Baumol-Tobin

Principles of Economics

2025 年 11 月 28 日

目录

1 模型核心思想

Baumol 模型将**货币需求**问题类比于企业的**库存管理**问题。个人或企业需要在两种成本之间进行权衡：

- **交易成本 (Transaction Cost)**：将生息资产转换为现金所产生的固定成本 b
- **机会成本 (Opportunity Cost)**：持有现金而放弃的利息收入，由利率 i 决定

模型的目标是找到最优现金持有量 C，使得**总成本最小化**。

2 基础模型推导

2.1 符号定义

- T：一段时间内的总交易量（名义值）
- b：每次交易的固定成本
- i：利率（机会成本率）
- C：每次变现的金额（最优现金持有量）

2.2 总成本函数

总成本由两部分组成：

$$\text{交易成本} = b \times \frac{T}{C} \tag{1}$$

$$\text{机会成本} = i \times \frac{C}{2} \tag{2}$$

因此，总成本函数为：

$$M = b\frac{T}{C} + i\frac{C}{2} \tag{3}$$

2.3 最优化求解

为求最小化总成本，对 C 求导并令导数为零：

$$\frac{dM}{dC} = -\frac{bT}{C^2} + \frac{i}{2} = 0 \tag{4}$$

解方程得：

$$\frac{bT}{C^2} = \frac{i}{2} \quad \Rightarrow \quad C^2 = \frac{2bT}{i} \tag{5}$$

最终得到**最优现金持有量**：

$$\boxed{C = \sqrt{\frac{2bT}{i}}} \tag{6}$$

2.4 相关推论

- **平均现金持有量**：

$$M = \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{bT}{2i}} \tag{7}$$

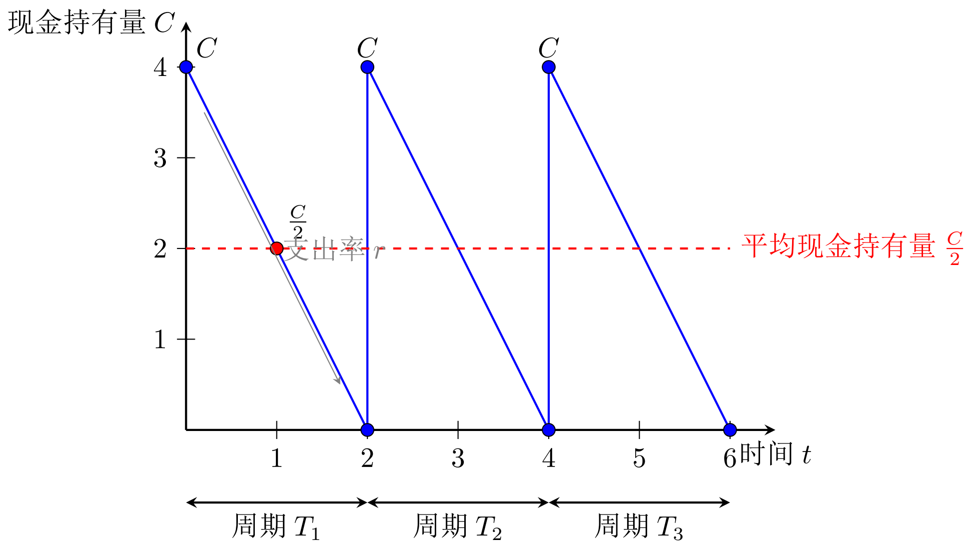
- **标准化形式**（用真实变量表示）：

$$\beta = \frac{b}{P} \quad \text{(真实交易成本)} \tag{8}$$

$$t = \frac{T}{P} \quad \text{(真实交易量)} \tag{9}$$

$$\frac{M}{P} = \sqrt{\frac{\beta t}{2i}} \quad \text{(总实际成本)} \tag{10}$$

3 Baumol 模型现金持有量示意图



鲍莫尔模型现金持有量动态

- 初始现金持有量: $C = \sqrt{\frac{2bT}{i}}$
- 平均现金持有量: $\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{bT}{2i}}$
- 每次取款间隔时间: $T_i = \frac{C}{r}$ （r 为支出率）
- 总交易成本: $b \times \frac{T}{C}$
- 机会成本: $i \times \frac{C}{2}$

