蓄以供未来消费

(8) 表征跨期预算约束，界定了个体如何将当期储蓄转化为未来消费，从而确保消费选择的可行性。

此外，可将 (7) 重新整理，使市场决定的实际利率位于等式一侧，个体主观贴现因子 $1+\rho$ 位于另一侧：

$$\frac{u'(c_1^*)}{\frac{u'(c_2^*)}{1+\rho}} = 1 + r \tag{9}$$

这将更直观地揭示个体偏好选择与市场条件之间的关系。

3 货币经济中的储蓄模型

货币的引入从本质上丰富了跨期选择模型。个体当期的选择还会受到其对未来预期的影响。

我们保留两期框架，但引入新的变量：

名义变量：
P_1, P_2：分别表示今年与明年的价格水平，需注意 P_2^e 表示**预期**价格水平

i：名义利率

Y_1：以货币计值的首年收入

实际变量： 前述模型中的所有变量（c_1, c_2, y_1, r）均以实际单位（消费单位）计量

保持相似的方程与函数形式，仅增加名义变量的影响：

$$U(c_1, c_2) = u(c_1) + \frac{u(c_2)}{1+\rho} \tag{1}$$

$$\begin{cases} P_1 c_1 + s = Y_1 & (10) \\ P_2^e c_2 = (1+i)s & (11) \end{cases}$$

$$\implies c_1 + \frac{1}{1+i}\frac{P_2^e}{P_1} c_2 = \frac{Y_1}{P_1} = y_1 \tag{12}$$

此处我们定义新变量 $\pi^e = P_2/P_1$ 作为衡量第 1 期到第 2 期价格变化的指标。更一般地，该变量通常被称为**预期通货膨胀率**。

因此，(12) 可简化为：

$$c_1 + \frac{1+\pi^e}{1+i} c_2 = y_1 \tag{13}$$

通过与 (5) 对比，容易发现 i, r, π^e 之间存在特定等式关系，即所谓的**费雪方程**：

$$1 + i = (1+r)(1+\pi^e) = 1 + r + \pi^e + r\pi^e = 1 + r + \pi^e + o(1) \tag{14}$$

在正常情况下，当实际利率和预期通货膨胀率均处于较低水平时，交叉项 $r\pi^e$ 可视为无穷小量。这使得费雪方程可近似表示为：

$$i = r + \pi^e \tag{15}$$

Note 1. 然而，在发生高通货膨胀、实际利率较高或需要精确计算的情形下，该交叉项不可省略。

最优化条件与前述模型类似:

$$u'(c_1^{**}) - \frac{1+i}{1+\pi^e}\frac{1}{1+\rho}u'(\frac{1+i}{1+\pi^e}(y_1 - c_1^{**})) = 0 \tag{16}$$

$$\begin{cases} \dfrac{u'(c_1^{**})}{u'(c_2^{**})} = \dfrac{1+i}{1+\pi^e}\dfrac{1}{1+\rho} & (17) \\ c_2^{**} = \dfrac{1+i}{1+\pi^e}\dfrac{1}{1+\rho}(y_1 - c_1^{**}) = \dfrac{1+i}{1+\pi^e}\dfrac{1}{1+\rho}s^{**} & (18) \end{cases}$$

4 引入第二期收入的储蓄模型

接下来考虑引入第二期收入的情形，观察模型将如何变化。消费、储蓄与收入的约束方程变为:

$$\begin{cases} P_1c_1 + s = Y_1 & (19) \\ P_2c_2 = (1+i)s + Y_2 & (20) \end{cases}$$

$$c_1 + \frac{1}{1+i}\frac{P_2}{P_1}c_2 = \frac{Y_1}{P_1} + \frac{\frac{Y_2}{1+i}}{P_1} \tag{21}$$

如前所述，若令 $1+i = (1+r)(1+\pi)$，其中定义 $1+\pi = \frac{P_2}{P_1}$，则第二期收入项的实际值可转化为:

$$\frac{\frac{Y_2}{1+i}}{P_1} = \frac{\frac{Y_2}{(1+r)(1+\pi)}}{P_1} = \frac{\frac{Y_2}{1+\pi}}{(1+r)P_1} = \frac{Y_2\frac{P_1}{P_2}}{(1+r)P_1} = \frac{y_2}{1+r} \tag{22}$$

这意味着实际值形式的原方程可表示为:

$$c_1 + \frac{1}{1+r}c_2 = y_1 + \frac{1}{1+r}y_2 \tag{23}$$

5 一个住房租赁市场示例

住房租赁需求函数:

$$R = a - bH \tag{24}$$

房主的房屋供给意愿:

