

中微第六次作业（答案详解版）

1. 交换经济均衡

题目给定：

$$u_A(x_A, y_A) = x_A y_A, \quad u_B(x_B, y_B) = x_B y_B,$$

初始禀赋为 $W_A = (40, 60)$, $W_B = (40, 40)$, 且 $P_x = 1$, $P_y = P$ 。

解：

对于效用函数 $u(x, y) = xy$ 的消费者，最优消费满足把收入各拿一半用于购买两种商品，因此若收入为 m ，则

$$x = \frac{m}{2P_x}, \quad y = \frac{m}{2P_y}.$$

由于这里 $P_x = 1$, $P_y = P$ ，所以只要先算出每个人的收入即可。

(1) 需求函数

消费者 A 的收入为

$$m_A = 40 + 60P.$$

因而其需求函数为

$$\begin{aligned} x_A^d &= \frac{m_A}{2} = \frac{40 + 60P}{2} = 20 + 30P, \\ y_A^d &= \frac{m_A}{2P} = \frac{40 + 60P}{2P} = \frac{20}{P} + 30. \end{aligned}$$

消费者 B 的收入为

$$m_B = 40 + 40P.$$

因而其需求函数为

$$\begin{aligned} x_B^d &= \frac{m_B}{2} = \frac{40 + 40P}{2} = 20 + 20P, \\ y_B^d &= \frac{m_B}{2P} = \frac{40 + 40P}{2P} = \frac{20}{P} + 20. \end{aligned}$$

所以答案是：

$$\begin{aligned} x_A^d &= 20 + 30P, & y_A^d &= \frac{20}{P} + 30, \\ x_B^d &= 20 + 20P, & y_B^d &= \frac{20}{P} + 20. \end{aligned}$$

(2) 均衡价格与均衡配置

总供给为

$$\bar{x} = 40 + 40 = 80, \quad \bar{y} = 60 + 40 = 100.$$

市场对商品 x 的总需求为

$$x_A^d + x_B^d = (20 + 30P) + (20 + 20P) = 40 + 50P.$$

均衡要求

$$40 + 50P = 80,$$

解得

$$P = \frac{40}{50} = 0.8.$$

用商品 y 市场验证：

$$y_A^d + y_B^d = \left(\frac{20}{P} + 30\right) + \left(\frac{20}{P} + 20\right) = \frac{40}{P} + 50.$$

令其等于总供给 100：

$$\frac{40}{P} + 50 = 100 \Rightarrow \frac{40}{P} = 50 \Rightarrow P = 0.8,$$

与前面一致。

因此均衡价格为

$$P_y = 0.8.$$

将 $P = 0.8$ 代回各自需求函数：

$$x_A^* = 20 + 30 \times 0.8 = 44, \quad y_A^* = \frac{20}{0.8} + 30 = 25 + 30 = 55;$$

$$x_B^* = 20 + 20 \times 0.8 = 36, \quad y_B^* = \frac{20}{0.8} + 20 = 25 + 20 = 45.$$

所以均衡配置为

$$(x_A^*, y_A^*) = (44, 55), \quad (x_B^*, y_B^*) = (36, 45).$$

2. 公害与庇古税

题目中按通常写法理解，生产函数为

$$x = 2L^{1/2} = 2\sqrt{L},$$

公害函数为

$$z = \frac{x}{4},$$

每个人的效用函数为

$$u = 3x - 2z^2.$$

两个人各有 8 单位劳动，所以总劳动禀赋为 16。

解：

(1) 无公害管制时的竞争均衡

在没有关于公害的法规时，因为效用中没有闲暇项，只要工资为正，居民会把劳动供给出来，因此总劳动供给为

$$L = 16.$$

于是产量为

$$x = 2\sqrt{16} = 8.$$

公害量为

$$z = \frac{x}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

所以竞争均衡下

$$x^{CE} = 8, \quad z^{CE} = 2.$$

(2) 帕累托最优配置

设社会总产量为 $x = 2\sqrt{L}$ ，则两个人对消费品 x 的总效用贡献为 $3x$ （因为总消费等于总产量），而两个人共同承担污染损失，总污染损失为

$$2 \times 2z^2 = 4z^2.$$

又因为 $z = x/4$ ，故社会总福利可写为

$$W(x) = 3x - 4\left(\frac{x}{4}\right)^2 = 3x - \frac{x^2}{4}.$$

对 x 求一阶条件：

$$\frac{dW}{dx} = 3 - \frac{x}{2} = 0,$$

解得

$$x^* = 6.$$

于是

$$z^* = \frac{x^*}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

再由生产函数 $x = 2\sqrt{L}$ 得

$$6 = 2\sqrt{L} \Rightarrow \sqrt{L} = 3 \Rightarrow L^* = 9.$$

所以帕累托最优配置为

$$L^* = 9, \quad x^* = 6, \quad z^* = \frac{3}{2}.$$

(3) 最优税率

政府按每单位产出 x 征税 t 后，企业看到的每单位产出净价格变为 $1 - t$ 。因此在与第 (1) 问相同的竞争框架下，企业希望把产量从无税时的 $x = 8$ 压低到社会最优的 $x = 6$ 。由无税均衡产量为 8，而征税后净收益比例变为 $1 - t$ ，对应产量变为