图 1: Baumol 模型现金持有量随时间变化示意图

3.1 图形解释

该图展示了 Baumol 模型中现金持有量的典型变化模式：

1. **锯齿形模式**：现金持有量从初始值 C 开始，随着时间线性减少至零
2. **周期行为**：当现金耗尽时，立即提取新的现金量 C，开始新的周期
3. **平均持有量**：红色虚线表示平均现金持有量 $\frac{C}{2}$，这是计算机会成本的基础
4. **最优解**：C 的值是通过权衡交易成本和机会成本确定的

3.2 数学关系

$$
\begin{aligned}
\text{最优现金持有量:}\quad & C^* = \sqrt{\frac{2bT}{i}} && (11) \\
\text{平均现金持有量:}\quad & \bar{C} = \frac{C^*}{2} = \sqrt{\frac{bT}{2i}} && (12) \\
\text{交易次数:}\quad & n = \frac{T}{C^*} = \sqrt{\frac{iT}{2b}} && (13) \\
\text{总成本:}\quad & TC = b \cdot \frac{T}{C^*} + i \cdot \frac{C^*}{2} = \sqrt{2bTi} && (14)
\end{aligned}
$$

4 模型在通胀环境下的扩展

4.1 引入通货膨胀

- P_1：第一期价格水平
- P_2：第二期价格水平，$P_2 = (1+\pi)P_1$
- π：通货膨胀率
- γ：实际利率

4.2 跨期预算约束

考虑两期消费决策：

- **第一期约束：**

$$P_1 c_1 + B + \frac{C}{2} = Y \tag{15}$$

- **第二期约束：**

$$P_2 c_2 = (1+i)B + \frac{C}{2} - b\frac{T}{C} \tag{16}$$

4.3 跨期优化

将两期约束合并，得到**跨期预算约束**：

$$P_1 c_1 + \frac{P_2 c_2}{1+i} + \left[\frac{C}{2} - \frac{C}{2(1+i)}\right] = Y - \frac{b}{1+i}\frac{T}{C} \tag{17}$$

经济解释：

- 左边：两期消费现值 + 现金持有的净成本现值
- 右边：收入 - 交易成本现值
- 方括号项 $\frac{C}{2} \cdot \frac{i}{1+i}$ 表示持有现金的利息损失现值

4.4 扩展模型的成本函数

在跨期框架下，需要最小化的额外成本为：

$$C_{min} = \underbrace{\frac{c}{2} \cdot \frac{i}{1+i}}_{\text{机会成本现值}} + \underbrace{\beta \cdot \frac{t}{c} \cdot \frac{1}{1+i}}_{\text{交易成本现值}} \tag{18}$$

对 c 求导最小化，仍会得到平方根公式形式，但所有项都经过现值调整。

考虑上式 $\frac{c}{2} \cdot \frac{i}{1+i} = \frac{c}{2}(\frac{\pi+\gamma}{P_1(1+\pi)(1+\gamma)}) = \frac{1}{2}(c\pi + c\gamma) \div P_2 \div (1+\gamma)$

换言之，持有货币的损失 (机会成本) 为放弃的实际利率 $c\gamma$ 加上货币的减少 $c\pi$ 这两者的单位都是第二期的货币，故可以换成 $\frac{c\pi+c\gamma}{P_2}$ 第二期的货，又可以换成 $\frac{c\pi+c\gamma}{P_2} \div (1+\gamma)$ 第一期的货。