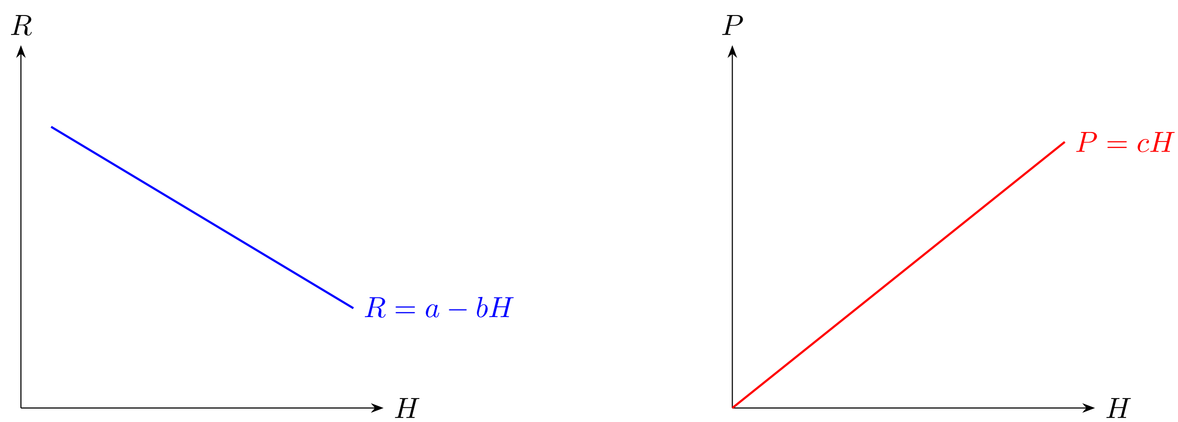
$$P = cH \tag{25}$$

H : 房屋建设总量

R : 房屋租赁价格

P : 新建房屋的边际成本

a, b, c : 供给曲线与需求曲线中的参数



(a) 租赁需求曲线 (b) 供给曲线

图 1: 住房市场:供需关系

如果我们定义 I 为总投资额,它等于住房建设的总支出,我们可以得到方程:

$$I = PH = cH^2 \tag{26}$$

收入 I 与住房总存量 H 之间的微分关系为:

$$\frac{dH}{dI} = \frac{1}{2\sqrt{cI}} \tag{27}$$

定义住房投资回报率 r 为:

$$1 + r = \frac{R}{P} \tag{28}$$

则 r 与 I 之间的微分关系为:

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dI} &= \frac{d}{dI}\left(\frac{a - b\sqrt{\frac{I}{c}}}{\sqrt{cI}}\right) \\
&= -\frac{b}{2cI} - (a - b\sqrt{\frac{I}{c}})\frac{1}{2\sqrt{c}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{cI}}\left(\frac{1}{2\sqrt{cI}}\right)(-b) + \frac{-(a - b\sqrt{\frac{I}{c}})}{cI}\left(\frac{1}{2\sqrt{cI}}\right)c \\
&= \frac{1}{P}\frac{dH}{dI}\frac{dR}{dH} + \frac{-R}{P^2}\frac{dH}{dI}\frac{dP}{dH}
\end{aligned}$$

微分项	**表达式与来源**	**符号**	**经济解释**
$\frac{dH}{dI}$	由 $I = cH^2 \Rightarrow H = \sqrt{I/c}$	**正** (+)	投资增加导致住房供给增加
$\frac{dR}{dH}$	由 $R = a - bH \Rightarrow \frac{dR}{dH} = -b$	**负** (-)	住房供给增加降低租金价格（需求定律）
$\frac{dP}{dH}$	由 $P = cH \Rightarrow \frac{dP}{dH} = c$	**正** (+)	住房增加提高边际建造成本
$\frac{1}{P}$	边际成本 $P > 0$	**正** (+)	–
$\frac{-R}{P^2}$	租金价格 $R > 0, P^2 > 0$	**负** (-)	–

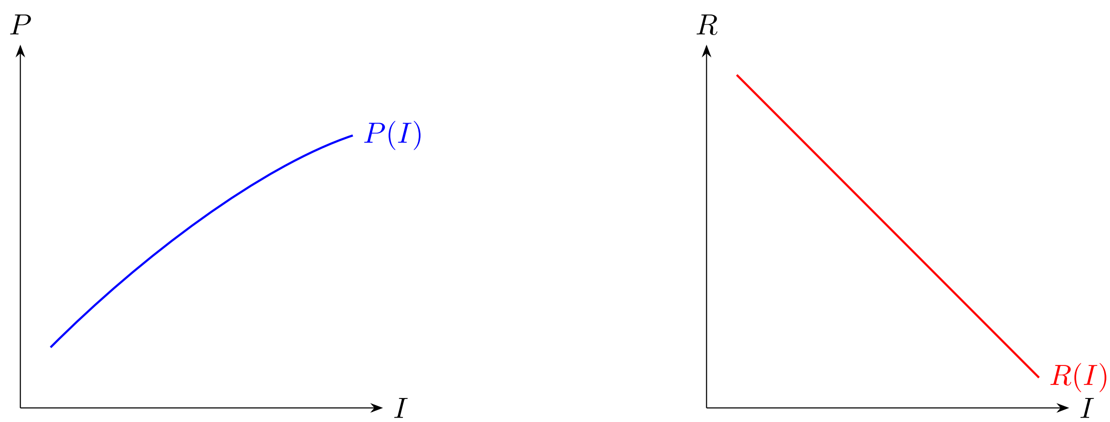
综合效应:

- **第一部分:** $(1/P) \cdot (dH/dI) \cdot (dR/dH) = (+) \cdot (+) \cdot (-) = -$
- **第二部分:** $(-R/P^2) \cdot (dH/dI) \cdot (dP/dH) = (-) \cdot (+) \cdot (+) = -$

由于两项均为负值，它们的和 $\frac{dr}{dI}$ 必为负值。

这一数学结论具有清晰的经济学解释：

- **分子减小而分母增大：**
  - 当投资 I 增加时，住房供给 H 随之增加
  - **分子 R（租金价格）：** 由于需求曲线向下倾斜，住房供给增加导致租金价格下降
  - **分母 P（成本）：** 由于供给曲线向上倾斜，住房供给增加推高了边际建造成本
  - 在分子减小而分母增大的共同作用下，二者比值 $r = R/P$ 自然随之下降
- **边际收益递减规律：**
  - 在固定的土地和市场环境下，初始投资能够获得较高回报
  - 随着投资规模扩大，边际收益（体现为租金价格 R）逐渐下降，而边际成本（P）持续上升
  - 这导致总投资回报率 r 随投资增加而呈现下降趋势



(a) 生产函数　　(b) 需求曲线

图 2: 投资视角下的住房市场关系

当我们固定短期住房供给 P，即假定住房数量 H 在短期内保持不变时，住房需求 P 可表示为

$$P = \frac{a - bH}{1 + r} \tag{29}$$

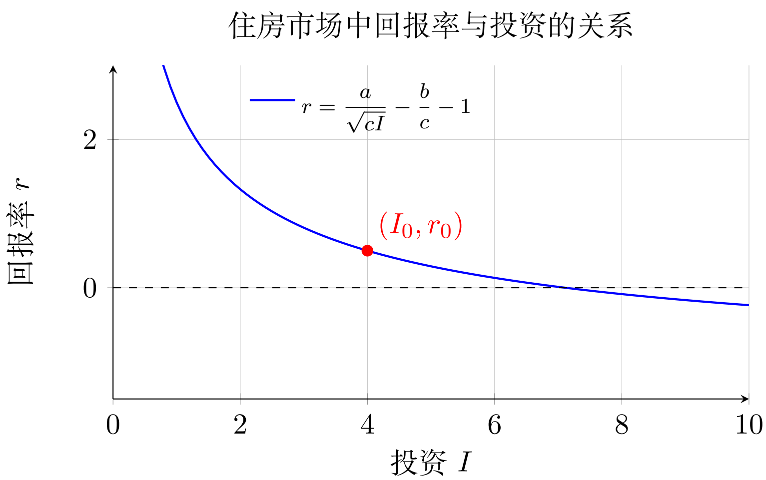


图 3: 投资 I 与回报率 r 的关系

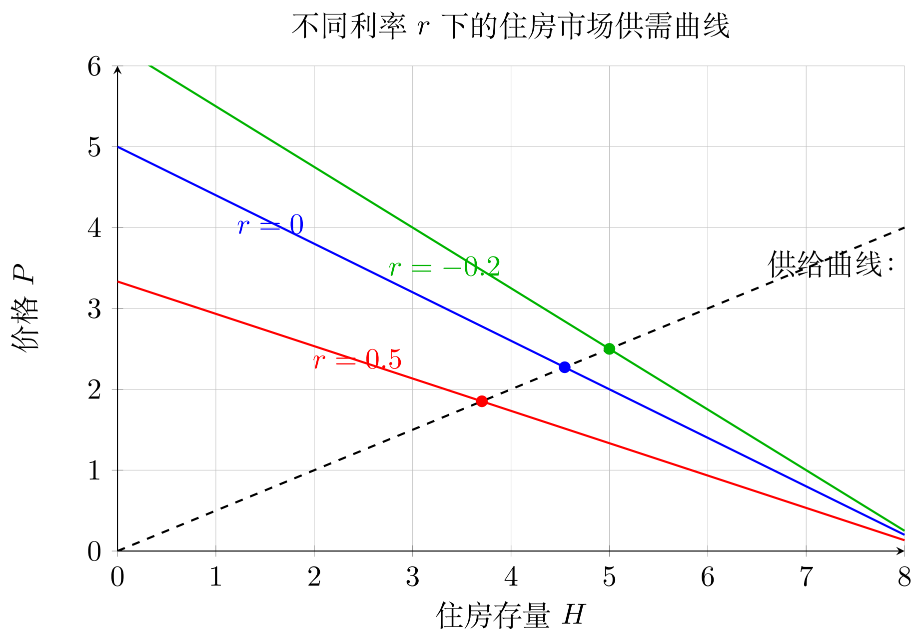


图 4: 供给曲线 $P = cH$ 与不同利率 r 对应的需求曲线 $P = (a - bH)/(1 + r)$。当利率 r 上升时，需求曲线向下旋转，导致均衡价格与数量降低；当利率 r 下降时，需求曲线向上旋转，导致均衡价格与数量升高。圆点标示不同利率对应的均衡点。