$$x = 8(1 - t).$$

要使其恰好等于社会最优产量 6，应满足

$$8(1 - t) = 6.$$

解得

$$1 - t = \frac{3}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{4}.$$

因此所需税率为

$$t^* = \frac{1}{4}.$$

答：

$$t = \frac{1}{4}.$$

3. 修路的最优长度与是否立项

已知每个村民的边际支付意愿为

$$P(x) = 1 - x,$$

若村民人数为 N ，则社会总边际支付意愿为

$$N(1 - x).$$

(1) 成本为 $C(x) = \frac{1}{2}x^2$ 时

此时边际成本为

$$MC = C'(x) = x.$$

最优道路长度应满足萨缪尔森条件：

$$\text{社会总边际支付意愿} = \text{边际成本}.$$

即

$$N(1-x) = x.$$

解得最优长度

$$x^* = \frac{N}{N+1}.$$

当 $N = 1000$ 时,

$$x^* = \frac{1000}{1001} \approx 0.999.$$

因而该村最优道路长度为

$$x^* = \frac{1000}{1001}.$$

(2) 成本为固定成本 $C(x) = 500$ 时

因为成本与长度无关, 若决定修路, 则最优长度应先使总收益最大。总收益函数为

$$B(x) = \int_0^x N(1-s) ds = N \left(x - \frac{x^2}{2} \right).$$

对 x 求导:

$$B'(x) = N(1-x).$$

令其为零, 得

$$x = 1.$$

这时最大总收益为

$$B(1) = N \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{N}{2}.$$

只有当最大总收益不少于固定成本 500 时, 才值得修路, 因此要求

$$\frac{N}{2} \geq 500.$$

解得

$$N \geq 1000.$$

所以, 当村民人数至少为 1000 人时, 应该实施该修路工程; 若少于 1000 人, 则不应修路。

4. 教育信号模型中的分离均衡

高能力工人的生产率为

$$y_H = H + de,$$

低能力工人的生产率为

$$y_L = L + de.$$

低能力者的教育成本为 e ，高能力者的教育成本为 ke ，其中

$$0 < d < k < 1.$$

企业的信念是：若工人选择 $e \geq e^*$ ，则判断其为高能力型；若 $e < e^*$ ，则判断其为低能力型。

解：

要使这个信念能够支持一个 **分离均衡**，必须满足：

- 高能力工人愿意选择至少 e^* 的教育；
- 低能力工人不愿意模仿高能力工人去选择至少 e^* 的教育。

在竞争条件下，企业支付的工资等于它根据教育信号所推断出的生产率。

(一) 高能力工人的激励约束

若高能力工人选择 $e \geq e^*$ ，由于企业将其识别为高能力者，他获得工资

$$W = H + de.$$

净收益为

$$U_H^{sep} = H + de - ke = H + (d - k)e.$$

因为 $d - k < 0$ ，所以在满足 $e \geq e^*$ 的前提下，高能力工人会选择最小的合格教育水平，即 $e = e^*$ 。因此其分离时净收益为

$$U_H^{sep} = H + (d - k)e^*.$$

如果高能力工人不去发送信号，而是选择 $e < e^*$ ，那么最优是取最小值 $e = 0$ ，此时企业把他看成低能力者，工资为 L ，净收益为

$$U_H^{pool} = L.$$

为了让高能力工人愿意发送信号，需要

$$H + (d - k)e^* \geq L.$$

所以

$$e^* \leq \frac{H - L}{k - d}.$$

(二) 低能力工人的激励约束

若低能力工人老老实实选择 $e < e^*$ ，最优也是取最低教育水平 $e = 0$ ，因为其净收益为

$$U_L^{truth} = L + de - e = L - (1 - d)e,$$

而 $1 - d > 0$ ，所以该式随 e 增大而下降。因此最优为

$$U_L^{truth} = L.$$

若低能力工人模仿高能力工人，选择 $e \geq e^*$ ，则最优是选最小的可模仿水平 $e = e^*$ ，这时企业把他当成高能力者，工资为

$$W = H + de^*.$$

于是净收益为

$$U_L^{mimic} = H + de^* - e^* = H - (1 - d)e^*.$$

为了让低能力工人不模仿，需要

$$L \geq H - (1 - d)e^*.$$

所以

$$e^* \geq \frac{H - L}{1 - d}.$$

(三) 结论

因此，能够支持分离均衡的阈值 e^* 必须满足

$$\frac{H - L}{1 - d} \leq e^* \leq \frac{H - L}{k - d}.$$

也就是说，**任何落在这个区间内的 e^* 都是合适的。**

如果题目问“最小的合适阈值”，通常取

$$e^* = \frac{H - L}{1 - d}.$$

最终答案汇总

- 第 1 题：

$$P_y^* = 0.8, \quad (x_A^*, y_A^*) = (44, 55), \quad (x_B^*, y_B^*) = (36, 45).$$

- 第 2 题：

$$(x^{CE}, z^{CE}) = (8, 2), \quad (L^*, x^*, z^*) = \left(9, 6, \frac{3}{2}\right), \quad t^* = \frac{1}{4}.$$

- 第 3 题：

$$x^* = \frac{N}{N+1}, \quad N = 1000 \Rightarrow x^* = \frac{1000}{1001}, \quad C(x) = 500 \text{ 时需 } N \geq 1000.$$

- 第 4 题:

$$\frac{H-L}{1-d} \leq e^* \leq \frac{H-L}{k-d},$$

最小可取

$$e^* = \frac{H-L}{1-d}.$$