5 通胀税与铸币费分析

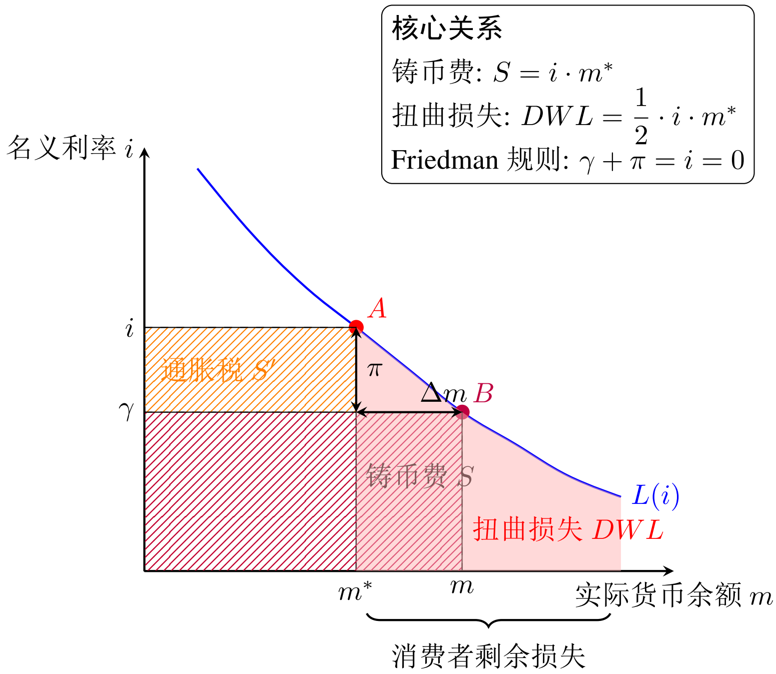


图 2: 通胀税与铸币费

5.1 理论解释

5.1.1 通胀税与铸币费

- **铸币费 (Seigniorage)**: 政府通过发行货币获得的实际收益，表示为矩形面积 $\gamma \times m$
- **通胀税 (Inflation Tax)**: 通货膨胀对货币持有者征收的隐性税收，等于名义利率 i 乘以实际货币余额 m
- **扭曲损失 (Deadweight Loss)**: 由于通胀导致的资源配置扭曲，表现为 Harberger 三角形的面积

5.1.2 Monetarism 的核心命题

根据货币主义理论，图表揭示了以下重要关系：

$$\text{铸币费} = i \cdot m^* = \sqrt{\frac{\beta y i}{2}} \tag{19}$$

$$\text{扭曲损失 (DWL)} = \int_0^{i^*} m(i)di - \sqrt{\frac{\beta y i}{2}} = \int_0^{i^*} \sqrt{\frac{\beta y}{2i}} di - \sqrt{\frac{\beta y i}{2}} = \sqrt{2\beta y i}\Big|_0^{i^*} - \sqrt{\frac{\beta y i}{2}} = \sqrt{\frac{\beta y i}{2}} \tag{20}$$

这意味着由通胀引起的扭曲损失恰好等于铸币费收入。

5.2 Friedman 最优货币数量规则

货币主义的奠基人 Milton Friedman 提出了著名的**最优货币数量规则**：

$$i = r + \pi^e = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi = -r \tag{21}$$

其中：

- r: 实际利率
- π^e: 预期通货膨胀率
- π: 实际通货膨胀率

这一规则的经济学含义是：

1. **最优状态**: 名义利率为零，持有货币的机会成本消失
2. **通缩政策**: 为了实现零名义利率，需要 $\pi = -r$，即轻微的通货紧缩
3. **效率最大化**: 在此状态下，货币的边际社会成本等于边际社会收益，扭曲损失最小化
4. **政策含义**: 中央银行应该以轻微通缩为目标，使实际货币余额达到社会最优水平

5.3 最优条件

最小化总社会成本：

$$\min \left[DWL + \text{其他扭曲成本} \right] \tag{22}$$

一阶条件导出弗里德曼规则：

$$\frac{\partial TC}{\partial i} = 0 \quad \Rightarrow \quad i = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi = -r \tag{23}$$

5.4 政策启示

- **反对通胀**: 通货膨胀本质上是对货币持有者征收的扭曲性税收
- **规则优于相机抉择**: 货币政策应该遵循固定规则，而非随意调整
- **长期中性**: 货币在长期只影响价格水平，不影响实际变量

- **效率优先**: 货币政策的首要目标是维持货币体系的效率，而非刺激经济

$$\boxed{\text{最优货币政策: } \pi^* = -r, \quad i^* = 0, \quad m^* = \sqrt{\frac{\beta y}{2r}}} \tag{24}$$